

雨水流法と貯留関数法との相互関係

A Relationship between Kinematic Wave and Storage Routing Models

北海道大学工学部 正員 ○ 星 清
北海道大学工学部 正員 山岡 勲

1. はじめに

Kinematic wave 法と貯留関数法は実際の流出解析に広範に用いられている。Kinematic wave 法は斜面・河道流出系を同一のモデル構造式で記述できること、また、流出現象の水理学的特性をモデル自身に反映させることができる特徴をもっている。一方、貯留関数法は流出過程の非線形性を比較的単純な構造式で表現でき、しかも流出逐次予測 (operational forecast) に要求される簡便さと迅速さをかねそなえもっている。その反面、貯留関数法においては、パラメータの物理的意義が Kinematic wave 法に比べて不明確である。いままでに提案されている貯留関数法のモデル構造は洪水時にみられる貯留量～流量曲線の2価性を定性的に説明しているにすぎず、モデル構造がはたして妥当であるかどうかの議論は余りなされていないようである。

最近、Kalman filter 理論は洪水流出の逐次予測に威力を発揮する一手法と考えられているが、比較的長い lead time の流出問題ではモデル構造の設定が洪水 hydrograph の予測精度と本質的に関連してくる。したがって、貯留関数法を Kalman 流の予測理論と coupling して精度の高い流出逐次予測を行なおうとすれば、hydrograph 全体の形状特性を的確に表現できる貯留関数形構造式の決定が必要となる。

本報告では、まず、貯留量～流量曲線の2価性を表現するにはどのような構造式が適切であるかを Kinematic wave 理論から明確にし、貯留方程式を新たに提案する。次に、矩形および三角形降雨波形に対する Kinematic wave 理論の応答にここで提案した貯留方程式をあてはめ、Kinematic wave パラメータと貯留関数パラメータ間の近似式を決定する。最後に、実流域での適用例を示す。

2. 基礎方程式

Kinematic wave 法は斜面・河道流出系の双方に適用できるが、ここでは単一矩形斜面上の流出過程を想定して Kinematic wave モデルの集中化を試みる。一定勾配斜面上の流れの基礎方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r \dots\dots (1) \quad q = \alpha h^m \dots\dots (2) \quad s = \int_0^L h(x, t) dx \dots\dots (3)$$

ここで、 t : 時間、 x : 斜面上流端からの距離、 h : 水深、 q : 斜面単位幅流量、 s : 斜面単位幅貯留量、 r : 有効雨量強度、 L : 斜面長、 α , m : 斜面流定数

Kinematic wave モデルを貯留関数モデルに変換するためには両モデルパラメータ間の相互関係を定量化する必要がある。そこで、実用解析上その関数形の近似式を提案するために、(1)～(3)式を無次元化して対象変数の数を減らす。今、 Y および y_* をそれぞれ、変量 y の無次元量およびその規準化演算子と定義し、 y_* として次の諸量を採用する。

$$t_* = (L \bar{r}^{1-m}/\alpha)^{1/m} \quad (\text{到達時間}), \quad x_* = L, \quad h_* = \bar{r} t_*, \quad \dots\dots (4) \\ q_* = \alpha h_*^m = L \bar{r}, \quad r_* = \bar{r} \quad (\text{平均雨量強度}), \quad s_* = L \bar{r} t_*$$

(4)式の規準化演算子と $y = y_* Y$ の関係式を (1)～(3)式に代入すると、(5)～(7)式が得られる。

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial Q}{\partial X} = R \quad (0 \leq X \leq 1) \dots\dots (5) \quad Q = H^m \dots\dots (6) \quad S = \int_0^1 H(X, T) dX \dots\dots (7)$$

以後の解析においては無次元方程式について議論を進め、(5)～(6)式を集中化する手法を詳述する。

降雨継続時間 T_p をもつ矩形降雨波形 R に対する (5)～(6) 式の理論解、すなわち、水深 $H(X, T)$ および斜面末端での hydrograph $Q(T) = Q(1, T)$ はよく知られている¹⁾。今、 $H(X, T)$ の理論解を (7) 式に代入して整理すると (8) 式の貯留方程式が得られる。

$$S = \begin{cases} \frac{m}{m+1} Q^{1/m} + \frac{(R-Q)}{m(m-1)R^2} Q^{(2-m)/m} \frac{dQ}{dT} & (0 \leq T < T_c) \quad \dots (8a) \\ \frac{m}{m+1} Q^{1/m} & (T_c \leq T < T_p) \quad \dots (8b) \\ \frac{m}{m+1} Q^{1/m} + \frac{\{R(m-1)+Q\}(R+Q)}{m^3(m+1)R^2} Q^{(2-m)/m} \frac{dQ}{dT} & (T \geq T_p) \quad \dots (8c) \end{cases}$$

