第26回水理講演会論文集　1982年２月

連行マスカーブの解析，分類及びその応用について
Primal-dual Pair of Mass Curves and its Application

ＥＰＤＣインターナショナル（株）　正員　髙　島　康　夫

1. マスカーブの一般式

第ｉ期末（ｉ＝１，２，…，Ｎ）における貯水池流入量及び流出量のResidual Mass Curve（以下ＭＣと略記する）の値　Ａｉ及び　Ｂｉはそれぞれ次式で定義される。

$$A_i = \sum_{t=1}^{i} I_t - iM_I, \qquad B_i = B_\phi + \sum_{t=1}^{i} O_t - iM_o \tag{1}$$

$$M_I = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} I_t, \qquad M_o = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} O_t \tag{2}$$

こゝにＩｔ及びＯｔはそれぞれ第ｔ期中における流入量及び流出量（無効放流その他のロスを含む）を表わす。尚(1)において　ｉ＝φ　のときは　Ａｉ＝φ，Ｂｉ＝Ｂφと定める。即ちＡφ及びＢφは貯水池の操作開始直前における両ＭＣの値（初期値）である。

次に任意の２時点間の平均流入量及び平均流出量は(1)で　ｉ＝ｉ　及び　ｉ＝ｉ＋ｎ　とおいて両者の差をとり　ｎ期間の平均をとることにより次式で表わされる。

$$m_I = \frac{A_{i+n} - A_i}{n} + M_I, \qquad m_o = \frac{B_{i+n} - B_i}{n} + M_o \tag{3}$$

この式よりＭＣの２点間の平均流量はその勾配値に全平均流量を加えたもので表わされることがわかる。

さて第ｉ期末における貯水量をＳｉ，空容量（貯水池満水位から現在水位迄の間の貯水池が空の部分の容量）をＥｉとすれば

$$S_i + E_i = V, \qquad S_\phi + E_\phi = V \tag{4}$$

こゝにＶ　は貯水池の全容量（有効容量）でconstantである。これらの流入量，流出量及び貯水量は次の連続の方程式で結ばれる：

$$S_i = S_{i-1} + I_i - O_i \quad \text{or} \quad S_i = S_\phi + \sum_{t=1}^{i}(I_t - O_t) \tag{5}$$

今(1)のＢｉとＡｉの差をＤｉとし(4)を考慮すれば

$$\begin{aligned} D_i = B_i - A_i &= \sum_{t=1}^{i}(O_t - I_t) + i(M_i - M_o) + B_\phi \\ &= S_\phi + B_\phi - S_i + i(M_i - M_o) \end{aligned} \tag{6}$$

こゝで次の重要な条件を導入しよう：

$$M_i = M_o \tag{7}$$

即ち流入量の全平均値と流出量の全平均値とが等しい場合のみに限定して以下論を進めることとなる。（以後これを“等平均値の条件”とよぶ）。尚この条件が成立しない時でも数式上は上述のＭＣの各式を展開しうるがそれは実用的価値の少いものとなるであろう。依て(6)は

$$D_i = S_\phi + B_\phi - S_i \quad \& \quad D_\phi = B_\phi \tag{8}$$

となる。こゝで初期値B_ϕはA_iとB_iの相対関係を律する重要な役目をもつ。然しながら上述の各式は任意のB_ϕの値について成立している。依てこゝで我々は今後のスタデイに最適なようにB_ϕの値を選定することができる。その候補として次の２案が浮かぶ：

1)　$B_\phi = E_\phi$,　　2)　$B_\phi = -S_\phi$.

