

変勾配斜面流域からの流出 Overland flow on a varying slope

北海道大学工学部 正員 ○藤 田 睦 博

北海道大学工学部 正員 山 岡 勲

1. は じ め に

河川の上流においては、河道も斜面もその勾配が急変している。例えば、河道勾配に関する地形則を示すと、

$$\begin{aligned} \text{河道勾配則}^{1)} \quad \bar{S}_u &= \bar{S}_1 R_s^{1-u} \\ \text{Flint の式}^{2)} \quad \bar{S}_N &= r(2N-1)^{-\delta} \end{aligned} \quad (1.1)$$

u : 河道位数、 $\bar{S}_u$: 位数 u の河道の平均勾配、 R_s : 勾配比、 N : 流域のマグニチュード、 $\bar{S}_N$: マグニチュード N の内部リンクの平均勾配、 r 、 δ : 定数

式(1.1)は、河道指数および流域のマグニチュードに基づく2つの河道勾配に関する式を示しているが、いずれの場合も河道勾配が河道に沿って指数関数的に減少することを示している。図-1.1は、この様子を示したものである。このような形状を有する河道あるいは斜面の代表的勾配の設定にあたって、種々の方法が提案されている。³⁾ 河道における最も簡易な勾配の決定法は、図-1.1の線分 AC で河床を近似すると、このときの勾配は

$$i_1 = h/l \quad (1.2) \quad Z(\text{標高})$$

他の手法は、図形 ABC の面積と三角形 BCD の面積が等しくなるように線分 CD を決めるものである。

$$i_2 = \overline{BD}/l \quad (1.3)$$

指数関数的に勾配が減少しているものとする、当然、次のようになる。

$$i_1 > i_2 \quad (1.4)$$

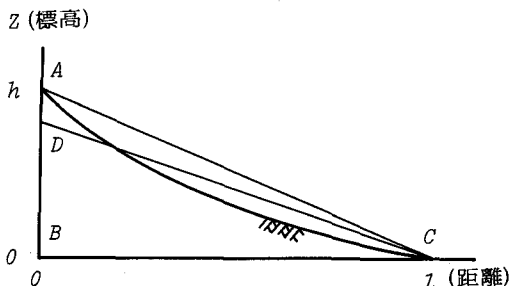


図-1.1 勾配のとり方の例

実際には、計算の簡単な式(1.2)の手法が用いられているようである。一方、斜面勾配の推定法としては、谷線法や交点法などがある。

式(1.2)または式(1.3)を流域地形をなるべく忠実に表現したときの代表的勾配の設定法と解釈するならば、本研究は流出解折の立場から代表的勾配の推定法について考察したものである。

2. 基 礎 理 論

図-2.1に示す変勾配斜面上の流出モデルの基礎式として、次式を考える。

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial yv}{\partial x} = r(t) \cos \theta(x) \quad (2.1)$$

$$v = \frac{1}{n} y^{\frac{2}{3}} \left\{ -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \sin \theta(x) - \frac{\partial (y \cos \theta(x))}{\partial x} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

y : 水深、 v : 流速、 t : 時間、 x : 斜面上流端からの距離、 $r(t)$: 有効雨量、 $\theta(x)$: x の位置における斜面の傾斜角、 g : 重力の加速度、 n : Manning の粗度係数。

式(2.2)において、加速度項を無視して単位幅流量 q を求めると、次式を得る。

$$q = yv = \frac{1}{n} y^{\frac{5}{3}} \left\{ \sin \theta(x) - \frac{\partial(y \cos \theta(x))}{\partial x} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

いま、式(2.3)の各係数を一般化して

$$q = \beta y^m \left\{ \sin \theta(x) - \frac{\partial(y \cos \theta(x))}{\partial x} \right\}^c \quad (2.4)$$

