

開水路における波動の分散性

Dispersion Relationship for Wave in Open Channel

京都大学大学院 学生員 細 田 尚
京都大学工学部 正 員 岩 佐 義 朗

1. 序 論

本研究は、一次元流れの波動に関して、鉛直加速度を考慮したときと、しないときの違いに着目して、その基本的特性を考察し、同様の考え方により、平面二次元流れを対象として、その波動現象を取り扱った。二次元の波動を考察するにあたって、鉛直加速度を考慮した、平面二次元流れの基礎式を誘導した。

2. 鉛直加速度を考慮しないときの一次元流れ

基礎式は、一様水路を考えて、質量保存則、運動量保存則より次式となる¹⁾

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta u \frac{\partial u}{\partial x} + g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} = g \left(\sin \theta - \frac{\tau_b}{\rho h} \right) \quad (2)$$

ここに、 x ；流下方向の座標、 t ；時間、 h ；水深、 u ；断面平均流速、 θ ；水路床こう配、 τ_b ；底面せん断応力、 β ；運動量補正係数である。 $\beta \doteq 1$ とし、便宜上、 $i_f = \tau_b / \rho h$ とおいて、行列表示すると、次式となる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + B = 0 \quad (3)$$

$$\text{ここに、} U = \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} u & h \\ g \cos \theta & u \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ g(-\sin \theta + i_f) \end{pmatrix}$$

である。(3)式の分散関係は、Dressler-Pole²⁾、Iwasa³⁾によって取り扱われた。

分散関係は、 $U = U_0 + U' \exp i(kx - \omega t)$ とおいて、

$$\det(-i\omega I + ikA_0 + \nabla_u B_0) = 0 \quad (4)$$

で表わされる。ここに、添字 0 は、一様状態を表わし、 ω ；角周波数、 k ；波数、 I ；単位行列、 $\nabla_u = (\partial/\partial h, \partial/\partial u)$ である。 $\omega = \omega_r + i\omega_i$ とおいたとき、 $\omega_i > 0$ であれば、微小擾乱は不安定であり、その条件として、Vedernikov数(Ve)が導入され、不安定条件として

$$Ve = \frac{-h_0 \frac{\partial i_f / \partial h_0}{\partial i_f / \partial v_0}}{\sqrt{gh_0 \cos \theta}} > 1 \quad (5)$$

が得られた。岩垣・岩佐⁴⁾によって、(5)式は、roll waveの維持条件であること、井上⁵⁾によって、 Ve は u_0 で動く座標系でのkinematic waveとdynamic waveの波速の比であることが指摘された。

また、よく知られているように、(1)、(2)式の右边が無視できるとき、分散関係より、位相速度 $c = \omega/k$ 、群速度 $c_g = \partial\omega/\partial k$ は

$$c = u_0 \pm \sqrt{gh_0 \cos \theta} \quad (6-a)$$

$$c_g = u_0 \pm \sqrt{gh_0 \cos \theta} \quad (6-b)$$

となる。また、(6-a)式より、水平路床上の静水の水面振動数

$$\omega_r \sqrt{\frac{h_0}{g}} = h_0 k \quad (6-c)$$

が得られる。

3. 鉛直加速度を考慮したときの一次元流れ

鉛直加速度を考慮した一次元流れの基礎式は、古くは Boussinesq によって導かれたが⁶⁾、ここでは、Iwasa⁷⁾ が導いた式を用いる。質量保存則は(1)式、運動量保存則は次式で表わせる。

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + g \frac{\partial M}{\partial x} = gh \sin \theta - \frac{\tau_b}{\rho} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} gM = hu^2 + \frac{gh^2 \cos \theta}{2} + \frac{1}{3} h^2 u^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{2}{3} h^2 u \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \\ + \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{3} hu^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

(1)式と(7)式より、 $u = u_0 + u'$ 、 $h = h_0 + \eta$ において線形化すると、 η に関する次のような線形化方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} h_0^2 u_0^2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \frac{2}{3} h_0^2 u_0 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^3 \partial t} + \frac{1}{3} h_0^2 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - 2u_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial t} - (u_0^2 - gh_0 \cos \theta) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ + (gh_0 \frac{\partial i_f}{\partial h} - gu_0 \frac{\partial i_f}{\partial u}) \frac{\partial \eta}{\partial x} - g \frac{\partial i_f}{\partial u} \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$\eta = \eta_0 \exp i(kx - \omega t)$ において、(9)式に代入すれば、分散関係として次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} h_0^2 u_0^2 k^4 - \frac{2}{3} h_0^2 u_0 k^3 \omega + \frac{1}{3} h_0^2 k^2 \omega^2 + \omega^2 - 2u_0 k \omega + (u_0^2 - gh_0 \cos \theta) k^2 \\ + (gh_0 \frac{\partial i_f}{\partial h} - gu_0 \frac{\partial i_f}{\partial u}) ik + g \frac{\partial i_f}{\partial u} i \omega = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$\omega = \omega_r + i\omega_i$ において、不安定限界を求めれば

$$Ve > \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}(h_0 k)^2}} \quad (11)$$

