

ドライ・ベッド上のダム破壊流れの数値解析 Numerical Analysis of Dam-break Flows on Dry Bed

秋田大学 土木工学科 正 員 松 富 英 夫

1. まえがき

近年のように高度に土地利用が進んでくると河川堤防、溜池やダムの破壊による氾濫域の予測は重要かつ緊要な問題である。そして、その予測法として数値解析法が考えられるが、この場合には流れの場の後端条件と先端条件の与え方が重要な問題となってくる。特に、ドライ・ベッド上への氾濫の場合には流れ先端が数学的特異点となるため、また複雑な流況を呈するため、いまだに数学的・物理的にすっきりした形の先端条件が確立されておらず、その決定の良し悪しは氾濫域の推定に大きな影響を与え非常に難しい問題である。

そこで、本研究は最も単純な条件下のドライ・ベッド上のダム破壊流れを想定して、著者の提案する先端条件を用いてその数値解析を行い、実験結果との比較・検討によりその計算法の妥当性を調べようとするものである。合わせて、従来より提案されている主な先端条件^{1), 2), 3), 4)}を用いて同様な数値解析を行い、これ等の結果との比較・検討も行う。

2. 実験装置と方法

実験は図-1に示す幅0.8 m、深さ0.5 m、長さ7.5 mの両面ガラス張りの鋼製矩形水路を用いて行った。貯水槽はその水路の一端に設けられ、長さ L_0 は1.5 mで水路底は常に水平である。この底面には棧粗度を設置するなどの細工は一切していない。ゲート機構は手動の引き揚げ式である。ゲート下流での水路底勾配条件は水平の場合と一般的な登り斜面の場合の2通りを行い、両方とも水路横断方向に角柱の木製棧粗度(5×5×300 mm)を設置した。

ダム破壊はゲートを瞬間的に引き揚げることにより模擬し、流れを発生させた。測定諸量は抵抗線式波高計によるゲート下流での水位の時間変化、2台のビデオ・システムによる流れ先端の軌跡、先端部の空間波形と貯水槽後端での時間的水位変化である。

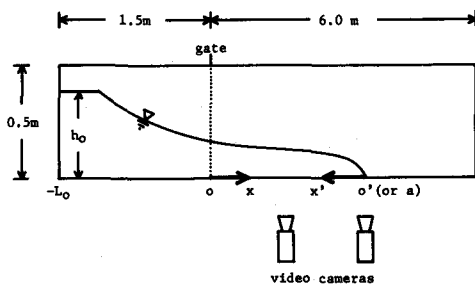


Fig. 1 Experimental apparatus

3. 計算初期条件と境界条件

(1) 初期条件

本研究および従来より提案されている先端条件を用いて数値解析を行うため、初期条件としてダム破壊後の非常に短い間はRitterの解⁵⁾が近似的に成立するとして次式で与えることにする。後に、種々の先端条件を用いた数値解析結果の比較を行うが初期条件と後端条件は全て同じ条件を用いている。

$$u = \frac{2}{3} \left(\sqrt{gh_0} + \frac{x}{t} \right) \dots\dots\dots (1)$$

$$h = \frac{1}{9g} \left(2\sqrt{gh_0} - \frac{x}{t} \right)^2 \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 u ：水粒子速度、 h_0 ：初期貯水槽水深、 h ：局所水深、 x ：ゲート位置を原点として下流に向かって正とした距離座標、 t ：時間、 g ：重力加速度。

(2) 先端条件

密な棧粗度を有する底条件に対して、著者はダム破壊に関するWhitham理論⁶⁾を基本に次式に示すドライ・

ベッド上の流れの先端条件を提案した。⁷⁾

$$x' = \frac{gh}{\ddot{a} + ig} - fg \left(\frac{\dot{a}}{\ddot{a} + ig} \right)^2 \ln \left(1 + \frac{\ddot{a} + ig}{f\ddot{a}^2} h \right) \dots \dots \dots (3)$$

$$f = \left[150 \log_{10} \left(\frac{s}{k} \right) - 1.91 + \{ 5.75 + 0.12 \left(\frac{s}{k} \right)^{0.8} \} \log_{10} \left(\frac{4}{9} \frac{h_0}{k} \right) \right]^{-2} \dots \dots \dots (4)$$

$$h_0 = \frac{H_\xi}{4} (Fr_\xi + 2.0)^2 \dots \dots \dots (5)$$

ここで、 x' ：流れ先端からの距離、 h ： x 点での水深、 a ：流れ先端のゲートからの距離、 $\dot{a}$ ：流れ先端の移動速度、 $\ddot{a}$ ：流れ先端の加速度、 i ：底勾配、 f ：Whithamの抵抗係数、 s ：棧間隔、 k ：棧高、 H_ξ ：Whithamの境界層終端での水深、 Fr_ξ ：そこでのFroude数である。