式(2.1)、(2.2)に代入し、微小項を簡略して次式を得る。

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r(t) \cos \theta(x) \quad (2.5)$$

$$(0 \leq x \leq l)$$

$$q = \beta y^m \sin^c \theta(x) \quad (2.6)$$

代表的斜面傾斜角を θ_u とし、このときの斜面流出量を q_u とすると、式(2.5)、(2.6)と同様に

$$\frac{\partial y_u}{\partial t} + \frac{\partial q_u}{\partial x} = r(t) \cos \theta_u \quad (2.7)$$

$$q_u = \beta y_u^m \sin^c \theta_u \quad (2.8)$$

こゝでは、式(2.5)、(2.6)および式(2.7)、(2.8)の斜面末端の流出量が等しくなるように代表的傾斜角を決める。

$$q_u(l, t) = q(l, t) \quad (2.9)$$

しかし、式(2.9)の等号が完全に成立する θ_u は存在せず、 θ_u は降雨波形や時間によって変動する。したがって、こゝでは式(2.5)、(2.6)および式(2.7)、(2.8)を一度貯留型の流出モデルに変換し、両者の貯留方程式が等しくなるように θ_u を定める。

以後の取扱いを容易にするため、次に示す量を定義して、式(2.5)、(2.6)を無次元化する。

$$\begin{aligned} r &= r_* R & x &= x_* X & q &= q_* Q \\ t &= t_* T & y &= y_* Y \end{aligned} \quad (2.10)$$

※のついた量は無次元化基準量で、大文字は小文字の量の無次元量である。無次元化基準量として、次式を採用する。

$$\begin{aligned} r_* &= \bar{r} \quad (\text{平均雨量強度}) & x_* &= l \quad (\text{斜面長}) \\ t_* &= \left\{ \frac{\bar{r}^{1-m} l}{\beta} \right\}^{\frac{1}{m}} & y_* &= t_* r_* & q_* &= x_* r_* \end{aligned} \quad (2.11)$$

したがって、基礎式の無次元化式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial T} + \frac{\partial Q}{\partial X} &= R(T) \cos \theta(X) \\ (0 \leq X \leq 1) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$Q = Y^m \sin^c \theta(X)$$

境界条件、初期条件として次式を与える。

$$Y(0, T) = 0 \quad Y(X, 0) = 0 \quad (2.13)$$

十分に継続時間の長い、一定強度の降雨(R)を考えると、定常状態における解は次式で与えられる。

$$\frac{\partial Y^m \sin^c \theta(X)}{\partial X} = R \cos \theta(X) \quad (2.14)$$

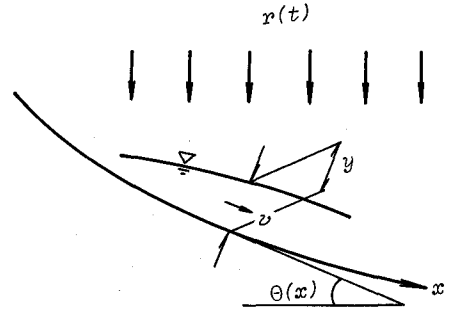


図-2.1 変勾配モデル

一方、斜面勾配が X に沿って指数関数的に減少することを考慮して、次式を仮定する。

$$\sin \theta(X) = A \exp(-BX) \quad \cos \theta(X) = \sqrt{1 - A^2 \exp(-2BX)} \quad (2.15)$$

$c = 0.5$ として、式(2.14)を解くと

$$Y = \exp\left(\frac{BX}{2m}\right) \left(\frac{R}{2B\sqrt{A}}\right)^{\frac{1}{m}} \left[2(\sqrt{1-A^2} - \sqrt{1-A^2 \exp(-2BX)}) \right. \\ \left. + \operatorname{Ln} \left\{ \frac{1 - \sqrt{1-A^2}}{1 + \sqrt{1-A^2}} \right\} - \operatorname{Ln} \left\{ \frac{1 - \sqrt{1-A^2 \exp(-2BX)}}{1 + \sqrt{1-A^2 \exp(-2BX)}} \right\} \right] \quad (2.16)$$