となり、Fig-1 に示すように、高波数ほど小さい Vedernikov 数で不安定になることがわかる。

次に、2節と同様に、(7)式の右边が無視できるときを考察し、鉛直加速度の効果を検討する。

(7)式の右边を無視できるとき、分散関係は、

$$\omega_r = u_0 k \pm \frac{\sqrt{gh_0 \cos \theta}}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}(h_0 k)^2}} k \quad (12-b)$$

$$\omega_i = 0 \quad (12-b)$$

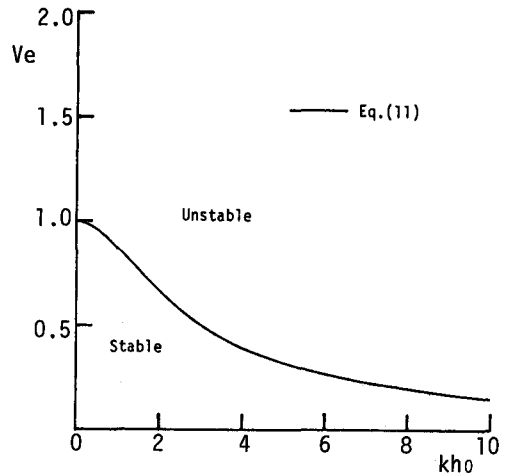


Fig-1 Cricerion for Inscability

となる。(12)式より、位相速度 $c = \omega_r/k$ は

$$c = u_0 \pm \frac{\sqrt{gh_0 \cos \theta}}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}(h_0^2 k^2)}} \quad (13)$$

となり、群速度 $c_g = \partial \omega_r / \partial k$ は

$$c_g = u_0 \pm \frac{\sqrt{gh_0 \cos \theta}}{(1 + \frac{(h_0 k)^2}{3})^{3/2}} \quad (14)$$

となる。(13), (14) 式は, $k \rightarrow 0$ のとき, (6-a), (6-b) 式に一致する。

微小振幅波理論と比較するために、水平路床で静水のときの(13), (14)式より, $c/\sqrt{gh_0}$, c/c_g を示したのが Fig-2, Fig-3 であり, (13), (14) 式で表わせる波は、流れ方向の流速が、水深方向に一樣としている点で、微小振幅波理論の長波に対応しているが、非回転でなく、この意味で、長波のより厳密なものと考えることができる。

また、(13)式より、水平路床の静水の水面振動数は、

$$\omega \sqrt{\frac{h_0}{g}} = \frac{kh_0}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}(kh_0)^2}} \quad (15)$$

となる。(15)式を、(6-c) 式とともに示したのが、Fig-4 であり、鉛直加速度を考慮すると、高波数になるとともに、一定値に漸近する。

4. 鉛直加速度を考慮した平面二次元流れの基礎式

簡単のために水平な路床を考え、その上に x , y 軸をとる、鉛直上方に z 軸をとる。 x , y 方向の流速を、それぞれ

$$u = U \cdot f\left(\frac{z}{h}\right), \quad v = V \cdot f\left(\frac{z}{h}\right) \quad (16)$$

と仮定する。ここに、 U, V ; u, v を水深全体にわたって平均した流速。

連続式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

に、 $\int_z^h \cdot dz$ の積分を行なうことで

$$w = F(n) \frac{\partial h}{\partial t} + nf(n) \left(U \frac{\partial h}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial y} \right) \quad (18)$$