ここで、 T_c は無次元到達時間であり、 $T_c = R^{(1-m)/m}$ で与えられる。また、 Q は斜面末端での流量である。なお、(8) 式は $T_p > T_c$ の条件のもとでの解である。(8a)、(8b)、(8c) 式はそれぞれ、hydrograph の上昇部、ピーク部、および下降部に対応している。

Prasad²⁾ は $S \sim Q$ 曲線の2価性を表現するために (9) 式の貯留方程式を提案している。

$$S = K_1 Q^{p_1} + K_2 \frac{dQ}{dT} \quad \dots (9)$$

(9) 式の Prasad モデルと矩形降雨に対する (8) 式の貯留方程式を比較してみると、パラメータ K_2 は m, R のみならず Q に依存しており、定数として扱うことが困難となる。したがって、パラメータ K_2 を time invariant とするための貯留関数モデルとして次の方程式が最適であると考えられる。

$$S = K_1 Q^{p_1} + K_2 \frac{d}{dT} (Q^{p_2}) \quad \dots (10) \quad \frac{dS}{dT} = R - Q \quad \dots (11)$$

ここで、 K_1, K_2, p_1, p_2 : モデルパラメータ

(10) 式のパラメータ K_1, p_1 は (8) 式より次式で関係づけられよう。

$$K_1 = m/(m+1) \quad \dots (12) \quad p_1 = 1/m \quad \dots (13)$$

(12)、(13) 式の関係は $S \sim Q$ 曲線の1価性を仮定するとき、降雨波形に依存することなくほぼ成立していることが永井・角屋³⁾、藤田⁴⁾等によって確かめられている。したがって、本報告では、パラメータ K_2, p_2 が Kinematic wave パラメータ m および降雨特性とどのような相互関係にあるかを考察する。

3. パラメータ同定

図-1 に示される矩形および三角形降雨波形に対する Kinematic wave モデルの応答に (10)、(11) 式をあてはめ、パラメータ K_2 と p_2 の最適値探索を行なった。以下にその計算過程を簡単に述べる。

(I) 矩形降雨の場合には、無次元領域での雨量強度は $R = 1$ となり、したがって、無次元到達時間は $T_c = 1$ となる。実際の降雨流出系では $T_c < T_p$ と考えられるので、ここでは、 $T_p = 2$ と固定した。Kinematic wave 指数 $m = 1.0(0.05)2.0$ の 21 ケースについて Q と S の理論解に (10)、(11) 式を適用し、パラメータを同定した。

(II) 三角形降雨の場合、無次元領域では T_a のとき $R = 2$ となり、したがって、変数の数は指数 m 、ピーク雨量生起時刻 T_a 、および継続時間 T_p の 3 個となる。ここでは、 $T_p = 4$ 、 $m = 1.1(0.1)2.0$ 、 $T_a = 0(1)4$ の 50 ケースを選定して (5)～(7) 式の数値解に (10)、(11) 式を適用してパラメータ K_2 と p_2 を同定した。

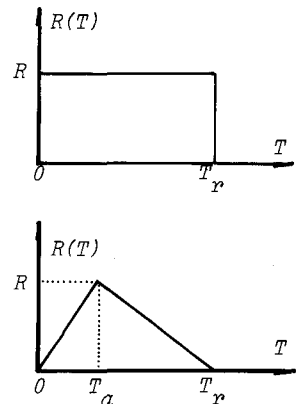


Fig. 1 Hyetograph

(III) 最適化手法として Newton-Raphson を用いた。この際、1次導関数 (感度係数) を効率よく算定するために感度解析手法を活用した。^{5, 6)} また、感度係数間に高い相関性が存在する場合には、探索が発散する方向に進む懸念があるので、その影響をおさえるために感度係数の規準化と直交変換を用いる成分回帰分析手法を最適値探索過程にとり入れた。⁷⁾ 目的関数として、流量および貯留量の残差2乗和最小化を基準とした。