また、このときの斜面末端の流量 Q は

$$Q = \frac{R}{2B} \left[2(\sqrt{1-A^2} - \sqrt{1-A^2 \exp(-2B)}) \right. \\ \left. + \operatorname{Ln} \left\{ \frac{1 - \sqrt{1-A^2}}{1 + \sqrt{1-A^2}} \right\} - \operatorname{Ln} \left\{ \frac{1 - \sqrt{1-A^2 \exp(-2B)}}{1 + \sqrt{1-A^2 \exp(-2B)}} \right\} \right] \quad (2.17)$$

単位巾斜面の無次元貯留量は

$$S = \int_0^1 Y dx \quad (2.18)$$

で与えられる。式(2.16)～(2.18)を用いると定常状態における貯留方程式を誘導できる。数値計算の結果、次の貯留方程式を得た。

$$S = K_s Q^{\frac{1}{m}} \\ K_s = \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{\sqrt{A}}\right)^{\frac{1}{m}} \{ 1.429 B m^{-1.179} \} \quad (2.19)$$

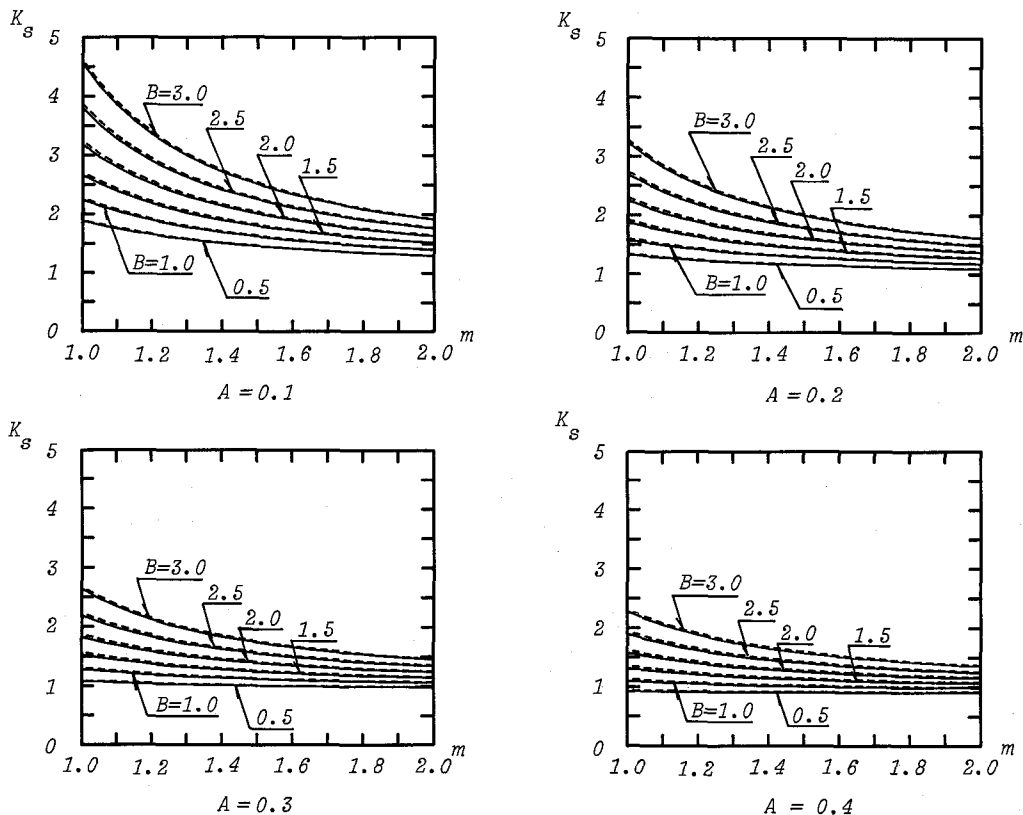


図-2.2 貯留係数の比較

図-2.2は、式(2.16)~(2.18)の数値計算の結果得た貯留係数(実線)と式(2.19)の K_s (破線)を比較したものである。式(2.19)の近似式の適合性は良好であると言える。代表的傾斜角 θ_u を用いたときの貯留方程式は、 $B=0$ として式(2.19)より

$$S = \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{\sqrt{\sin \theta_u}} \right)^{\frac{1}{m}} Q^{\frac{1}{m}} \quad (2.20)$$