しかし、これには不備な点があった。たとえば、この条件の適用範囲を機械的に先端部の $O(\Delta x)$ としていたことや流れ先端部の抵抗則がWhitham理論に完全に依存していたことなどである。ここで、 Δx は数値計算における空間差分間隔である。

よって、以下の考察によりその先端条件の改良を試みる。

ドライ・ベッド上の急変不定流の運動方程式は一般に次式で示されよう。ここでの f はWhithamの f と同じ定義である。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = -ig - f \frac{u^2}{h} \dots \dots \dots (6)$$

この流れにおいて、次式の運動方程式で支配される領域をWhithamにならって本研究の境界層と呼ぶことにする。これはWhithamの境界層とはほぼ同じものである。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = -ig - f \frac{u^2}{h} \dots \dots \dots (7)$$

よって、本研究あるいはWhithamの境界層は次の性質をもつと言える。

$$O\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right), O\left(g \frac{\partial h}{\partial x}\right), O(ig), O\left(f \frac{u^2}{h}\right) \gg O\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) \dots \dots \dots (8)$$

そこで、次の量を導入し、(6)式の各項の任意時刻・任意点での大きさを近似的に評価してみる；

L ：任意時刻の流れ先端から任意点までの距離、

H ：その時、その点での水深、

U_0 ：その時の $H/L=1$ での水粒子速度。

任意時刻・任意点での水粒子速度 U と水量の時間微分演算子 $\frac{\partial}{\partial t}$ は物理的考察に基づき近似的に次式と置けよう。

$$U \sim \frac{H}{L} U_0 \dots \dots \dots (9) \quad \frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{U}{H} \sim \frac{U_0}{L} \dots \dots \dots (10)$$

この時、(6)式の各項の大きさは、

$$\left. \begin{aligned} O\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) &\sim \frac{H}{L^2} U_0^2 \\ O\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right) &\sim \frac{H^2}{L^3} U_0^2 \\ O\left(g \frac{\partial h}{\partial x}\right) &\sim g \frac{H}{L} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

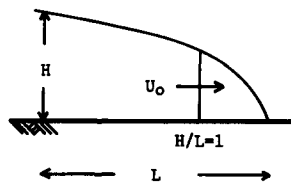


Fig. 2 Definition sketch of hydraulic quantities near the front

$$\left. \begin{aligned} O(ig) &\sim ig \\ O\left(f \frac{u^2}{h}\right) &\sim f \frac{H}{E} U_0^2 \end{aligned} \right\}$$

故に、流れ先端部の任意点での各項の相対的な比は

$$\left. \begin{aligned} O\left(\frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial t}}\right) &\sim \frac{H}{L}, & O\left(\frac{g \frac{\partial h}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial t}}\right) &\sim \frac{L}{H} \cdot \frac{gH}{U_0^2} \\ O\left(\frac{ig}{u \frac{\partial u}{\partial x}}\right) &\sim i \left(\frac{L}{H}\right)^3 \cdot \frac{gH}{U_0^2}, & O\left(\frac{f \frac{u^2}{h}}{u \frac{\partial u}{\partial x}}\right) &\sim f \frac{L}{H} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

これを本研究の境界層と特定すると、

$$\left. \begin{aligned} O\left(\frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial t}}\right) &\sim \frac{H}{L} \ll 1, & O\left(\frac{g \frac{\partial h}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial t}}\right) &\sim \frac{L}{H} \cdot \frac{gH}{U_0^2} \\ O\left(\frac{ig}{u \frac{\partial u}{\partial x}}\right) &\sim i \left(\frac{L}{H}\right)^3 \cdot \frac{gH}{U_0^2} \gg 1, & O\left(\frac{f \frac{u^2}{h}}{u \frac{\partial u}{\partial x}}\right) &\sim f \frac{L}{H} \gg 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ところで、本研究の境界層は(11)式の条件を満足すれば任意性がある。よって、本研究の境界層終端点は $O\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \sim O\left(g \frac{\partial h}{\partial x}\right)$ の点であると定義する。これは結果的に $O\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \sim O\left(g \frac{\partial h}{\partial x}\right) \sim O\left(f \frac{u^2}{h}\right)$ と仮定したことになる。故に、境界層終端点と特定すると(13)式は、