1) を採用した場合(8)は

$$D_i = S_\phi + E_\phi - S_i = V - S_i = E_i \geq \phi \tag{9}$$

となるから両ＭＣの縦距差は貯水池の空容量E_iを示し、しかもそれは常に非負であるから　$B_i \geq A_i$ 即ち流出量のＭＣは流入量のＭＣに切するか或いはその上方に位置することとなる。このようにとった場合の流入量のＭＣをプライマルＭＣとよぶこととする。従来のＭＣはこの特殊ケースとして　$E_\phi = \phi$ とした場合に相当する。次に 2) を採用した場合(8)は

$$D_i = -S_i \quad or \quad A_i - B_i = S_i \geq \phi \tag{10}$$

となるから 1) とは逆に流出量のＭＣは流入量のＭＣに切するか或いはその下方に位置することとなり、両者の縦距差は直接貯水量を表わすこととなる。この表示法は注目に価する。何故なら従来のＭＣグラフでは空容量が図示されていた為、一見してピンとこない欠点があつたのを実貯水量を図示した見易いグラフとして表示する利点に加えて、空容量E_iを使用しないので貯水容量 V が１次的に必要な値ではなくなるという利点をもつからである。このようにとった場合の流入量のＭＣをデュアルＭＣとよぶこととする。

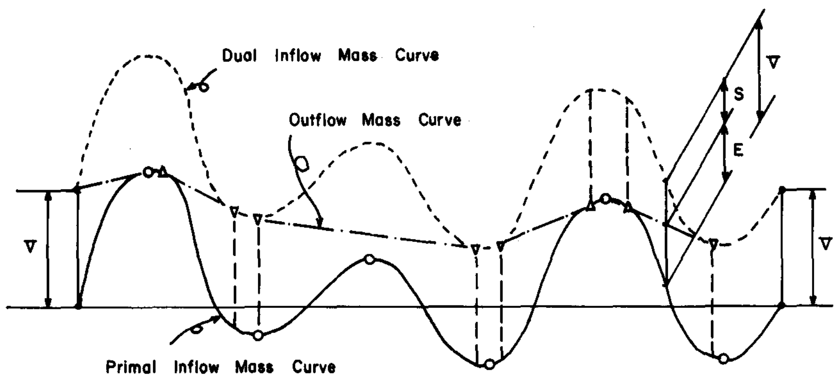

Fig. 1　Primal－dual Pair of Mass Curves

さて1)，2) いづれの場合についても　$i = \phi$ ，及び　$i = N$点の縦距差は

$$D\phi = DN \tag{11}$$

となる。（∵ (5) に i＝Nとおいて$S_n = S_\phi$となるから (9) については $D_\phi = E_\phi = V - S_\phi = V - S_n = E_n = D_n$，又 (10) については $D_\phi = -S_\phi = -S_n = D_n$）。
即ち i＝0点とi＝N点 の両ＭＣの縦距差は等しいこととなる。これは各ＭＣの両端の点を結ぶ直線（これをＭＣの基線とよぶ）は平行となることを意味する。

さらに一歩進めて上記1)，2)案を Combine して採用した場合について考えよう。
即ち プライマル，デュアル及び流出量のＭＣが座標軸を共有する場合である。（Fig.1），この場合三者の基線はすべて平行となり、プライマルＭＣとデュアルＭＣの縦距差は常に V に等しく、プライマルＭＣと流出量のＭＣの縦距差はEi，デュアルＭＣと流出量のＭＣの縦距差はSiを表示することは上述の議論より容易に理解しうる。これら三者のＭＣを総称して"連行マスカーブ"とよぶこととする。

2. 連行マスカーブの特性及び分類

一般に貯水池操作を計画する場合与えられた貯水容量を用いて放流量の最小値ができるだけ大きくなるように（常時使用可能水量）及び放流量の最大値ができるだけ小さくてすむように（最大使用水量）検討される。これは流出量のＭＣが前者は最急下り勾配が、後者は最急上り勾配ができる限り緩となるように検討することに相当する。

この検討を行う為に前節の連行ＭＣが有用である。 Fig.1 より流出量のＭＣはプライマルとデュアルＭＣとではさまれた範囲内のみでの変動が可能で、しかも上記常時使用水量と最大使用水量を表わす勾配線はこれらの対をなすＭＣの共通切線として求められることは前節の理論より容易に理解しうる。