したがって、式(2.19)、(2.20)の貯留方程式を等置すると

$$\sin \theta_u = A \cdot 1.429^{-2.8m-0.179} \quad (2.21)$$

$m=5/3$ (Manning 則) のとき、次式を得る。

$$\sin \theta_u = 0.521^B A \quad (2.22)$$

式(2.19)、(2.20)は、いずれも定常状態における貯留方程式を表わしている。次にこの貯留方程式の適合性について検討する。

標高を Z とすると、式(2.15)より

$$\frac{dZ}{dX} = -\sin \theta(x) = -A \exp(-BX) \quad (2.23)$$

したがって

$$Z = \frac{A}{B} \exp(-BX) + C \quad (2.24)$$

C : 定数

図-2.3は、 $A=0.1, 0.3$ 、 $B=1, 2, 3$ として式(2.24)

$Z-C$ (比高)

を図示したものである。なお、 X は斜面に沿う距離なので水平距離を X' として図示している。 $R(T)$ としては、図-2.4に示す三角形降雨を採用し、降雨の諸元(無次元)を表-2.1に示す。図-2.5は、 $m=1.6$ の場合について上述の傾斜角に関するパラメータ A, B および三角形降雨を用いて、式(2.12)、(2.18)のKinematic waveモデルより計算した貯留量~流量の関係($S \sim Q$ 曲線)を示す。図中の破線は、式(2.19)を示している。式(2.19)が $S \sim Q$ 曲線のピークを連ねていることがわかる。

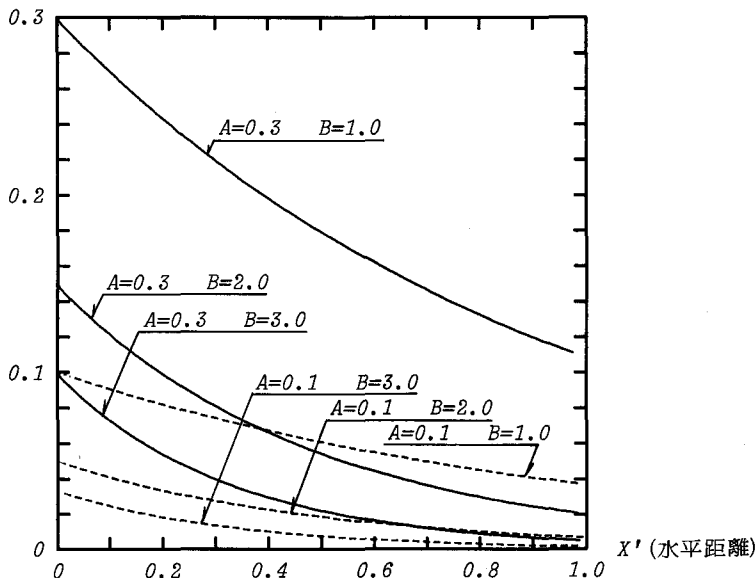


図-2.3 式(2.24)

式(2.12)の第1式を $[0, 1]$ の範囲で積分すると、次式を得る。

$$\frac{dS}{dT} + Q = R(T) \cos \theta(x) \quad (2.25)$$

図-2.6は $m=1.6$ のとき、図-2.3において傾斜角が急変している $A=0.3, B=1, 3$ について、式(2.12)のKinematic waveモデルの解(実線)と式(2.19)、(2.25)の貯留型流出セデルの解(破線)を比較し