を得る。ここに、 $n = z/h$, $F(n) = 1 - \int_n^1 f(n) dn$ 。

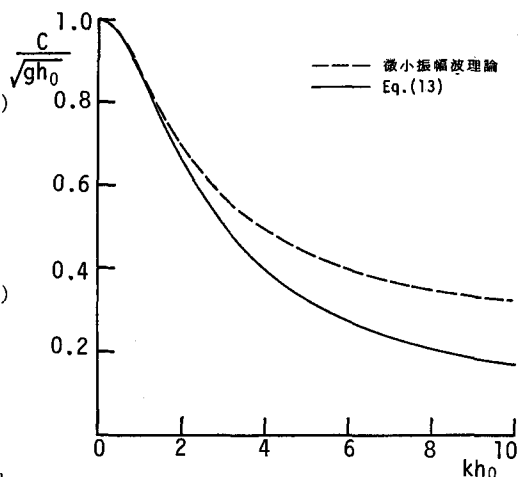


Fig-2 Phase-Velocity

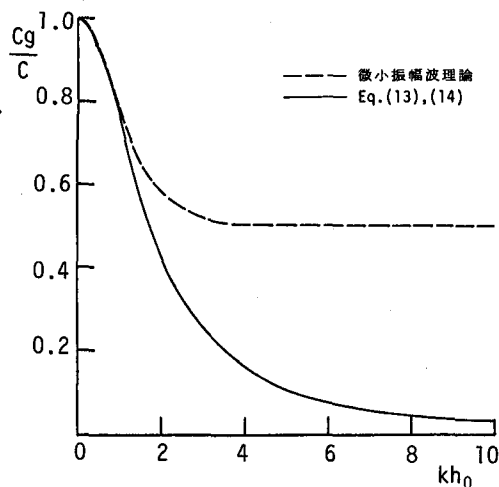


Fig-3 Group-Velocity

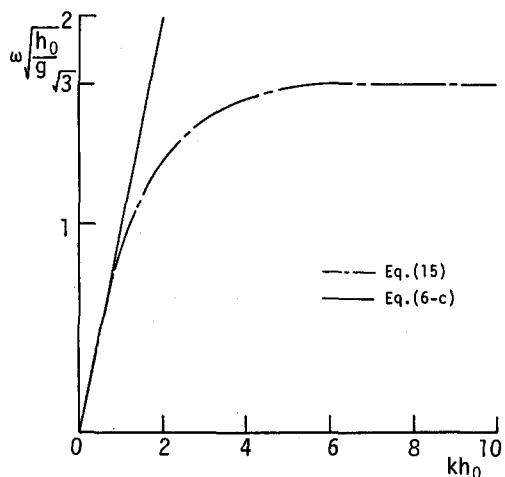


Fig-4 Frequency of Free Surface

(16), (18) 式を鉛直方向の運動方程式

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (19)$$

に代入し, $\int_z^h \cdot dz$ の積分を行なうことで, 次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} = & g(h-z) + U \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} \int_n^1 (-fm - f'm^2 + Ff + Ff'm) dm \\ & + hU^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \int_n^1 f^2 m dm + hU \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} \int_n^1 (fm + fF) dm \\ & + V \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial y} \int_n^1 (-fm - f'm^2 + f'Fm + fF) dm + V^2 h \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \int_n^1 f^2 m dm \\ & + hV \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial t} \int_n^1 (fm + fF) dm + \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2 \int_n^1 (-fm + fF) dm + h \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \int_n^1 F dm \\ & + h \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} \int_n^1 f m dm + h \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial y} \int_n^1 f m dm + hU \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \int_n^1 f^2 m dm \\ & + hU \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} \int_n^1 f^2 m dm + hV \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \int_n^1 f^2 m dm + hV \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \int_n^1 f^2 m dm \\ & + 2UVh \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \int_n^1 f^2 m dm \end{aligned} \quad (20)$$

ここで, $f(n) = 1$ とすれば, $F(n) = n$ であり, (20) 式より,

$$\begin{aligned} P = h \int_0^1 \frac{p}{\rho} dn = & \frac{gh^2}{2} + \frac{1}{3} h^2 U^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{2}{3} h^2 U \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + \frac{1}{3} h^2 V^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{2}{3} h^2 V \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial t} \\ & + \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{2}{3} UVh^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{3} h^2 U \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \\ & + \frac{1}{3} h^2 U \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{3} h^2 V \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{3} h^2 V \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned} \quad (21)$$

が得られ, これを用いると, x, y 方向の運動量方程式は次式となる。

$$\frac{\partial(hU)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hU^2 + P) + \frac{\partial}{\partial y} (hUV) = -\frac{\tau_{xb}}{\rho} \quad (22)$$

$$\frac{\partial(hV)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hUV) + \frac{\partial}{\partial y} (hV^2 + P) = -\frac{\tau_{yb}}{\rho} \quad (23)$$