こゝで注意を要するのは図からわかる通り、これらの共通切線の切点はＭＣの頂点又は底点とは必ずしも一致しないこと、及びその切点の位置は必ずしも各単位期間の始終点には落ちないことである。従来のＭＣによる計算が近似的な結果しか得られなかった理由の一つはこの点の認識に厳密さを欠いていたことによると思われる。

連行マスカーブは下記4種の基本型の組合せ及びこれらの基本型間を接続する過渡期間によって表現できる。（Fig.2）

a) 両端満水期間型　Peak Spanning Period
b) 両端低水期間型　Trough Spanning Period
c) 補給期間型　Supply Period
d) 貯溜期間型　Store Periods
及び 各過渡期間　Transition Periods

ＭＣによる貯水池放流量予測のプログラミングに際してこれらの型の認識は重要となることを附言する。

3. 自然流域の蒸発散その他のロスの推定

流域の地盤中に存在する無数の空隙の集合を自然の貯水池、降雨を流入量、河川流量及び蒸発散その他のロスの合計（水分流失量とよびQiで表わす）を流出量とみなせば、長期間にわたる流入量と流出量の平均値はほゞ等しいと考えることができるから、第1節の理論が適用できることが予想される。即ちQiのＭＣの基線と雨量のＭＣの基線とは平行となる。雨量のＭＣはデュアルＭＣを採用する。従って両ＭＣの縦距差は直接流域の貯溜水分量（これをＭiで表わす）を表わすことゝなる。

さてこゝで第i期中のロスは貯溜水分量の期中平均値に比例するとの仮定を導入しよう。即ち

$$E_i = \frac{M_{i-1} + M_i}{2} \frac{E_{sum}}{M_{sum}}, \quad E_{sum} = \sum_{i=1}^{N} P_i - \sum_{i=1}^{N} R_i, \quad M_{sum} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}(M_{i-1} + M_i) \quad (12)$$

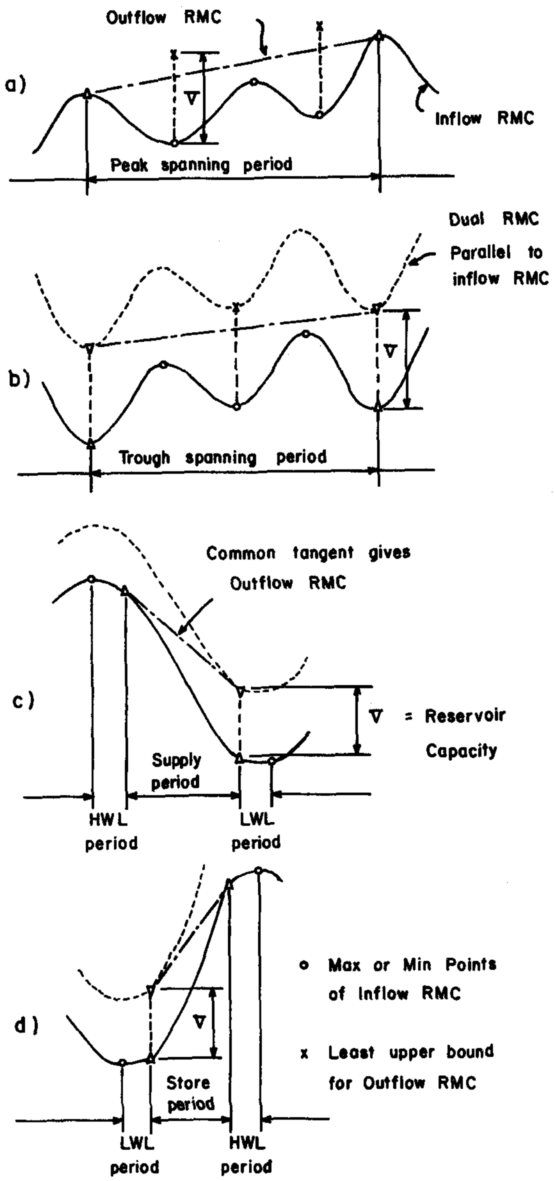

Fig. 2 Classification of Period Types of Residual Mass Curve (RMC)