たものである。貯留方程式を S 、 Q の1価関数である式(2・19)で表示しているので、ハイドログラフの上昇期においては貯留量を過小に、下降期においては貯留量を過大に評価している。(図-2.5の $S \sim Q$ 曲線は右回りである。)この傾向はパラメータ B の値が大きいくほど著しく、図-2.6の2つの解の差になっている。

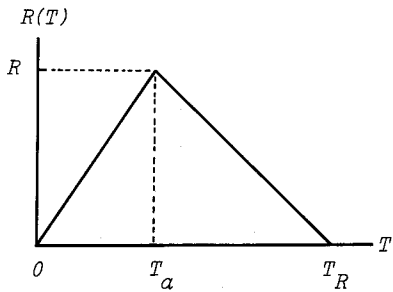


図-2.4 三角形降雨

	T_R	T_a	R
1	4	1	4
2	4	2	3
3	4	3	2

表-2.1 採用した三角形降雨

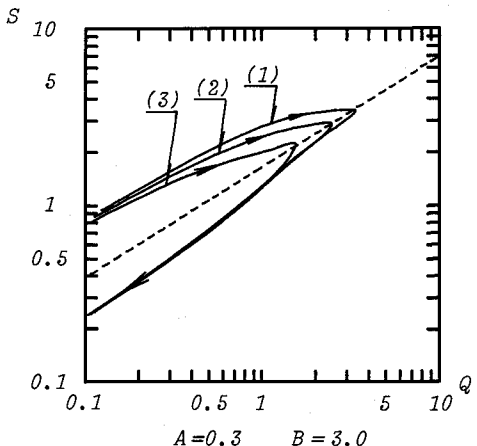
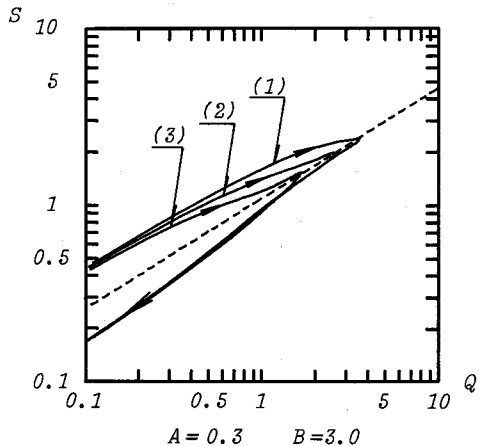
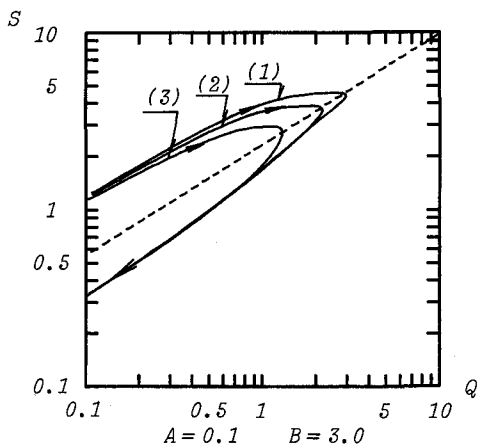
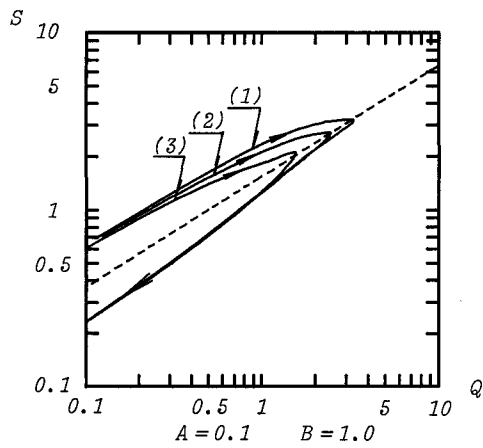
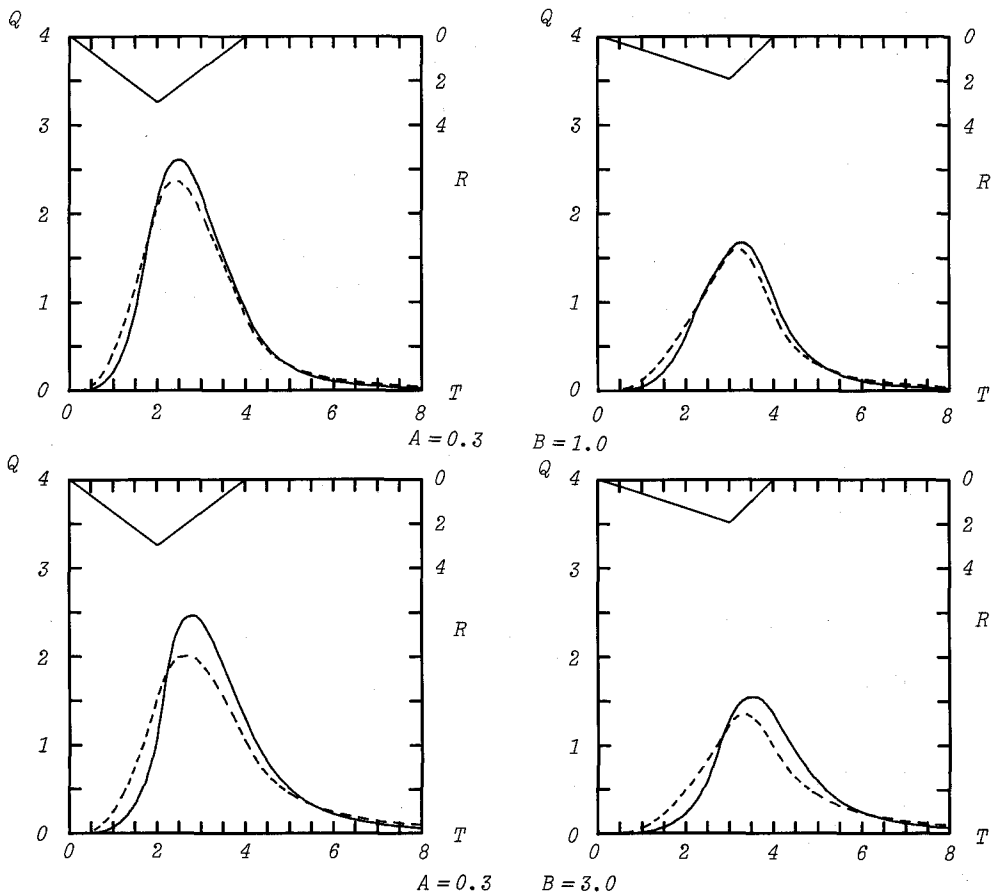


