

堤防越水をともなう直線矩形断面河道の水面形 Water Surface Profile of a Flow Decreasing Discharge by Side Wall Overtopping

建設省土木研究所 正 員 石 川 忠 晴

1. はじめに

堤防は普通土で造られており、越水に対して極めて弱い。そこで多少の越水にも耐えられるよう堤防を強化する工法の開発が望まれている。しかし堤防を越水する状態はすでに河川防災計画の範囲を超えているわけであり、一体どの程度の越水状態を対象に工法の開発を行うかという規準は明確でない。一方、過去の越水事例の事後調査結果によると、越流水深が60cmを越えることは稀であった。⁽¹⁾ また2,3の数値計算例⁽²⁾においても、河道疎通能力を大幅に越える洪水を想定しても数十cmの越流水深しか生じていない。このことからそれほど大きな越流水深を考える必要は無いと思われるのだが、しかしそれが一般的に成り立つかどうか大きな問題となる。そこでこの点を確めるために、越水をともなう流れの水面形を解析し、河道特性量と越流水深の関係を検討した。

2. 解析対象とする流れ

越流水深は、例えば圧密沈下によってたまたま天端が低くなっている箇所とか急激な湾曲部の外側で大きくなる。しかしそれらの局所的な影響は別途考慮されるとして、ここでは超過洪水対策の基礎資料を得る目的で河川縦断的視点から考える。

河道の基本的特性、河幅、水深、勾配、フルード数などと越流水深の関係をできるだけ理論的に導くために、直線矩形断面の無限に長い河道を考えることとする。この場合、右図に示すふたつの典型的な越流状態が考えられる。〔Ⅰ〕は河道疎通能力を上まわる洪水が来た場合で、越流しながら徐々に流量、水深とも減少し、ずっと下流では河道満杯状態で等流となる。〔Ⅱ〕は上流域で既に溢水し河道疎通能力に見合った流量で流れてきたものが、障害物（堰、橋脚、合流点、狭窄部など）によってセキ上げられて越流する場合である。

もちろん実際の河道形状は非常に複雑であるから、このような単純な状態ですべてを代表させることは無理であるが、越流の規模を大略推定するには役立つ。例えば、図2のように2川が合流する場合、下流河道の疎通能力は上流2川の疎通能力の合計より大きくない場合が常であるから、この地点を中心に越流の生じる恐れが大きい。この場合、合流点下流部では〔Ⅰ〕の状態が、合流点上流部では〔Ⅱ〕の状態が生じる。そこで流量及び水深の連続性を考慮して〔Ⅰ〕と〔Ⅱ〕の解を接続すればこの場合の水面形を得られる。

3. 水面形の支配方程式とその性質

運動方程式は次のように書かれる。

$$\{(Q + dQ)(V + dV) + \frac{g}{2}(H + dH)^2 B\} - \{QV + \frac{g}{2}H^2 B\} = giB(H + \frac{1}{2}dH)dx + p dQ(V + \frac{1}{2}dV) - U_*^2 B d\tau \quad (1)$$

ここに、 Q = 流量、 H = 水深、 V = 流速、 B = 河幅、 i = 河床勾配、 g = 重力加速度、 U_* = 摩擦速度である。 p は越流水の運動量の補正係数で、越流水が主流と同じ x 方向の流速を持って出てゆく場合に1、 x 方向の流速を失って出てゆく場合に0となる。また x 軸は下流方向にとり、 $d(\cdot)$ は x 方向の増分を表わしている。 $V = Q/BH$ として V を消去し整理すると次式を得る。