(IV) 同定されたパラメータ K_2 , p_2 と Kinematic wave 指数 m および降雨特性値との関係式を最小自乗法により決定した。

以上の解析によって得られた結果のみを示す。まず、矩形降雨に関して決定された関係式は (14)、(15) 式である。

$$K_2 = \frac{1}{10} m^{1/5} \quad \dots\dots (14) \quad p_2 = (1/m)^{3/2} \quad \dots\dots (15)$$

次に、三角形降雨波形に対して決定された関数形は (16)、(17) 式である。

$$K_2 = a_1 \exp\{a_2 (T_a/T_r)\} m \sum_{i=1}^4 b_i (T_a/T_r)^{i-1} \quad \dots\dots (16)$$

$$a_1 = 0.0683, \quad a_2 = 0.3214, \quad b_1 = -0.1137, \quad b_2 = 0.7546, \quad b_3 = 1.3822, \quad b_4 = -2.0452$$

$$p_2 = c_1 \exp\{c_2 (T_a/T_r)\} m \sum_{i=1}^4 d_i (T_a/T_r)^{i-1} \quad \dots\dots (17)$$

$$c_1 = 1.3536, \quad c_2 = -0.4673, \quad d_1 = -1.3484, \quad d_2 = -1.5574, \quad d_3 = 2.7270, \quad d_4 = -1.9907$$

(14) ~ (17) 式の近似式の精度は同定されたパラメータ値に対する相対誤差で最大 5 % 以内である。

4. 実領域でのパラメータ相互関係

実際の流出計算では (10)、(11) 式の無次元方程式を次式の次元を有する方程式に変換する必要がある。

$$s_h = k_1 q_h^{p_1} + k_2 \frac{d}{dt} (q_h^{p_2}) \quad \dots\dots (18) \quad ds_h/dt_s = r_h - q_h \quad \dots\dots (19)$$

ここで、 s_h : 貯留高 (mm), q_h : 流出高 (mm/hr), r_h : 雨量強度 (mm/hr), t_s : 時間 (hr)

(4) 式の規準化演算子および (12)、(13) 式を用いると、(18) 式の次元を有する貯留係数は次式で与えられる。

$$k_1 = \frac{m}{m+1} (10^{3m-6}/3.6)^{1/m} (L/\alpha)^{1/m} \quad \dots\dots (20)$$

$$\begin{aligned} k_2 &= K_2 (10^{3m-6}/3.6)^{2/m} (L/\alpha)^{2/m} \bar{r}_h^{2/m-1-p_2} \\ &= K_2 \left(\frac{m+1}{m}\right)^2 k_1^2 \bar{r}_h^{2/m-1-p_2} \end{aligned} \quad \dots\dots (21)$$

ここで、 $\bar{r}_h$: 平均雨量強度 (mm/hr), L : 斜面長 (m), α : m -sec 単位の定数

(20)、(21) 式の物理的意義は重要である。すなわち、パラメータ k_1 は流域特性値のみに依存し、パラメータ k_2 は流域特性値と降雨特性値の双方に依存している。今、Manning 型の表面流モデルを斜面流出に適用する場合、 $m = 5/3$, $\alpha = \sqrt{\tau}/n$ (τ : 斜面勾配, n : 等価粗度 (sec/m^{1/3})) とおける。この時、 $K_1 = 5/8$, $p_1 = 0.6$ となる。また、矩形降雨を想定するとき、(14)、(15) 式より、 $K_2 = 0.11$, $p_2 = 0.465$ と推定値が得られる。三角形降雨の場合には、 T_a/T_r の値が与えられると (16)、(17) 式によりパラメータ K_2 , p_2 の推定が可能となる。たとえば、 $T_a/T_r = 0.5$ のとき、 $K_2 = 0.096$, $p_2 = 0.45$ となる。等価粗度 n の推定には、角屋⁸⁾ がその標準値をかかげている。以上の解析結果により、(1)、(2) 式の Kinematic wave モデルが (18)、(19) 式の貯留関数法に変換されたこと