5. 平面二次元流れの分散関係

5.1 鉛直加速度を考慮しないとき

基礎式は, (21) 式で, $P = gh^2/2$ となるから

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(Uh)}{\partial x} + \frac{\partial(Vh)}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial(hU)}{\partial t} + \frac{\partial(hU^2)}{\partial x} + \frac{\partial(hUV)}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\tau_{bx}}{\rho} \quad (25)$$

$$\frac{\partial(hV)}{\partial t} + \frac{\partial(hUV)}{\partial x} + \frac{\partial(hV^2)}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{\tau_{by}}{\rho} \quad (26)$$

である。便宜上、 $i_{fx} = \tau_{bx}/\rho gh$, $i_{fy} = \tau_{by}/\rho gh$ とおき、行列表示する。

$$\frac{\partial F}{\partial t} + A_1 \frac{\partial F}{\partial x} + A_2 \frac{\partial F}{\partial y} + B = 0 \quad (27)$$

ここに、

$$F = \begin{pmatrix} h \\ U \\ V \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} U & h & 0 \\ g & U & 0 \\ 0 & 0 & U \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} V & 0 & h \\ 0 & V & 0 \\ g & 0 & V \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ i_{fx} \\ i_{fy} \end{pmatrix} \quad (28)$$

(27)式の特性速度 dx/dt , dy/dt は、次式を満たす⁸⁾

$$\left(\frac{dx}{dt} - U\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - V\right)^2 = gh \quad (29)$$

(25), (26)式の右辺が無視できるときを考えると、 $F = F_0 + F' \exp i(k_x x + k_y y - \omega t)$ で表せる、平面波の分散関係は、

$$\det(-i\omega I + ik_x A_{10} + ik_y A_{20}) = 0 \quad (30)$$

となる。ここに、添字 0 は、一様状態を表わす。(30)式は、

$$\det \begin{pmatrix} i(-\omega + k_x U_0 + k_y V_0), & i k_x h_0, & i k_y h_0 \\ i k_x g, & i(-\omega + k_x U_0 + k_y V_0), & 0 \\ i k_y g, & 0, & i(-\omega + k_x U_0 + k_y V_0) \end{pmatrix} = 0 \quad (30')$$

となり、これより、分散関係

$$\begin{aligned} -\omega_r + k_x U_0 + k_y V_0 &= \pm \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \sqrt{gh_0} \\ -\omega_i &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

が得られ、位相速度 c_x , c_y , c は、

$$c_x = \frac{\omega_r}{k_x} = U_0 + \frac{k_y}{k_x} V_0 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{k_y}{k_x}\right)^2} \sqrt{gh_0} \quad (32-a)$$

$$c_y = \frac{\omega_r}{k_y} = \frac{k_x}{k_y} U_0 + V_0 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{k_x}{k_y}\right)^2} \sqrt{gh_0} \quad (32-b)$$

$$c = \frac{\omega_r}{k} = \frac{k_x U_0 + k_y V_0}{k} \pm \sqrt{gh_0}, \quad (k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}) \quad (32-c)$$

となり、上式の幾何学的意味は、Fig-5 のようになる。

また、群速度 c_{gx} , c_{gy} は、

$$(c_{gx} - U_0)^2 + (c_{gy} - V_0)^2 = gh_0 \quad (33)$$

$$\frac{c_{gy} - V_0}{c_{gx} - U_0} = \frac{k_y}{k_x} \quad (34)$$

である。(33)式は、特性速度の関係式(29)と同じであり、また、(33)、(34)式の関係を図示すると、Fig-6 のようになる。

以上、平面波の特性を述べたが、開水路では、流れ方向をx軸にとり、y軸方向の平均流速を $V_0 = 0$ とし、

$$\begin{aligned} h &= h_0 + \eta' \cos(k_y y) \exp i(k_x x - \omega t) \\ U &= U_0 + u' \cos(k_y y) \exp i(k_x x - \omega t) \\ V &= v' \sin(k_y y) \exp i(k_x x - \omega t) \end{aligned} \quad (35)$$

のような擾乱を考えるのが普通であり、その結果、x方向の位相速度として次式が得られる。

$$c_x = U_0 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{k_y}{k_x}\right)^2} \sqrt{gh_0} \quad (36)$$

5.2 鉛直加速度を考慮したとき

基礎式は4節で求めた。ここでも5.1節と同様に、(25)、(26)式の右边が無視できるときを考え、(35)式で表わされる擾乱を考えると、分散関係として

$$\det \begin{pmatrix} i(-\omega + U_0 k_x) & , & ih_0 k_x & , & h_0 k_y \\ gh_0 k_x - \frac{1}{3} h_0^2 k_x (-\omega + U_0 k_x)^2 & , & h_0 (-\omega + U_0 k_x) & , & 0 \\ -gh_0 k_y + \frac{1}{3} h_0^2 k_y (-\omega + U_0 k_x)^2 & , & 0 & , & ih_0 (-\omega + U_0 k_x) \end{pmatrix} = 0 \quad (37)$$