こゝでＥｉは蒸発散その他のロス、Ｐｉは降雨量、Ｒｉは河川流量を示す。

もしこの式のＭｉの値が何等かの方法で仮定されたとすれば(仮定の方法については後述)Ｅｉの値が計算できるからそれにＲｉを加えるとＱｉが求められる。依てＱｉのＭＣを作り、これと雨量のＭＣとの縦距差から第２近似値としてのＭｉが求められ、従ってロスの第２次近似値も計算できる。以下同様の手法をロスの値が収斂する迄繰返す。

Ｍｉの第１次の仮定値はつぎのようにして求める。先づはじめにＭｉの初期値Ｍφを仮定する。これは負の値でその絶対値が十分大きければ任意に仮定してよい。｜Ｍφ｜の仮定値が十分大きくないときは上記ロスの計算が収斂しない。

次に流量ＲｉのＭＣを｜Ｍφ｜だけＰｉのＭＣの下に、かつＰｉの基線とＲｉの基線が平行になるようにプロットする。(実際にはコンピューターの計算によるのでプロットの必要はない)。

このようにプロットされた両ＭＣの縦距差がＭｉを与える。

さて上述のロスの計算が収斂する毎に少しづつ｜Ｍφ｜の値を減らしてゆき、ロスが収斂しなくなる直前の値を以て最終値とする。

この操作は雨量のデュアルＭＣに対してＱｉのＭＣを下方より平行移動して近づけてゆくことに相当する。その根拠は長期間にわたるデータであれば、いづれかの時点で流域の有効貯溜水分量が殆んどなくなった渇水期間を含むであろうとの推測に基づく。従って短期間のデータでは本手法による推定誤差は大きくなる。

尚この計算は貯水池容量Vは不明のまゝで遂行できる。もし大洪水を含む長期間のデータであれば最終計算値のMｉの最大値が流域の有効貯溜量の近似値を与える。

本邦神流川について月単位のデータによる2年間のみの計算例を Fig.3 に示す。この図でQｉのMCはもう少し上方移動が出来そうに見えるがそうするとロスが収斂しなくなる。この理由はつまびらかでない。しかしもしそのような値について計算できたとしてもロスの推定値は殆んど変化しないであろう。