$$\left. \begin{aligned} O\left(\frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial t}}\right) &\sim \frac{H_\xi}{L_\xi} \ll 1 \\ O\left(\frac{g \frac{\partial h}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial t}}\right) &\sim \frac{L_\xi}{H_\xi} \cdot \frac{gH_\xi}{U_0^2} \doteq \frac{L_\xi}{H_\xi} \cdot \frac{gH_\xi}{U_\xi^2} \sim O(1) \\ O\left(\frac{ig}{u \frac{\partial u}{\partial x}}\right) &\sim i \left(\frac{L_\xi}{H_\xi}\right)^3 \cdot \frac{gH_\xi}{U_0^2} \doteq i \left(\frac{L_\xi}{H_\xi}\right)^3 \cdot \frac{gH_\xi}{U_\xi^2} \sim i \left(\frac{L_\xi}{H_\xi}\right)^2 \gg 1 \\ O\left(\frac{f \frac{u^2}{h}}{u \frac{\partial u}{\partial x}}\right) &\sim f \frac{L_\xi}{H_\xi} \gg 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここで、添字 ξ は本研究またはWhithamの境界層終端を意味する。(14)式において $U_0 \doteq U_\xi$ の関係を用いているが、これは(6)式から(7)式に移る時の条件から得られるものである。

(14)式は本研究の境界層終端点が次のようなところであることを示す。

- i) 流れ先端から境界層終端点までの距離は終端点での水深よりずっと大きく、
- ii) 終端点でのFroude数は $O(\sqrt{L_\xi/H_\xi}) > 1$ で、
- iii) 重力の効果は $i \gg (H_\xi/L_\xi)^2$ でないと重要でなく、
- iv) $f \gg H_\xi/L_\xi$ でないと摩擦項も重要でない。

iii)とiv)は外部条件に関する情報であり、 i と f は結果的には流れの水量に影響するが流れそのものの水量に関するものではない。よって、本研究ではi)とii)の情報に基づいて本研究の境界層終端点をさらに細かく次のように定義する。

$$\frac{L}{H} \doteq \frac{\dot{a}^2}{gH} = Fr^2 \dots\dots\dots (15)$$

この関係はWhithamの境界層終端点でもほぼ成立すべきものである。(15)式を用いれば前述の先端条件の適用範囲に関する著者の方法の欠点は改良される。

次に先端部の抵抗則について言及する。図-3に示すような水位の時間波形と先端の軌跡に関する実験データおよびそれから得られる $\dot{a}$ と $\ddot{a}$ を用いて、(15)式を満足する水量を決定し、その水量を(8)式に代入して先端部の抵抗係数の評価を行ってみた。そして、その時の H を $\frac{4}{9}h_0$ として整理したものが図-4の黒丸印である。同図中にはWhitham理論と先端の軌跡に関する実験データのみより評価したものと、

