

渇水持続曲線と自己相関構造 Autocorrelation Structure Reflected in DDC

山梨大学 正会員 竹内邦良

1. はじめに

吉川・竹内(1975)によって提案された渇水持続曲線(DDC:drought duration curve)は、Richard Hazen(1956)により提案されていたFlow-duration curveやsynthetic mass curveと呼ばれるものと本質的には同じものである。(Chow ed., 1964, pp. 18-10 ~ 18-15). 両者の違いは、Hazenが流量や降雨量の累加量(running sum)を基本量として扱い、それに終始したため、マスカープ法の発想から飛躍できなかったのに対し、渇水持続曲線は平均値(moving average)を基本量としたために、水文統計量としてより広い応用分野を見出して来た点にある。

本論文はこれまでに開発された渇水持続曲線の利用方法に加えて、時系列の低位持続特性を把える手段としても有効に機能することを示すものである。

渇水持続曲線は水文時系列の低位継続記録を直接、順位別・期間長別に示した図である。したがって水文量の平均・分散などに強く影響された形をもっており、分布特性、相関特性などはその中にかくれてしまっ、地域的な違いや特徴を見ることは必ずしも容易ではない。そこで筆者はまず、平均および分散の地域差を取り除くため、規準化した変量について渇水持続曲線を描くことにした。これにより平均・分散以外の特性を反映した渇水持続曲線を描くことができ、それをとおして水文量の持続特性の地域性を比べることができた(未発表)。

本論文ではさらに進んで、各地の水文量の分布形の違いによる渇水持続曲線の違い、さらに相関特性の違いによる渇水持続曲線の違いを分離することを考えた。平均・分散による違いをscale effect、分布形によるものをdistribution effect、相関構造によるものをcorrelation effectと呼ぶとすれば、本論文で扱う主題はこの第3番目のcorrelation effectが渇水持続曲線にどのように表われるかを明らかにしようとするものである。

2. 自己相関による渇水持続曲線差 — 定義 —

水文時系列のもつ相関構造の違いが、渇水持続曲線にいかん反映されるかを知るためには、その影響のみを取り出して表わす工夫が必要である。そこで以下のような方法を考えた。

観測された生の水文時系列 x_t を、各時点で標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う時系列 u_t に変換し、 u_t の渇水持続曲線 $f_{\#}^0(m)$ と、 $N(0, 1)$ の分布をもつ white noise の渇水持続曲線 $f_{\#}^0(m)$ の差

$$z_{\#}(m) = f_{\#}(m) - f_{\#}^0(m) \quad (1)$$

をもって、自己相関構造のみの特徴をあらわす渇水持続曲線、すなわち自己相関による渇水持続曲線差と定義する。

x_t を u_t に変換する手順としては、正規変換と、規準化の二段階に分けて行った。

$$v_t = T_{\tau}(x_t) \quad (2)$$

$$u_t = \frac{v_t - \bar{v}_{\tau}}{s_t} \quad (3)$$

正規変換操作 T としては、次節に述べる Box-Cox 変換を用いた。渇水持続曲線 $f_{\#}(m)$ の定義は

$$f_{\lambda}(m) = k - \text{th smallest} \cdot \min_{j=1, \dots, N} \min_{x_1 \in j\text{-th year}} \frac{1}{m} \sum_{x=x_1}^{x_1+m-1} u_x \quad (4)$$

である。本論文では x_{λ} としては月降雨量時系列を用いる。 x は j 年 τ 月の起点よりの通し番号で、 $x_{\tau, j}$ とも書く。 N は資料年数である。

3. 任意分布形の正規変換 — Box-Cox 法 —

x_{λ} を正規分布に従う変数に変換する方法としては、対数変換、立方根変換など種々考えられるが、それ等の一般形として提案された Box & Cox (1964) による指数変換を用いる。この方法は非負の確率変数を λ 乗するだけの単純なものである。すなわち、月降雨量 x_{λ} を、月別に異った指数 λ_{τ} により、

$$v_{\lambda} = \begin{cases} x_{\tau, j}^{\lambda_{\tau}} & (\lambda_{\tau} \neq 0) \\ \log x_{\tau, j} & (\lambda_{\tau} = 0) \end{cases} \quad (5)$$