になる。(20)、(21)式にさらに Hack の法則を用いるとパラメータ k_1, k_2 の実用的推定が可能となる。⁹⁾ 今、対象流域が図-2に示されるような流域モデルに単純化できるものとして、次の統計則を仮定する。

$$L = \epsilon W \dots (22), \quad A = WL_s \dots (23), \quad L_s = \beta A^\gamma \dots (24)$$

ここで、 W : 流域幅 (km), A : 流域面積 (km²), L_s : 主河道長 (km), ϵ, β, γ : 定数 上式の関係と $m = 5/3$ (Manning型表面流を想定)を(20)、(21)式に代入すれば、(25)、(26)式が得られる。

$$k_1 = 4.593(\epsilon/\beta)^{0.6} (n/\sqrt{i})^{0.6} A^{0.6(1-\gamma)} \dots (25)$$

$$k_2 = 2.56 K_2 k_1^2 \bar{r}_h^{0.2-p_2} \dots (26)$$

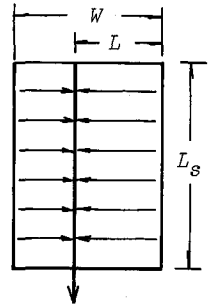


Fig. 2

Basin Model

山地流域河川を対象とした場合の定数 $\epsilon, \beta, \gamma, (n/\sqrt{i})^{0.6}$ の order は角屋・福島⁹⁾によって提示されているので、それらの値を参考にしてパラメータ k_1, k_2 の実用推定式が得られる。

5. 実流域への適用

前節までは単一矩形斜面上の表面流出を解析対象として、Kinematic wave モデルをそれと当価な貯留関数モデルに置換する手法を述べた。ここでは、両流出モデルのパラメータ間の関係式を利用して、貯留関数法を実流域へ適用してモデルの有効性を検証する。

実績洪水資料が得られている流域では、(18)式の貯留関数モデルのパラメータ k_1, k_2, p_1, p_2 の最適化が可能である。しかしながら、同定さ

Table 1 Rainfall characteristics and parameter estimates

No.	t_a/t_r	$\bar{r}_h$	K_2	p_2	$(n/\sqrt{i})^{0.6}$
1	16/33	3.23	0.0952	0.4553	1.4
2	12/24	2.24	0.0961	0.4510	1.4
3	12/23	5.38	0.0974	0.4448	1.4
4	21/27	3.77	0.1047	0.3664	2.0
5	12/26	3.00	0.0937	0.4620	2.0
6	12/15	4.21	0.1044	0.3586	2.0

れたパラメータと流域特性値および降雨特性値との相互関係を総合化しようとするれば、相当多数の流域と洪水資料が必要となろう。この問題は今後の研究課題として、ここではパラメータの最適化は一切行わず、(25)、(26)式だけを用いてパラメータ k_1, k_2 を推定し、さらに河道効果を無視して洪水 hydrograph の再現性を検討してみる。解析結果の計算手順を以下に要約しておく。(I) 比較的大きい出水と考えられる6地点(そのうち5地点はダム流域)での洪水資料を適用例として選定した。地点名、流域面積、および洪水年度は図-3中に示されている。表面流出成分の分離には、半対数紙上での hydrograph 低減部第2折曲点と立上り点を結んで直接流出高を算定した。また、有効雨量強度は流出率を用いて推定した。(II) (26)式中の K_2 (無次元量)、 p_2 は降雨波形に依存する。ここでは、観測有効雨量波形を三角形波形に置換して(16)、(17)式により K_2, p_2 を算定した。その置換方法として、2つの降雨波形の継続時間、総有効雨量、および重心を一致させ、三角形降雨波形のピーク雨量生起時刻とピーク雨量強度を決定した。図-3にはそれぞれの地点での観測 hyetograph と置換三角形波形を対比して掲げた。表-1には降雨継続時間 t_r (hr)と三角形降雨波形のピーク雨量時刻 t_a (hr)との比が示されている。表中の $\bar{r}_h$ は平均雨量強度 (mm/hr)である。なお、表-1の番号は図-3の洪水番号に対応する。全解析地点で Manning の抵抗則を仮定して、 $m = 5/3$ 、すなわち、 $p_1 = 0.6$ と固定した。表-1に示される t_a/t_r の値と $m = 5/3$ を(16)、(17)式に代入して得たパラメータ K_2, p_2 の値が表-1に示されている。したがって、係数 k_2 は(25)式の k_1 が推定されれば一義的に決定できる。(III) (22)~(24)式の定数 ϵ, β, γ はそれぞれの流域の形状特性に依存する諸量であるが、角屋・福島⁹⁾によって与えられている平均値を参考にして、全地点について $\epsilon = 0.6, \beta = 1.35, \gamma = 0.6$ と固定した。最後に残された最大の問題は factor $(n/\sqrt{i})^{0.6}$ の推定である(n :等価粗度, i :勾配)。流量資料が得られる流域では n の最適値探索も可能であるが、そうでない場合には他流域の例を参考にして推定せざるをえない。さらに、対象流域を1ブロックで