が得られ、x方向の位相速度は

$$c_x = U_0 \pm \sqrt{gh_0} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{k_y}{k_x}\right)^2}}{\sqrt{1 + \frac{h_0^2}{3} (k_x^2 + k_y^2)}} \quad (38)$$

となる。

(38)式と(36)式を比較したのがFig-7であり、一次元の場合と同様に、鉛直加速度を考慮すると、高波数ほど遅く伝播する。

6. 結 論

以上、鉛直加速度を考慮した場合と、しない場合の基本的特性について検討してきたが、今後、本研究の方法によって、三次元的な河床変動のある流れの解析を行ないたい。

最後に、本研究を行なうにあたって、有益な御助言をいただいた、京都大学助教授、井上和也氏に、心よ

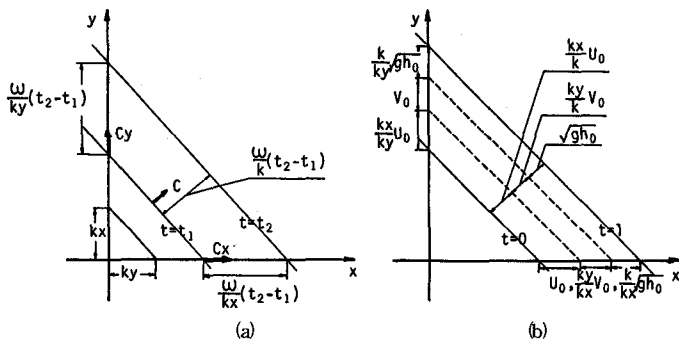


Fig-5 Phase Velocity of Plane Wave

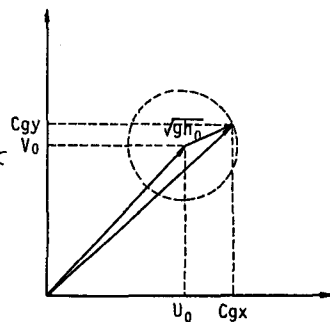


Fig-6 Group Velocity of Plane Wave

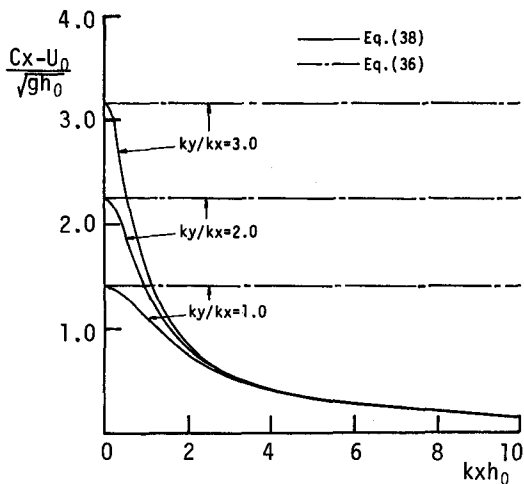


Fig-7 Phase Velocity

りの謝意を表します。

参考文献

- 1) 岩佐義朗；開水路流れのモデリング法，水工学シリーズ 80-A-3，土木学会水理委員会，1980.
- 2) Dressler, R. F. and Pole, F. V. ; Resistance effects on hydraulic instability, Commun. Pure and Appl. Math. 6, 1953
- 3) Iwasa, Y. ; The Criterion for Instability of Steady Uniform Flows in Open Channels, Memoirs of the Fac. Eng., Kyoto University, Vol. 16, No. 4, 1954
- 4) 岩垣雄一，岩佐義朗；転波列の水理学的特性について，土木学会誌 40-1，1955
- 5) 井上和也，岩佐義朗；Kinematic wave と dynamic wave の特性について，第34回土木学会年次学術講演会概要，Ⅱ-61，1979
- 6) Forchheimer, P. ; Hydraulik, Teubner, Leipzig, 1930
- 7) Iwasa, Y. ; Analytical Considerations on Cnoidal and Solitary Waves, Memoirs Faculty of Engineering, Kyoto University, Vol. 17, No.4, 1955
- 8) Courant, R. and Hilbert, D. ; 斎藤利弥監訳，数理解物理学の方法，東京図書，1959-1968