と変換する。ここに λ_{τ} は、 v_{λ} が最も正規分布に近くなるように最尤法によって推定されるべきものであるが、ここでは簡便法として v_{λ} の月別の歪係数、

$$r_{\tau} = \frac{\frac{1}{N} \sum_j (v_{\tau, j} - \bar{v}_{\tau})^3}{\left\{ \frac{1}{N} \sum_j (v_{\tau, j} - \bar{v}_{\tau})^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} \quad (6)$$

を最も 0 に近くするものとして推定した。このようにして得られた世界各地の月降雨量の正規変換指数 λ_{τ} を、変換前の歪係数 r_{τ} とともに Table 1 に示した。 λ_{τ} は逐次計算により求めたが、打ち切りの規準としては、歪係数の絶対値が 10^{-5} 以下になるものとした。

福岡での λ の値は 0.07 ~ 0.55 で平均値は 0.37、大阪では 0.08 ~ 0.82、平均 0.40 である。他の地点における λ の値も必ずしも $1/3$ 前後の値に集中しているわけではない。特に Paris については平均が 0.63 で、近似的には $2/3$ である。Stidd (1953, 1973)、正務・草間 (1955) らは日・月・季節降雨量が立方根正規分布することを示しているが、Table 1 の結果は必ずしもそれ等の報告を支持するものではない。

Table 1. Box-Cox transformation of monthly precipitations:

original skewness coeff. r and transformation parameter λ .

Month	FUKUOKA (1890 - 1980)		OSAKA (1883 - 1979)		PARIS (1874 - 1972)		MOSKVA (1881 - 1961)		EDMONTON (1883 - 1972)		CALCUTTA (1837 - 1966)	
	r	λ	r	λ	r	λ	r	λ	r	λ	r	λ
Jan.	.73	.52	.66	.49	.30	.69	.94	.20	.76	.51	1.59	.27
Feb.	.76	.30	.74	.49	.58	.62	.80	.52	1.01	.50	2.24	.35
Mar.	.59	.55	.20	.82	.27	.79	.99	.23	1.02	.43	1.58	.37
Apr.	.89	.41	.78	.11	.45	.73	1.16	.16	1.43	.44	1.14	.48
May	1.49	.30	1.19	.08	.71	.63	.35	.63	1.96	.37	1.20	.40
June	1.96	.07	1.15	.24	.19	.83	.86	.54	.79	.60	1.13	.25
July	1.13	.33	1.40	.36	.60	.65	.53	.42	1.89	.34	.62	.42
Aug.	2.48	.31	1.05	.40	.37	.71	.25	.76	.57	.59	.91	0
Sept.	1.00	.36	.75	.37	.35	.72	2.38	.23	1.04	.52	2.70	.03
Oct.	1.20	.35	.83	.48	.93	.26	.85	.52	.70	.47	1.24	.49
Nov.	.54	.53	.88	.39	.81	.43	1.39	.09	1.96	.44	3.01	.13
Dec.	.74	.43	.77	.54	.78	.47	.69	.37	1.30	.53	3.14	0
$\bar{\lambda}$		.37		.40		.63		.39		.48		.27
s_{λ}		.13		.20		.16		.21		.08		.18

い。Box-Cox変換の定義式(5)からも明らかなように、 $\lambda \geq 0$ ということは生データが対数正規分布することであり、また $\lambda \geq 1$ ということは正規分布することである。このようなデータを立方根正規分布に当てはめた場合にはかなりの歪が予想され、Table 1はそのことの危険性を示していると言えよう。

4. 自己相関による渇水持続曲線差 — 1次のマルコフ過程の場合 —

Fig.1 に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う white noise の渇水持続曲線を示した。これが(1)式の $f_{\#}(m)$ である。ランダム発生させた1つ1つの乱数を月降雨量と考へ、1000年分のデータから渇水持続曲線を求めて、それを10組つくって平均したものが図示されている。非常になめらかな形をしているのはこのためであるが、1000年分1組でもこれに近い形状が得られる。図の読み方の例を示すと、例えば10年確率の渇水のとき、期間長24ヶ月で-0.37となっているのは、(3)式のように月パターンからのずれをその月の標準偏差で除し標準化した平均0、標準偏差1の時系列においては、それが正規分布し、相関係数が0であっても2年平均が-0.37以下になることが、平均10年に1度の割合でおこることである。