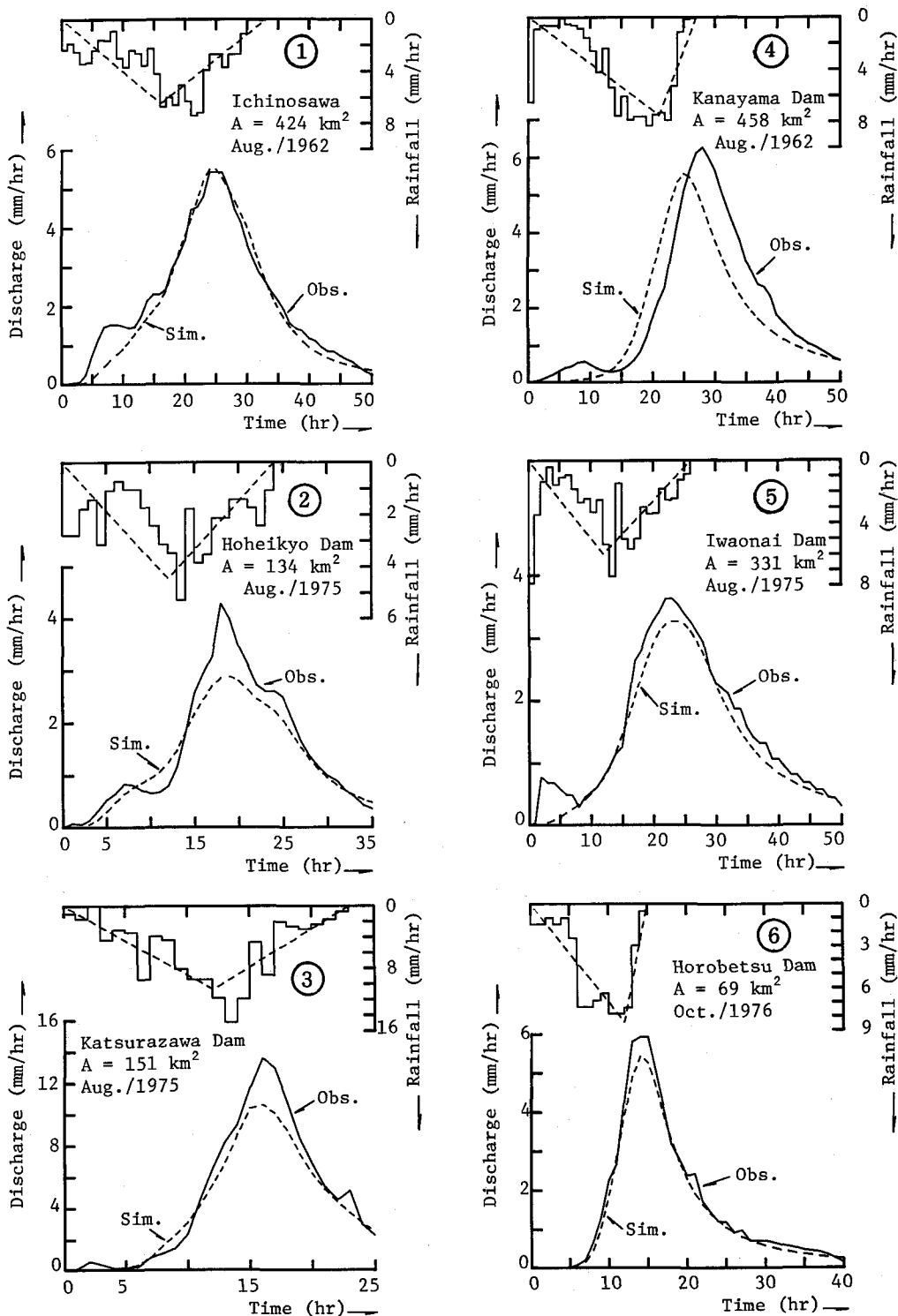


Fig. 3 Syntheses of flood hydrographs

単純化して流出計算を行なう場合には、平均勾配 i の推定が困難である。ここでは、表-1に示される2種類の値を $(n/\sqrt{t})^{0.6}$ の factor として採用した。(IV) 上述した方法により貯留関数モデルパラメータ k_1, k_2, p_1, p_2 が推定されたので、(18)、(19)式を Runge-Kutta-Gill 法により解き、直接流出高 q_h を得た。図-3には計算 hydrograph と実測 hydrograph を対比して示した。

最も単純な流域モデルを設定し、未知定数を同一の値に固定したにもかかわらず、計算 hydrograph の形状特性は実測 hydrograph のそれによく符合していると考えられる。

6. お わ り に

貯留関数法の開発経緯をふりかえってみると、1960年代後半以来貯留関数モデルそのものの開発・改良については著しい進展はみられない。貯留関数法は計算の容易さのため実際の流出解析に久しく専用されてきた反面、従来の貯留関数モデルではパラメータの物理的意義を定量的に評価することはきわめて困難である。

本報告では貯留量 ~ 流量曲線の2価性を表現するにはどのような構造式が適当であるかを Kinematic wave 理論解から明確にし、新しい貯留関数モデルを提案した。また、矩形および三角形降雨波形に対する Kinematic wave モデルと貯留関数モデルのパラメータ相互の関係式を提案し、併せてパラメータ実用推定式の有効性を実績洪水資料を用いて検証した。この推定式はパラメータ最適値探索の初期値設定および流出の逐次予測のためのパラメータ初期値設定にも有効となろう。

対象流域が大きい場合の流出計算では、流域をいくつかの小流域に分割して単位流域からのハイドログラフを河道要素で合成・伝播させる方法が通常とられている。Kinematic wave 法では単位流域数が多くなると計算のはん雑さと計算量の増大はまぬがれ得ない。ここで提案した貯留関数法は Kinematic wave 法と当価なモデルに集中化されているので、単位流域数が多くても流出計算を迅速に行なうことができる。Kinematic wave モデルは河道流出過程を(1)、(2)式と同一のモデル構造式で表現できるので、(18)、(19)式は河道洪水追跡にも適用できる。このとき、河道横流入量 hydrograph は多くの場合三角形波形に近似できるので、(16)、(17)式をパラメータ推定に用いることができる。