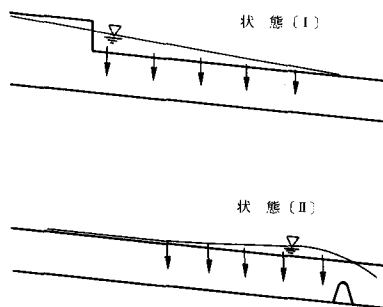


図1 解析対象とする流れ

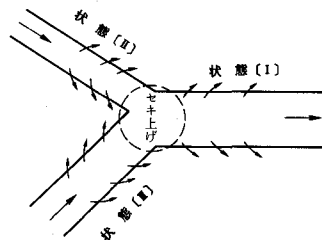


図2 合流部の越流

$$(2-p) \frac{Q}{BH} dQ - \frac{Q^2}{BH^2} dH + gHBdH - (giH - U_*^2) Bdx = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

河床せん断力が流速の2乗に比例するとして流速係数 $\varphi = V/U_*$ を一定値とおくと次式となる。

$$(2-p) \frac{Q}{BH} dQ - \frac{Q^2}{BH^2} dH + gHBdH - (giH - \frac{Q^2}{B^2 H^2 \varphi^2}) Bdx = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

流量と河道水深を次のようにおく、

$$Q = Q_0(1+q), \quad H = H_0(1+h) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 Q_0 = 河道満杯流量、 H_0 = 満杯流量時の水深（河道深さ）、 q = 無次元化された超過流量、 h = 無次元化された越流水深である。(4)式を(3)式に代入して整理すると次式を得る。

$$p^*(1+q)(1+h)dq - (1+q)^2 dh + \frac{1}{1\varphi^2}(1+h)^3 dh - \frac{1}{\varphi^2}(1+h)^3 d\xi + \frac{1}{\varphi^2}(1+q)^2 d\xi = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $p^* = (2-p)$ 、 $\xi = x/H_0$ である。上式のうち第4項と第5項のみとするとシェジャー形の平均流速公式、第2項から第5項までとすると通常の漸変流方程式となる。

越流の影響は第1項によって表わされる。

越流量は(6)式で表わされるものとする。無次元化すると(7)式となる。

$$dQ = -C\sqrt{g}(H-H_0)^{\frac{3}{2}} dx \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$dq = -\frac{C}{\varphi\sqrt{1}} \frac{H_0}{B} h^{\frac{3}{2}} d\xi \quad \dots\dots\dots (7)$$

しかし、 $h^{\frac{3}{2}}$ は解析する上で種々の困難をともなうので、次のように近似する。

$$h^{\frac{3}{2}} \rightarrow ah^2 + bh \quad \dots\dots\dots (8)$$

係数 a, b は、 $h = \{0 \sim h_0\}$ の範囲で最小自乗法で求めると、

$$a = \frac{40}{63} h_0^{-\frac{1}{2}}, \quad b = \frac{8}{21} h_0^{\frac{1}{2}} \quad \text{となる。越流水深が河道水深の1}$$

割程度までと考えると $a = 2.0$ 、 $b = 0.12$ となる。(8)式の近似度を図3に示す。以上より、

$$dq = -\frac{C}{\varphi\sqrt{1}} \frac{H_0}{B} (ah^2 + bh) d\xi \quad \dots\dots\dots (9)$$

(5)式と(9)式から q を消去して h と ξ の関係を求めれば水面形が得られる。しかし式形がかなり複雑なため q を消去するのは容易でない。また q を消去できたとしても高階の非線形微分方程式となり解を求めるのは容易でないと思われる。そこでまず消去しやすい ξ を消去して q と h の関係を調べてみることにする。

$$\frac{dh}{dq} = \frac{p^*(1+q)(1+h) + \beta \{(1+h)^3 - (1+q)^3\} / (ah^2 + bh)}{(1+q)^2 - \alpha(1+h)^3} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $\alpha = 1/i\varphi^2 = 1/F_0^2$ 、 $\beta = (1/F_0 C) \cdot Bi/H_0$ 、 F_0 = 満杯流量でのフルード数である。

(10)式を図化すると図4のようになる。小実線は各位置での dh/dq の値を表わしており、これらを滑かに結んだ曲線が(10)式の解となる。図中の破線は(3)式で用いた抵抗式 ($\varphi = \text{const.}$) を表わしている。