一般に平均が0、標準偏差が1の独立変数の m 個の平均値の標準偏差は $1/\sqrt{m}$ になるが、Fig.1 の曲線は $1/\sqrt{m}$ よりはるかに急速に減少している。これは平均月数 m の小さい場合には、(4)に定義された渇水持続曲線をつくる操作のうち年最小をとることによる影響が顕著で、非常に厳しい場合が選択されることを示している。したがって m の増大とともに $1/\sqrt{m}$ より急速に減少するのではなく、むしろ m が小さいところでは $1/\sqrt{m}$ 以上に大きな標準偏差を持つとみるべきである。

次に white noise ではなく colored noise の場合はどうなるかを調べる。このため標準正規分布 $N(0, 1)$ に従い、かつ相関係数 $\rho = -0.2 \sim 0.5$ まで変化する場合のランダム変数を、1次のマルコフ過程として次のモデルにより模擬発生させた。

$$u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \sqrt{1-\rho^2} \cdot \varepsilon_t \quad (7)$$

ここに ε_t は $N(0, 1)$ の独立なランダム変数である。

この colored noise について作成した渇水持続曲線 $f_{\#}(m)$ から、上の white noise のもの $f_{\#}^0(m)$ を差し引いた結果が自己相関による渇水持続曲線差 $\zeta_{\#}(m)$ である。これを Fig.2 に示した。(Fig.1 と Fig.2 では縦軸のスケールが違っているので注意を要する。) Fig.2 の値は、時系列に自己相関構造が存在することによって、独立過程である場合の渇水持続曲線よりどれだけ下がるかを示したものである。この図から以下のことがわかる。

第1に負の相関をもつ場合には渇水持続曲線は独立の場合よりも上がり、正の相関では下がるという当然の現象が確認できる。相関係数の絶対値の増大によりその影響は急速に増し、とくに確率年の高いものに顕著にあらわれる。第2には独立過程の場合からの隔たりは相関係数の正負にかかわらず $m = 2 \sim 5$ 付近で最大値をもつ。何故 $m = 2 \sim 5$ 付近に最大値があらわれるかは今のところ不明であるが、 $m = 1$ では差は小さいか、ないしは再帰間隔の短い場合には逆に独立過程より渇水量が多い ($\rho > 0$ の場合) というのは直感的にも理解できる。すなわち正の相関構造の存在により低位継続傾向は増すが、各時点での値は平均・分散とともに white noise と等しいから差はないということである。

5. 月降雨量時系列の自己相関特性と渇水持続曲線差

以上の検討結果をふまえて、実際の月降雨量時系列に内在する相関構造が、渇水持続曲線にどのように反映されるかを調べる。まず Fig.3 が、福岡・大阪・Paris・Moskva 4地点における月降雨量時系列の自己相関による渇水持続曲線差 $\zeta_{\#}(m)$ を示したものである。一見して $\zeta_{\#}(m)$ は Fig.2 のような単純な形はしていないことがわかる。これには標本変動分も含まれているに違いないが、それよりも現実の水文現象の複雑さを反映していると見るべきであろう。差は必ずしも負ばかりではなく、特に大阪においては確率年の高いものにも正負両方向の変動がみられる。しかしながら大阪においても $m = 12$ ヶ月付近でそうであるように、一般的傾向としては確率年が高くなるにしたがって差は負の方向に大きくなっている。Paris・Moskva で