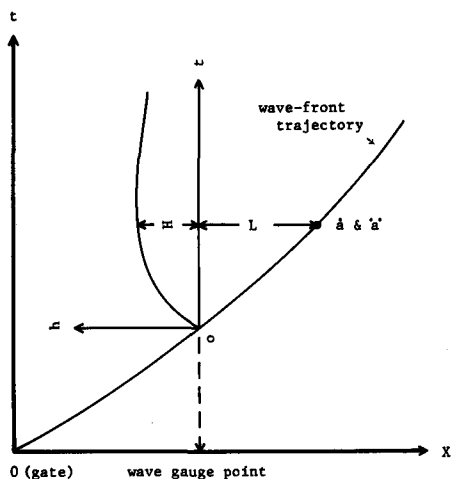


Fig. 3 Evaluation method of friction factor in the tip region of flows

その近似式(4)も示されている。黒丸印のバラツキが激しいが、これは f の評価に際して先端軌跡に関する実験データーから得られる $\dot{a}$ と $\ddot{a}$ を用いているためで、得られる $\dot{a}$ と $\ddot{a}$ が非常にバラツキためである。ここで、近似式(4)の $\frac{4}{9}h_0$ はダム破壊流れにおけるゲートでの水深であるが、Whithamの境界層終端の水深であるとも言えるものである⁶⁾。この図によると黒丸印のバラツキは大きく、データーの数も少ないので明言はできないが、本研究の方法による先端部の抵抗係数評価結果はほぼWhitham理論による評価と一致しているとみなせる。故に、(4)式は本研究もしくはWhithamの境界層終端水深に関する抵抗則と言える。これで、Whitham理論に依存せずとも種々の底条件に対する先端部の抵抗則は本研究の方法で知ることができ、著者の方法の欠点が改良されることになる。よって、密な棧粗度の底条件に対する改良後の先端条件は(15)式を満足する H とその時の $\dot{a}$ 、 $\ddot{a}$ を用いて次式となる。

$$x' = \frac{gH}{\dot{a} + ig} - fg \left(\frac{\ddot{a}}{\dot{a} + ig} \right)^2 \ln \left(1 + \frac{\ddot{a} + ig}{f\dot{a}^2} H \right) \dots\dots\dots (16)$$

$$f = \left(1.50 \log_{10} \left(\frac{s}{k} \right) - 1.91 + \{ 5.75 + 0.12 \left(\frac{s}{k} \right)^{0.8} \} \log_{10} \left(\frac{H}{k} \right) \right)^{-2} \dots\dots\dots (17)$$

本研究の数値解析では(16)と(17)式先端条件を用いて計算を行った。

(3) 後端条件

ダム破壊が起った後、波後端が後壁に達するまでの後端条件は

$$u=0, c=\sqrt{gh_0} \text{ on } x=-\sqrt{gh_0} \cdot t \text{ for } t \leq \frac{L_0}{\sqrt{gh_0}} \dots\dots\dots (18)$$

その後は鉛直壁後端の場合でも厳密な後端条件を与えることは難しい。Fig. 5 Boundary condition 近似計算手法としてはBOX Schemeを用いることなども考えられる。本研究では3通りの近似後端条件を考え、実験結果との比較・検討によりその取捨選択を行った。

1つは図-5に示すような直線近似の特性曲線に沿って $u-2c$ が保存されるという次式である。

$$u_i^{n+1}=0, c_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{JM}^n - 2c_{JM}^n) \text{ on } x=-L_0 \text{ for } t > \frac{L_0}{\sqrt{gh_0}} \dots\dots\dots (19)$$

(19)式は後壁での反射の影響を含んでいる。

2つ目は後壁での反射の影響を無視した場合の特性曲線法から得られるもので次式で示されるものである。

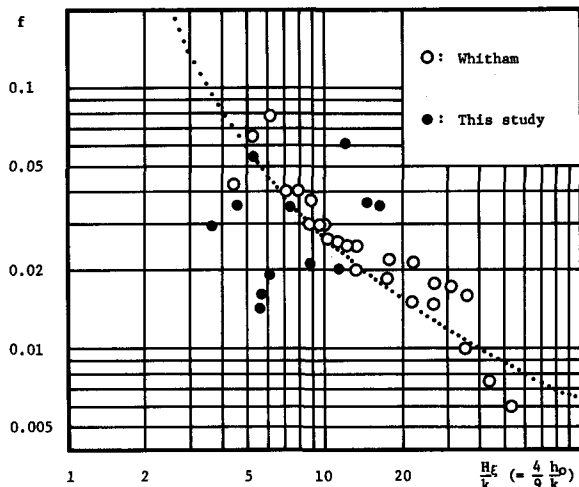


Fig. 4 Friction factor in the tip region ($i = 0, s/k = 10$)