図-2.5 貯留量～流量の関係（三角形降雨）



実線：Kinematic waveモデル 破線：貯留型モデル

図 2.6 Kinematic wave モデルと貯留型モデルの比較

3. む す び

傾斜の傾斜角が、式(2.14)に示すように指数関数的に減少する場合、その代表的傾斜角として、式(2.21)を誘導した。また、式(2.19)の貯留方程式は無次元表示になっているので、図-3.1に示す矩形斜面を想定して有次元にもどす。単位幅の無次元貯留 S の無次元基準量 s_* は

$$s_* = y_* x_*$$

で与えられるので、式(2.19)は

$$s = K_s y_* x_* \left(\frac{q}{q_*} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (3.2)$$

ただし、 s ：単位幅貯留量 (m^2)、 q ：単位幅流量 (m^2/s)

河道効果を無視すると斜面全体からの流出量 s_t (m^3/s) および全斜面の貯留量 s_t (m^3) は

$$q_t = b q \quad s_t = b s \quad (3.3)$$

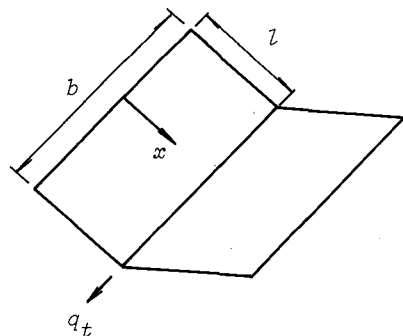


図-3.1 矩形斜面

と書けるので、貯留方程式は次のようになる。

$$s_t = K_s x_* y_* b \left(\frac{1}{b q_*} \right)^{\frac{1}{m}} q_t^{\frac{1}{m}} \tag{3.4}$$

斜面の面積が $b l$ であることを考慮して、流出高 q_h (mm/hr)、貯留高 s_h (mm/hr) を用いて式 (3.4) を書き改めると、次の貯留方程式を得る。

$$s_h = \frac{m}{m+1} \left\{ \frac{1,000^{m-2} l}{3.6 \beta \sqrt{\sin \theta_u}} \right\}^{\frac{1}{m}} q_h^{\frac{1}{m}} \tag{3.5}$$
$$\sin \theta_u = A \cdot 1.429^{-2.8m-0.179}$$

β は、メートル、秒単位で測定した斜面定数である。 X_u

式 (3.5) の第 2 式と式 (2.15) を等置すると、代表的斜面の傾斜角 θ_u を与える X の座標値が定まる。いま、この座標値を X_u とおくと

$$X_u = 0.714 m^{-0.179} \tag{3.6}$$

図-3.2 は、式 (3.6) を図示したものである。例えば、 $m = 5/3$ のとき

$$X_u = 0.65 \tag{3.7}$$

となって、斜面の下流端から斜面長の 35% 地点での傾斜角が、式 (3.5) の第 2 式の θ_u を満足している。

表-3.1 は、 $m = 1.6$ のとき斜面の傾斜角を式 (1.3) の手法で定義し ($\bar{\theta}$ とする)、 $\sin \bar{\theta}$ と式 (3.5) の $\sin \theta_u$ を比較したものである。 $\sin \bar{\theta}$ は、 $\sin \theta_u$ に比較して過大な値となっている。

本研究は、一般研究 C (課題番号 56550344) の援助を受けた。記して謝意を表する。

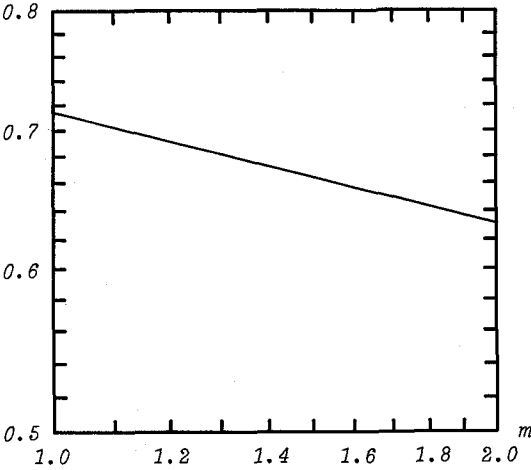


図-3.2 代表的斜面傾斜角の測定地点 (斜面上流端からの距離)

表-3.1

B	A=0.1		A=0.3	
	$\sin \theta_u$	$\sin \bar{\theta}$	$\sin \theta_u$	$\sin \bar{\theta}$
1	0.0519	0.0527	0.1556	0.1582
2	0.0269	0.0296	0.0807	0.0885
3	0.0140	0.0177	0.0419	0.0528

参考文献

1. Chow, V.T. (ed.): Handbook of Applied Hydrology, McGraw-Hill Book Company, New York, 1964
2. Flint, J.J.: Stream gradient as a function of order, magnitude and discharge, W.R.R., 1974
3. 角屋睦: 流出解析法 (その1)、農業土木学会誌、第47巻、第10号、1979