0.3
0

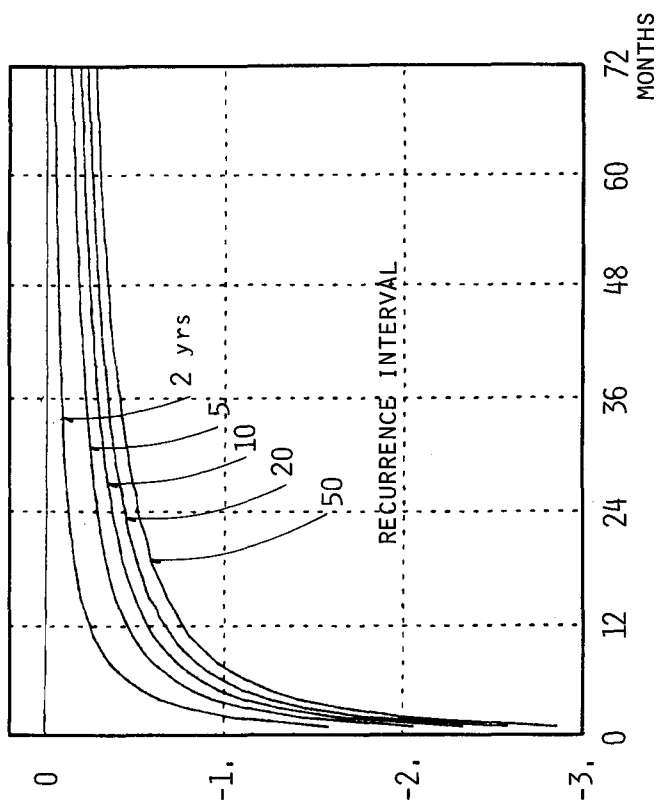