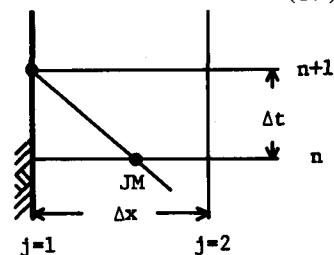


Fig. 5 Boundary condition

$$u=0, c=\frac{1}{3}\sqrt{gh_0} + \frac{2}{3}\frac{L_0}{t}$$

$$\text{on } x=-L_0 \text{ for } t > \frac{L_0}{\sqrt{gh_0}} \dots (20)$$

3つ目は後壁で完全反射が起り、線形的に入射波と反射波を重ね合わせることができるとした場合で次式で示されるものである。

$$u=0, c^2=\frac{2}{9}(2\sqrt{gh_0} + \frac{L_0}{t})^2 - gh_0$$

$$\text{on } x=-L_0 \text{ for } t > \frac{L_0}{\sqrt{gh_0}} \dots (21)$$

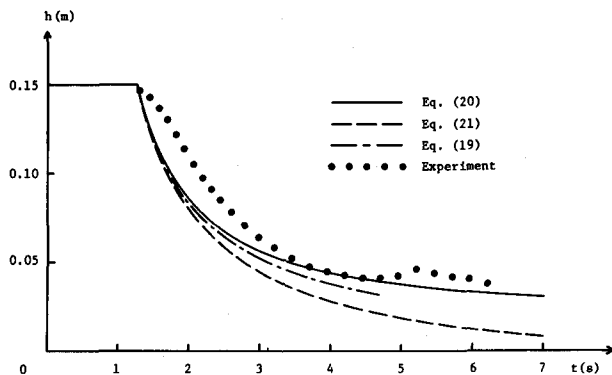


Fig. 6 Depth at the wall $x = -1.5 \text{ m}$
($h_0 = 0.15 \text{ m}$, $i = 0$, $s/k = 10$)

これ等の諸条件と実験結果との比較を図-6に示す。実験値は5回の平均値である。物理的イメージから考えると(19)式が一番よいと思われるが、本研究の目的が流れの計算と実験結果との比較という点から考えて、本研究では後端条件として実験結果に最も適合した(20)式を採用することにした。

物理的イメージから考えると(19)式が一番よいと思われるが、本研究の目的が流れの計算と実験結果との比較という点から考えて、本研究では後端条件として実験結果に最も適合した(20)式を採用することにした。

4. 計算および結果の考察

(1) 基本式

本研究の計算における支配方程式は全て次式の浅水理論である。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = -ig - f_p \frac{u^2}{h} \dots (22)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu) = 0 \dots (23)$$

ここで、 f_p は流れの先端部以外での抵抗係数である。

従来に提案されている先端条件を用いて計算を行うものの中にはこの基本式を保存系の形に直したものもある。著者の方法は特性曲線法と leap-frog 法の両方で行った。両者には顕著な差は見られなかった。以下の図では特性曲線法による結果を示している。計算条件は初期条件を除いて全て実験条件と同じで、全ての計算における差分格子間隔は CFL 条件を満足させて $\Delta x = 0.025 \text{ m}$ 、 $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ とした。

(2) 流れ先端部での仮定

計算結果より本研究の流れ先端部での仮定が妥当かどうかを調べる。図-7は波後端が後壁に達した後にける(22)式の各項の重要性を調べたものである。ただし、時間に関しては前進差分、空間に関しては中央差分を用いて各項を評価した。この図から、流れ先端部では次式の関係があることがわかる。

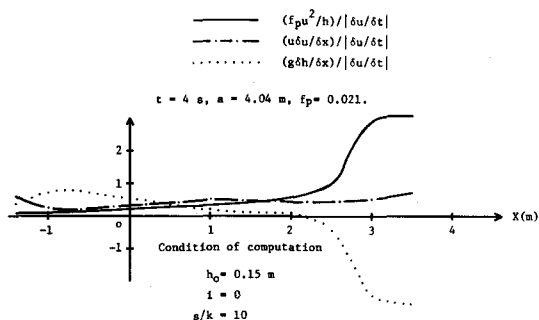


Fig. 7 Relative importance of each term of the equation of motion (22)

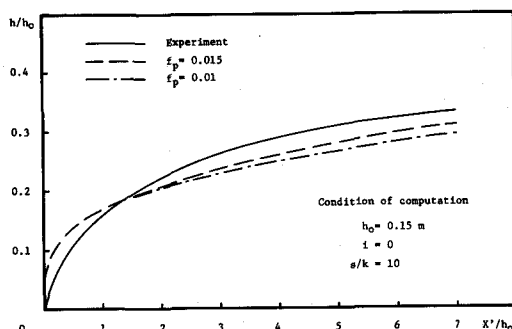


Fig. 8 Wave profile near the front ($a=3.6 \text{ m}$)

$$\left| f_p \frac{u^2}{h} \right| > \left| g \frac{\partial h}{\partial x} \right| > \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| > \left| u \frac{\partial u}{\partial x} \right| \dots\dots\dots (24)$$