曲線の形は α と β の値によって変化するが、一般に図5に示す3つの曲線群より構成される。領域①は“上流から過剰な流量が供給され、下流で低下背水する場合”、領域②は“上流から過剰な流量が供給され、下流でさらにセキ上

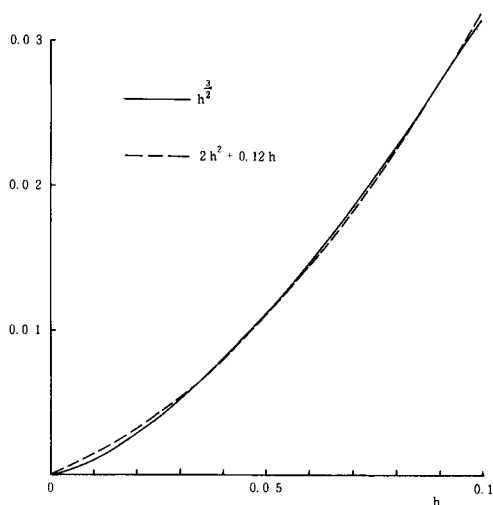


図3 (8)式の近似度

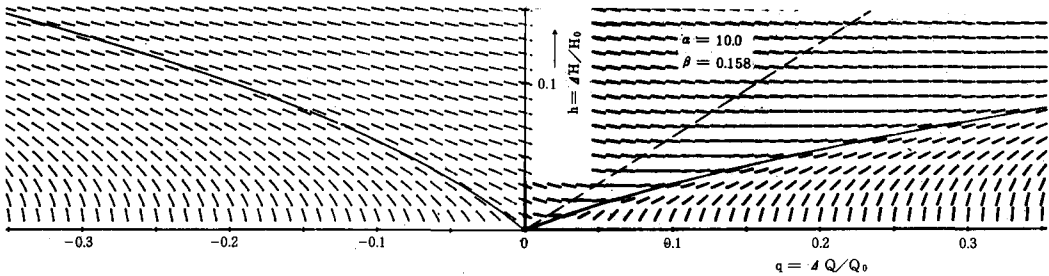


図4 (10式の解の例

げている場合”，領域⑨は“上流からの流量は河道疎通能力以内であるにもかかわらず，下流でセキ上げられたために溢水した場合”，をそれぞれ表わしている。これらの領域を区分する2本の曲線〔I〕と〔II〕が図1で示した2つの状態〔I〕と〔II〕に対応する。なお，図4，図5は流れが常流の場合である。射流ではパターンが若干異なる。紙面の関係から本報では常流の場合に限りて話を進めることとする。

図4で特に重要と思われる点は，過剰流量に対する水位・流量曲線（状態I）が，越流をともしない流れの水位流量曲線（破線）よりも下に位置することである。具体的に述べると，堤防を大きく嵩上げて過剰流量を河道に収めた場合の水位（図6左）に比べて，同一流量のもとで溢水をともしない流れの水位（図6右）が低いことを意味する。これは下流に行くほど流量が減るので各断面において本質的には低下背水になるという理由による。