この図で自然の蒸発散その他のロスは流域地盤の貯溜水分量の多い雨期には大きく、逆に乾期には小さくなるという変動の様子をみることができる。

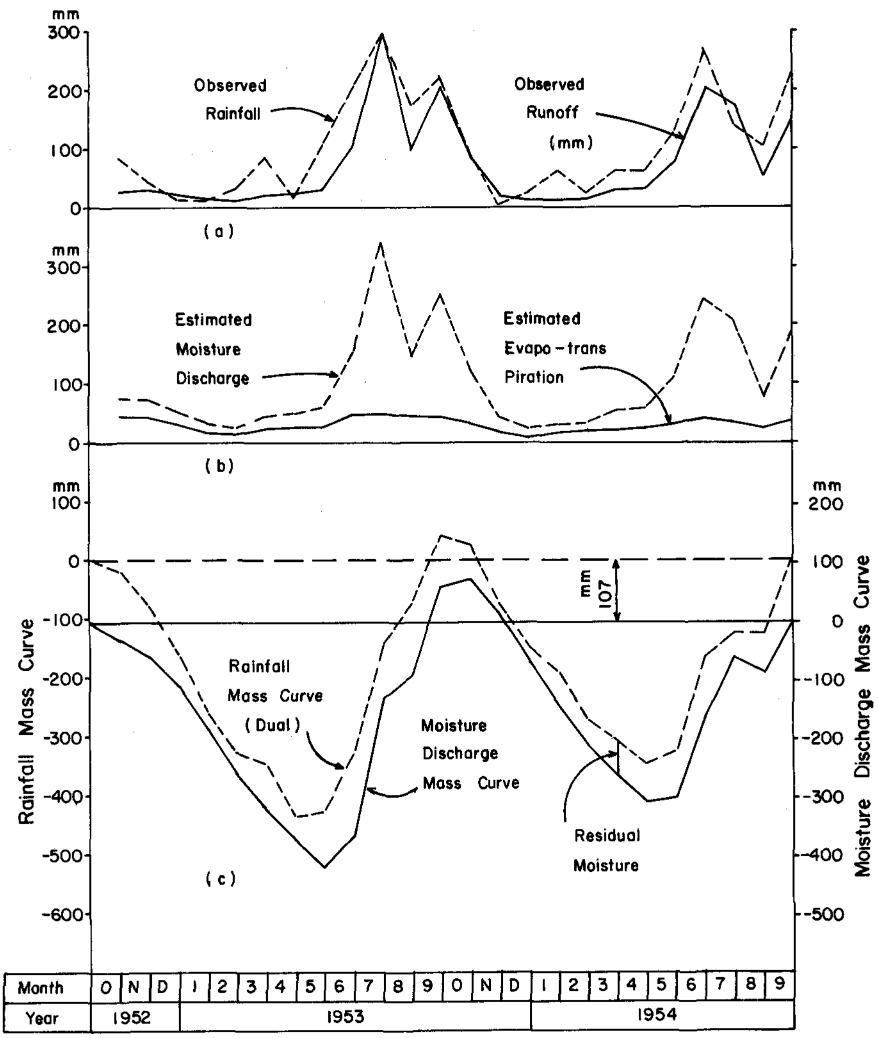

Fig. 3 Rainfall Runoff, Moisture Discharge & Evapo-transpiration in KANNA GAWA CA = 373.6 Km^2

4. むすび

以上まとめると、先づ流入量と流出量のマスカーブを個別に数式化し、ついで流入量、流出量及び貯水量

間に存在する連続の条件により両者を結合した。このあと“等平均値の条件”が満たされる場合について連行マスカーブを導入し、その特性を解明した結果：

1) 連行マスカーブによれば時期別の水収支計算と同等の精度をもつ流出量の計算が可能であること、
2) 最適放流量は4個の基本型のいづれかから選定できること、及びこのような認識は貯水池操作のプログラミングに際して有用であること、
3) デュアルと流出量のマスカーブをプロットしたものは貯水量の実体を図示した見易いマスカーブとなり、さらに貯水池容量が第1次的に計算に必要な数値ではなくなること

等の従来のマスカーブでは得られなかつた利点が得られることがわかつた。

さらに応用として、もし“自然流域の蒸発散その他のロスがその時点における流域の貯溜水分量に比例する”という仮定を導入すればこれらのロスを推定し得ることを論じた。従つてもしその他のロスが無視できるような流域であれば、時期別の蒸発散量の近似値が雨量及び流量の観測値のみに基づいて推定できることとなる。

周知の蒸発散量推定の経験式は主としてかんがい所要水量を推定する為のものであり、必要なだけの土壌水分は常に供給されているとの前提に立っている。従つて渇水期における自然流域の蒸発散量の推定には使用できない。このとき連行マスカーブが有用となる。

マスカーブは本来原始データに累計処理を施しただけのものであり、又関連諸量を結ぶ連続の方程式は普遍的なものである。依てこれらの基礎に立つ連行マスカーブも基本的に普遍な式である。従つてその応用範囲は単に水文現象のみに止まらず広く“等平均値の条件”を満たす諸現象についての適用が可能であろう。

終りに神流川の観測に尽力された竹内教授の労に敬意を表します。（終）