すなわち、本研究の仮定あるいはWhithamの仮定はほぼ妥当であると言える。この関係は従来の先端条件を用いた計算結果からも得られた。しかし、流れ先端部では分散項も重要であると思われる。図-8は流れ先端部の空間波形に関する計算と実験結果の比較を示すが、この図からそのことがうかがえる。ただし、実験値は5回の平均値である。図によると、計算結果は実験結果に比べ先端部が急激に立ち上っているが、基本式に分散項が付加されればより実験値に近づくものと思われる。

(3) 先端の軌跡

図-9、図-10に先端の軌跡、空間波形および水粒子速度の空間分布の計算結果例を示す。先端軌跡に関

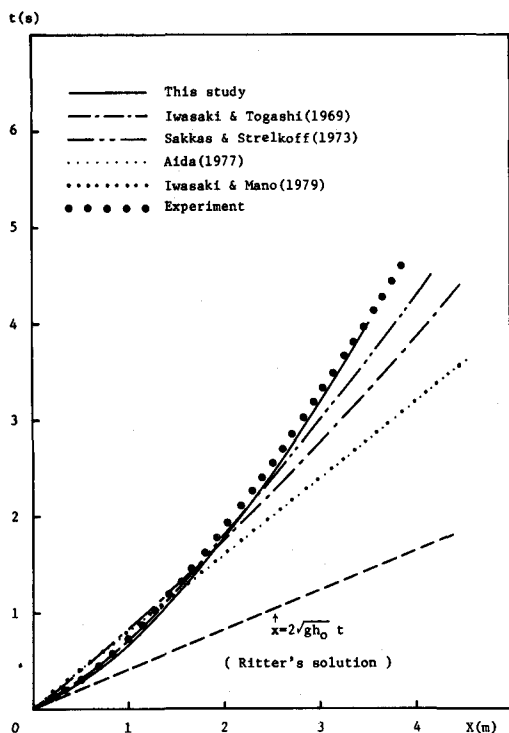


Fig. 9 (A) Wave-front trajectories

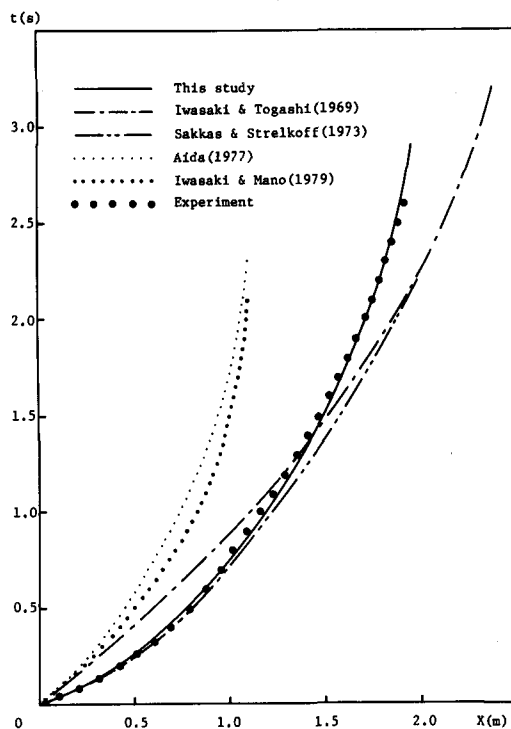


Fig. 10 (A) Wave-front trajectories

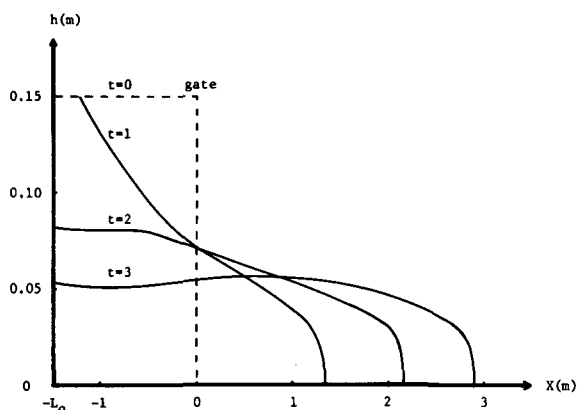


Fig. 9 (B) Wave patterns

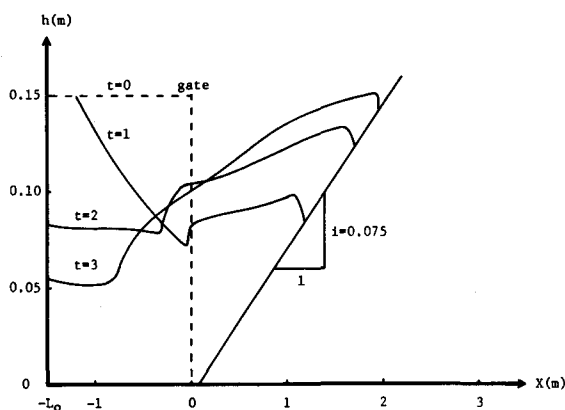
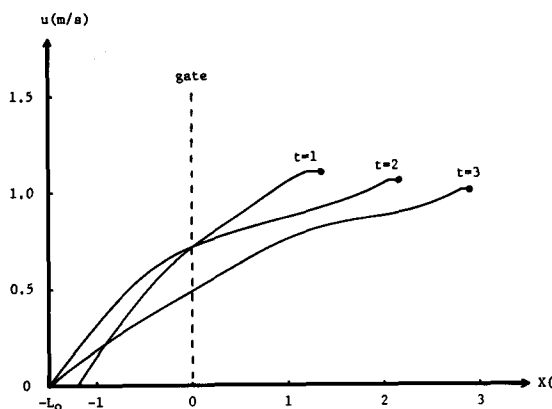
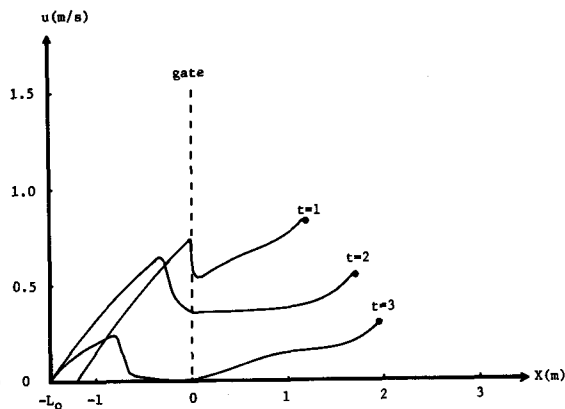


Fig. 10 (B) Wave patterns



(C) Velocity distributions

Fig. 9 Numerical analysis of dam-break flow ($h_0=0.15$ m, $i=0$, $s/k=10$, $f_p=0.01$)