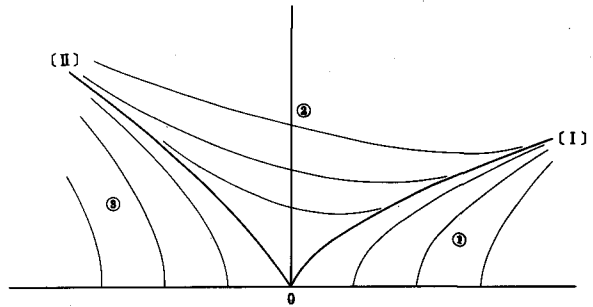


図5 (10式の曲線のパターン

同一流量

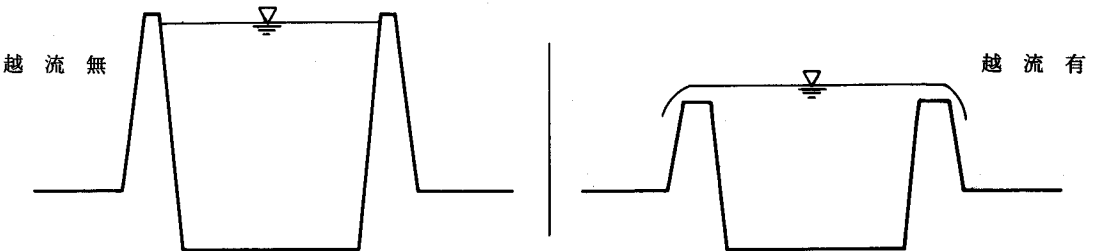


図6 越流による水位通減効果

4. 理論解析

解析の要点は図5に示した水位・流量曲線〔I〕，〔II〕の式形を求めることに尽きる。これを $q = f(h)$ と表わせば，(9)式より水面形は，

$$\xi = -\frac{F_0 B}{C H_0} \int \frac{f'(h)}{ah^2 + bh} dh \quad \dots\dots\dots (11)$$

まず無次元過剰流量 q と無次元越流水深 h の関係を次のように仮定する。

$$q = r h + \delta h^2 + \epsilon h^3 + \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 r, δ, ϵ は各河道固有の定数で、(10)式の α 及び β により定まるものとする。(12)式を(10)式に代入し、 h を摂動パラメータとして各オーダーの恒等式から r, δ, ϵ を順次求めると次のようになる。

$$\text{第1近似} \quad r = \frac{(3\beta + bp^*) \pm \sqrt{(3\beta + bp^*)^2 + 8\beta b(\alpha - 1)}}{4\beta} \quad \dots\dots\dots (13-1)$$

$$\text{第2近似} \quad \delta = \frac{(1-\alpha)a + (2r-3\alpha)b - (a+b)rp^* - br^2p^* - \beta(3-r^2)r}{2\{bp^* + 3(1-r)\beta\}} \quad \dots\dots\dots (13-2)$$

$$\text{第3近似} \quad \epsilon = \frac{(2\delta + r^2 - 3\alpha)b + (2r - 3\alpha)a - p^*\{2(a+b)\delta + (a+b)r^2 + 3br\delta + ar\} - \beta\{(r-4r^2\delta + 6\delta - 4\delta^2)\}}{3\{bp^* + 3\beta(1-r)\}} \quad \dots\dots\dots (13-3)$$

r は2根を持ち、それに対応して δ, ϵ も2つつ求まる。(13-1)式の正符号の根とその系列の δ, ϵ が図5の曲線〔I〕に、負符号の根とその系列の δ, ϵ が曲線〔II〕に対応する。

(12)式を(11)式に代入すると水面形が求まる。

$$\xi = -\frac{F_0 B}{C H_0} \left[\frac{3\epsilon}{a} h + \frac{r}{b} \ln h + \left(2\frac{\delta}{a} - 3\frac{\epsilon b}{a} - \frac{r}{b} \right) \ln (ah + b) \right] + \text{const.} \quad \dots\dots\dots (14)$$

図7は第1～3近似解と厳密解(9)、(10)式を直接数値積分した結果)とを比較した例である。これから第2近似解までで十分な精度を有するものと考えられる。そこで(14)式の ϵ にかかわる項を無視して、

$$\begin{aligned} \xi = & -\frac{F_0 B}{C H_0} \left[\frac{r}{b} \ln h \right. \\ & \left. + \left(2\frac{\delta}{a} - \frac{r}{b} \right) \ln (ah + b) \right] \\ & + \text{const.} \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

ところで越水量を表す際に、 $h^{\frac{3}{2}} \rightarrow ah^2 + bh$ と近似した。(8)式これを逆に用いると、

$$\ln (ah + b) = \ln (ah^2 + bh) - \ln h \rightarrow \ln h^{\frac{3}{2}} - \ln h = \frac{1}{2} \ln h \quad \dots\dots\dots (16)$$