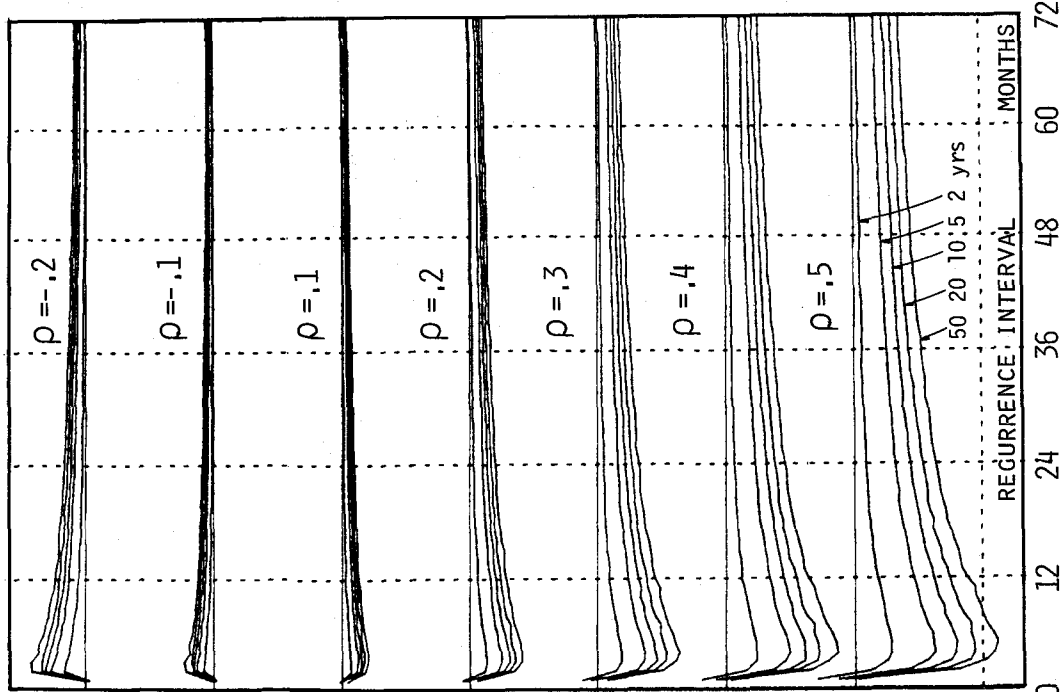
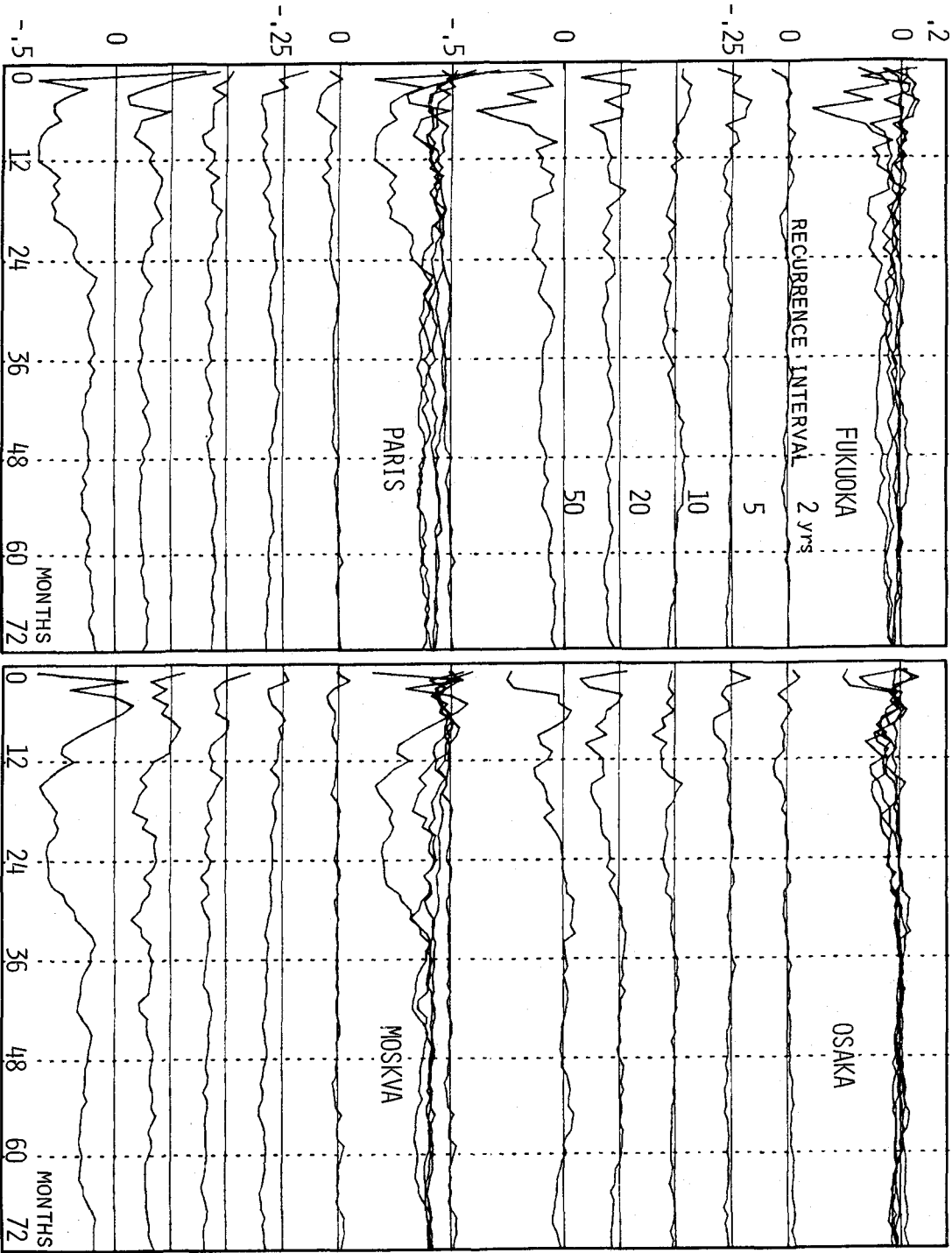