最後に、本研究は文部省科学研究補助費、一般研究 C (課題番号 : 56550344) の援助を受けた。記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Eagleson, P.S., Dynamic Hydrology, McGraw-Hill Book Co., 1970.
- 2) Prasad, R., A Nonlinear Hydrologic System Response Model, Jour. of Hydraul. Div., Proc. of the ASCE, Vol.93, No. HY4, 201-221, 1967.
- 3) 永井 明博, 角屋 睦 : 洪水流出モデルの適用比較 - 丘陵山地流域及び市街地流域を対象として - 京都大学防災研究所年報, 第21号, 235-249, 1978.
- 4) 藤田 睦博 : 斜面長の変動を考慮した貯留関数法に関する研究, 土木学会論文報告集, 第314号, 75-86, 1981.
- 5) Vemuri, V., Dracup, J.A., Erdmann, R.C., and Vemuri, N., Sensitivity Analysis Method of System Identification and Its Potential in Hydrologic Research, Water Resources Research, Vol.5, No.2, 341-349, 1969.
- 6) 吉川 秀夫, 砂田 憲吾, 鈴木 顕 : 流量減速部の特性を考慮した流出モデル, 第22回水理講演会論文集, 175-180, 1978.
- 7) 星 清, 山岡 勲 : 非線形流出系のパラメータ同定 - 感度解析と成分回帰分析の併用 -, 土木学会北海道支部論文報告集, 第37号, 243-248, 1981.
- 8) 角屋 睦 : 流出解析手法 (その 6), 農業土木学会誌 第48巻 第6号, 37-43, 1980.
- 9) 角屋 睦, 福島 晟 : 中小河川の洪水到達時間, 京都大学防災研究所年報, 第19号, 143-152, 1976.