これを(15)式に代入すると、

$$\xi = -\frac{F_0 B}{C H_0} \left(\frac{r}{2b} + \frac{\delta}{a} \right) \ln h + \text{const.} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$h = h_1 \exp \left[-\frac{C H_0}{F_0 B} \frac{\xi}{\omega} \right], \quad \omega = \frac{r}{2b} + \frac{\delta}{a} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ただし h_1 は(12)式の関係から求まる。すなわち、

$$q_1 = r h_1 + \delta h_1^2 \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここに q_1 は x 座標原点における無次元過剰流量である。状態〔I〕の場合には上流からの洪水量によって定まる。また状態〔II〕の場合にはセキ上げている障害物の水理特性式と(19)式を連立することにより求まる。図8は(18)式と厳密解とを比較した例でありこれから(18)式でもかなりの近似度を有することがわかる。

図6に示したように、越流をとまなう流れの水位は、同流量における越流をとまなわない流れの水位よりも小さくなる。図9の実線は満杯流量の2割に相当する過剰流量が与えられた場合の越流による水位通減量を示している。

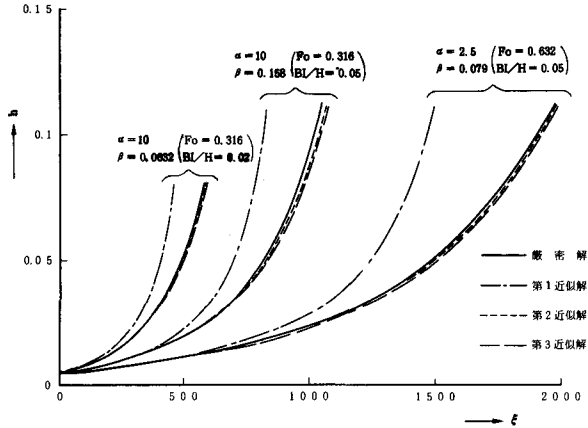


図7 各近似解の近似度

(すなわち、19式から求まる h_1 と $\varphi = \text{const.}$ とした抵抗則から得られる無次元越流水深との差。) また同図の破線は無次元越流水深を示している。これから F_0 (フルード数) の小さいほど、また B_1/H_0 の小さいほど水位遞減効果の大きいことがわかる。したがって緩流部になるほど相対的に安全であると言える。逆に扇状地性の河川においては越水に対する安全度が低いこととなる。

5. 幅が変化する河道の最大越流水深

以上の解析結果を実際の河道にあてはめた場合にどの程度の越流水深になるかを調べるために、右図に示す幅の変化する河道での最大越流水深を具体的に計算してみた。水面形状はケース1、ケース2の2種類が考えられる。ケース1では上流側で図1の〔Ⅱ〕の状態、下流側で〔Ⅰ〕の状態となる。断面変化部で水位が不連続となるが、これは急縮部の局所的な水面降下である。ケース2では上流側で〔Ⅱ〕の状態が生ずるが、急縮部での水面降下が大きく下流側では越水が生じない。(すなわち河道疎通能力の小さい区間では越水せず、むしろ大きい区間で越水するのである。)

ケース1:

水位の連続条件は、 $\Delta H_1 + \Delta H_1 = \Delta H_2$ 。これから、

$$h_1 + \Delta h = h_2 \quad \dots\dots\dots (20)$$

ただし、 $h_1 = \Delta H_1/H_0$ 、 $\Delta h = \Delta H/H_0$ 、 $h_2 = \Delta H_2/H_0$ である。次に流量の連続条件は、 $Q = Q_{02} + \Delta Q_2 = Q_{01} + \Delta Q_1$ と表わされる。ここに Q_{02} は上流河道の疎通能力、 ΔQ_2 は不連続断面の直上流側の過剰流量、 Q_{01} は下流河道の疎通能力、 ΔQ_1 は不連続断面の直下流側の過剰流量である。これから、