(C) Velocity distributions

Fig. 10 Numerical analysis of dam-break flow ($h_0=0.15$ m, $i=0.075$, $s/k=12.5$, $f_p=0.01$)

しては他の先端条件を用いた場合の計算結果と実験結果も併記してある。実験結果は各5回の平均である。図-9は水平底に対するものである。この場合、先端の軌跡に関しては相田と岩崎・真野の方法は全く一致し、抵抗係数 f_p 等に関係せず差分格子間隔のみによって決まるという不合理を生ずる。従来のその他の方法では直進性が非常に強く流れの全時間にわたっては適用できない。また、この時の先端部の空間波形の実験値との比較を図-8に示す。一致度は比較的良好である。図-10は水路底勾配 $i=0.075$ に対するものである。この場合、相田と岩崎・真野の方法はほぼ同じ遡上高を示す。しかし、実験結果に比べてかなり小さい遡上高しか示さない。また、両者とも抵抗係数 $f_p=0$ として計算しても顕著な遡上増加は見られなかった。従来のその他の方法ではやはり直進性が強く流れの全時間にわたっては適用できそうにない。

Sakkas等の方法は先端部での水粒子速度は時間的にも場所的にも変化しないという物理的イメージに立つものである。先端の移動速度は先端の水粒子速度であるから、これでは先端移動速度の減少してゆく流れに対しては氾濫域を過剰に評価せざるを得まい。事実、計算結果はそういう結果を示している。図-10(B)と(C)において跳水が生じているように見えるが生じていない。実験においても跳水は生じなかった。これは反射波によるものであるが、この反射波は本研究の計算範囲内では後壁に到達していない。