Fig.1 DDC of white noise process with $N(0,1)$.

Fig.2 DDC difference brought in by lag 1 autocorrelation.

Fig.3 DDC difference detected in the correlation structure of monthly precipitation series.



はとくに差が大きく、その形も1次マルコフ過程の場合にみられた一たん下って最小値をもち、その後やや回復する形状に近い部分を含んでいる。以上4地点の渇水持続曲線差をまとめると、次のようになる。差は大阪・福岡・Paris・Moskvaの順に大きくなっている。確率年が2、5、10年までは、大阪・福岡とも一貫した負の差はないが、Paris・Moskvaでは5、10年でも大きな負の差がある。福岡・Paris・Moskvaにおける確率年20、50年での差の程度はそれぞれFig.2の $\rho = 0.2$ 、 0.3 、 0.4 に近いものである。(Fig.2とFig.3の、縦軸のスケールは同じである。)

Fig.3で捉えられたこのような特徴が、相関関数に表われたものとどのような関連にあるかを次に検討する。Fig.4は上記4地点の月降雨量の年平均パターンからのずれの自己相関関数である。95%の信頼度では帰無仮説 $\rho = 0$ を容認出来ない範囲を図中に示してある。ラグが1~12ヶ月前後(Moskvaでは7ヶ月まで)の相関係数にはさほど顕著なものはみられない。しかしながらラグの大きいところに多数の有意な相関が見られる。とくにMoskvaでは他の地点をはるかにしのぐ数の、高い相関があらわれている。これは長期にわたる周期性と、一定の周期はもたない非定常性の両方に原因する現象と思われる。4地点の中で ρ_1 が最も大きいのはMoskvaの 0.130 である。2位はParisの 0.094 、3位は福岡の 0.050 、4位が大阪の 0.009 である。この ρ_1 の順位が、Fig.3における渇水持続曲線差に表われたものであろうか。この例だけで断定はできないが、その影響は非常に大きいと想像される。しかしながらそれだけとすると、Fig.2の $\rho = 0.2$ 、 0.3 、 0.4 に相当するというのは大きすぎる。したがってFig.3に表われた現象は、大きなラグの部分も含んだ相関構造全体の反映であるとするのが正しいと思われる。それではFig.4においてParisと福岡・大阪との相関関数がなほども違わないように見られるにもかかわらず、Fig.3の渇水持続曲線差には大きな差としてあらわれていること、また逆に、ParisとMoskvaでは相関関数は大きく形状が異っているのに渇水持続曲線差にはさほど大きな差としては表われていないのはいかなる理由によるものであろうか。これに対する筆者の考えは以下のとおりである。

渇水持続曲線差 $\zeta_{\#}(m)$ は、たしかに相関構造を反映してはいるが、スペクトルのように相関関数と本質的に同一の情報を表わすものではない。 $\zeta_{\#}(m)$ はあくまでも時系列の低位継続傾向の特性を示すものである。したがって時系列が一たん低位に着いたときの持続特性・相関構造を、高位にある場合から分離・抽出して表わしている。Parisにおいて $\zeta_{\#}(m)$ が大きいのは、低位に及んだときの持続性が、福岡・大阪に比べ強いことを示しており、その度合は、かりに一次のマルコフ過程で表わすとすれば $\rho = 0.3$ 程度に相当するということである。またParisとMoskvaでは全体の相関構造こそ大きく異なるが、低位に及んだときの持続特性ではそれ程の差はみられないことを示している。以上が実データより得られたFig.3の渇水持続曲線差の解釈であると共に、渇水持続曲線差の有効性を主張する本論文の結論でもある。

謝 辞

本論文の計算・作図に当っては元山梨大学大学院(現東京電力勤務)の大石和人君、山梨大学4年の伊藤幸義君にお世話になった。記して謝意を表する。

引用文献

- 1) 吉川・竹内: 渇水持続曲線の性質とその応用、土木学会論文報告集、№234、1975、pp.61~71.
- 2) 正務章・草間宗三: 松本の確率雨量について、研究時報、7、1955、pp.277~282.
- 3) Box & Cox: An analysis of transformations, J. Royal Soc. Statistics, Ser. B, 26, 1964, pp.211~243.
- 4) Hazen, Richard: Economics of streamflow regulation, J. Am. Water Works Assoc., vol. 48, no. 7, 1956, pp.761~767.
- 5) Hudson, Jr., H.E. & Richard Hazen: Drought and low streamflow in Ven Te Chow (ed.): Handbook of Applied Hydrology, McGraw-Hill, N.Y., Sec. 18, 1964, pp.18-1~18-26.
- 6) Stidd, C.K.: Cube-root-normal precipitation distributions, Trans. Amer. Geophys.

Union, 34, 1953, pp.31 ~ 35.

- 7) Stidd, C.K. : Estimating the precipitation climate, Water Resour. Res., vol 9, no. 5, 1973, pp.1235 ~ 1241.