$$1 + \Delta Q_2/Q_{02} = (Q_{01}/Q_{02})(1 + \Delta Q_1/Q_{01})$$

無次元表示記号を使うと

$$1 + q_2 = (1 - b)(1 + q_1) \quad \dots\dots\dots (21)$$

ただし、 $b = \text{河道幅縮小率} = (B_2 - B_1)/B_2$ 。さらに19式の水・流量条件が上下流についてあり、

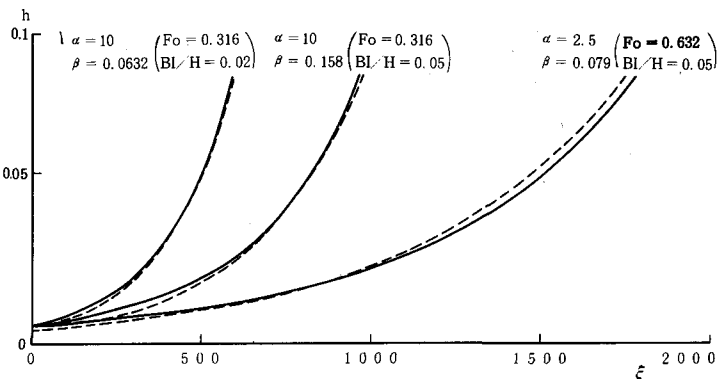


図8 18式の近似度

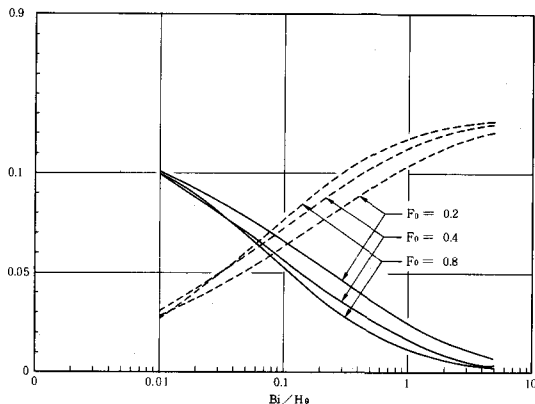


図9 越流による水位遞減効果

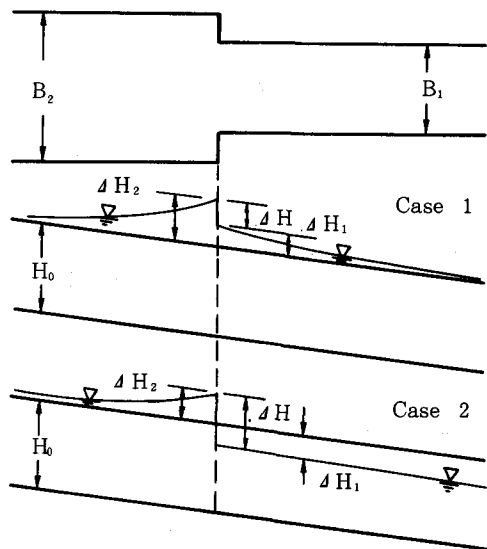


図10 幅員縮小部の越流パターン

$$q_1 = r_1 h_1 + \delta_1 h_1^2 \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$q_2 = r_2 h_2 + \delta_2 h_2^2 \quad \dots\dots\dots (23)$$

以上4式を連立すると次式を得る。

$$\{\delta_1(1-b) - \delta_2\}h_2^2 + \{(r_1 - 2\delta_1 h_1)(1-b) - r_2\}h_2 - (1-b)(r_1 \Delta h - \delta_1 \Delta h^2) - b = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