(4) 抵抗係数 f の時間変化

本研究の方法とそれにおける抵抗係数 f を一定($f=0.021$)にした場合の計算結果の比較を図-11に示す。本研究の方法によれば、先端移動の速度が小さくなるにつれて抵抗係数 f は時間的に大きくなってゆく。よって、 f を一定にした場合に比べ氾濫域は狭くなり、より実際と一致してくる。図-11はそのことを示し

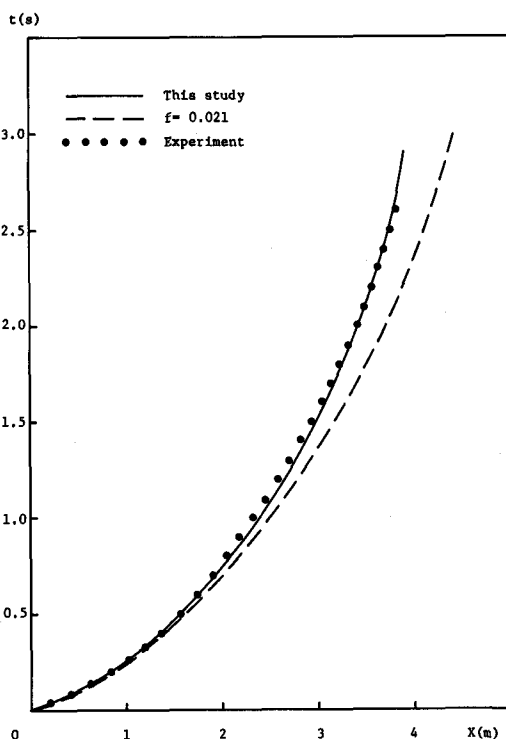


Fig. 11 Influence of friction factor upon the wave-front trajectory ($h_0=0.15$ m, $i=0.075$, $s/k=12.5$, $f_p=0.01$)

ている。本研究の抵抗係数評価法を用いることによって時間的な抵抗係数の増大を実験結果からも見ることができた。しかし、データ数が少ないので抵抗係数の増加に関しては明言をさしておく。

5. むすび

ドライ・ベッド上の流れの先端条件を提案し、ダム破壊流れの数値解析を行った。併せて、従来より提案されている先端条件を用いた計算も行った。そして、それ等と実験結果との比較・検討を行い本研究の方法の妥当性を調べた。以下、主要な結論を箇条書きにする。i) 流れ先端部での本研究あるいはWhithamの仮定は数値計算の先端条件を求めるための仮定としては妥当である。ii) 流れ先端の軌跡に着目すると、従来より提案されている諸先端条件では時間の経過とともに実験結果との差は大きくなる。iii) Whitham理論によらずとも、種々の底条件に対する先端部の抵抗則は(15)と(16)式より図-3に示す方法で知ることができる。これはWhitham理論によるものよりも一般性のある方法である。

謝 辞

本研究を遂行するにあたり、東北大学首藤伸夫教授と秋田大学浅田宏教授より有益なる御教示と助言を賜わった。また、実験を行うに際して本学卒研究生山根好行君と佐藤隆君の助力を得た。ここに記して両先生ならびに両君に深甚なる感謝の意を表する。

参考文献

- 1) 岩崎敏夫・富樫宏由：遡上津波先端の境界条件と計算法、第16回海講演集 pp.359～364, 1969.
- 2) Sakkas, J. G. and T. Strelkoff: Dam-Break Flood in a Prismatic Dry Channel, Proceedings of ASCE, Vol. 99, No. HY12, pp. 2195～2216, 1973.
- 3) 相田勇：陸上に溢れる津波の数値実験—高知県須崎および宇佐の場合—, 地震研究所彙報, Vol. 52, pp. 441～460, 1977.
- 4) 岩崎敏夫・真野明：オイラー座標による二次元津波遡上の数値計算、第26回海講論文集、pp. 70～74, 1979.
- 5) Ritter, A. Die Fortpflanzung der Wasserwellen, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure (Berlin), Vol. 36, pt. 2, No. 33, pp. 947～954, 1892.
- 6) Whitham, G. B.: The effects of hydraulic resistance in the dam-break problem, Proceedings of Royal Society of London, series A, Vol. 227, pp. 399～407, 1955.
- 7) 松富英夫：陸上遡上津波の先端条件と先端部の抵抗係数、第28回海講論文集、pp. 74～78, 1981.