Δh は縮流部の運動量式から近似的に求まる次式を用いる。

$$\Delta h = F_0^2 b / (1 - F_0^2) \quad \dots\dots\dots (25)$$

ケース2：

同様の取り扱いにより次の4本の無次元式を得る。

$$h_2 = \Delta h + h_1 \quad (\text{水位連続条件}) \quad \dots (26)$$

$$q_2 = r_2 h_2 + \delta_2 h_2^2 \quad (\text{上流の水位・流量関係}) \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$h_1 = \frac{2}{3} q_1 \quad (\text{下流等流条件}) \quad \dots (28)$$

$$1 + q_2 = (1-b)(1 + q_1) \quad (\text{流量連続条件}) \quad \dots\dots\dots (29)$$

以上4式から次式を得る。

$$\delta_2 h_2^2 + \{r_2 - \frac{3}{2}(1-b)\}h_2 + \frac{3}{2}(1-b)\Delta h + b = 0 \quad \dots\dots\dots (30)$$

ただし、 $h_1 > 0$ の時には24式の解を、 $h_1 < 0$ の時には30式の解を用いる。

さて、24及び30式中の r 、 δ は(10式)に示されたように $\alpha = 1/F_0^2$ と $\beta = (1/F_0 C) \cdot Bi/H_0$ の関数である。したがって河道満杯流量時のフルード数 F_0 と Bi/H_0 及び堤防の越流係数 C を知る必要がある。そこで全国主要河川粗度資料集より、一級河川の主要断面形（主に流量基準点）と計画高水位を調査し、 F_0 と Bi/H_0 の頻度分布を得た。この結果を図10、11に示す。それぞれの値を用いて24及び30式から得られた越流水深頻度分布の計算例を図12に示す。この計算では越流係数 $C = 0.8$ 、縮流率 $b = 0.2$ としている。これから越流水深はせいぜい50cmであることがわかる。

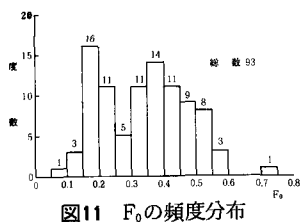


図11 F_0 の頻度分布

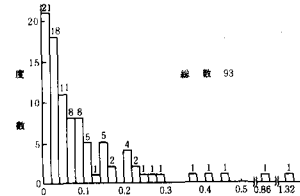


図12 Bi/H の頻度分布

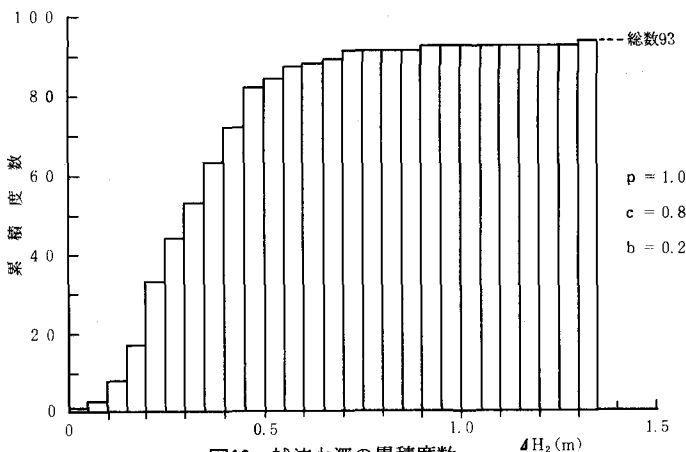


図13 越流水深の累積度数

6. おわりに

本報では越流をとまなう流れの水面形を一次元漸変流的に解析した。その結果、越流をとまなう流れの水位は越流をとまなわない流れの水位に対して低いこと、またその水位差は緩流河川ほど大きいことがわかった。河道幅が急激に2割も縮小するような河道においても越流水深はせいぜい50cm程度と見積られた。しかし局所的な越流要因はまだ考慮されていないので、今後この点を詰める必要があると思われる。

参考文献 (1)須賀、石川、葛西 第25回水講 (2)例えば、吉野、中島、斉藤 第36回年講