

非平衡な浮遊砂濃度の算定法に関する研究
On the Calculation Method of the Concentration of Suspended
Sediment under Non-equilibrium Condition

京都大学防災研究所 正員 青 田 和 男
徳島大学工学部 正員 岡 部 健 士

1. 概 説

洗掘や堆積を伴ういわゆる非平衡浮遊砂に関する諸問題は、一般に、与えられた初期条件と境界条件のもとでFick-typeの拡散方程式を解くことに帰着される。このとき、解の信頼性は、拡散係数と路床条件の与え方がどの程度実現象に則しているかによって決るが、両者に関する知見には不十分な点が多い。

著者らは、等流に近い流れのある断面の非平衡な浮遊砂濃度分布が、流下とともに発達あるいは減衰して、その流れに見合う平衡濃度分布となる過程（図-1参照）を観測する実験を行った（表-1）。そして、拡散係数については、非平衡現象においてそれがいかなる性質を示すかを調べるとともに、一方の路床条件については、従来提案された諸式の妥当性を実証的に検討した。このような実験の概要ならびに結果の一部はすでに既報^{1), 2), 8)}で発表されているが、本論文ではこれまでの成果が総括される。さらに、路床条件式がとくに不備な点を重視して、これに対する新たなモデルを提案し、その検証を行う。

2. 非平衡現象における拡散係数

拡散係数は、流れの乱流構造に固有の量とする取り扱いが普通であり、平衡状態の現象を説明する拡散係数の表示式が、そのまま非平衡現象の解析にも使用されている。線型拡散理論に立脚する限り、これは当然のことかも知れないが、直接的な実証例が極めて乏しい。そこで、濃度計測資料より、(1)式に従って、平衡ならびに非平衡領域の拡散係数 ϵ を算定し、両者の比較をしてみた。

$$u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon \frac{\partial c}{\partial z} \right) + w_f \frac{\partial c}{\partial z} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 u ；流速、 c ；浮遊砂濃度、 ϵ ；拡散係数、 w_f ；粒子の沈降速度、 x ；流れ方向の座標、 z ；路床からの距離。

さて、一樣砂（粒径 $d=0.15\sim0.18\text{mm}$ ）を用いて行われた濃度分布減衰過程の実験結果ならびに、これより求めた ϵ の分布図を、それぞれ図-2および図-3に示している。また、7号珪砂を用いた発達過程の実験については、浮遊砂サンプルを沈降分析して $w_f=1.0\sim1.5\text{cm/s}$ 、 $1.5\sim2.0\text{cm/s}$ および $2.0\sim2.5\text{cm/s}$ に相当する部分の濃度を求め、それぞれについて ϵ を算定した。その結果を図-4に示している。図-3、4より、 ϵ の断面内分布性状は、現象が平衡か非平衡かによって相違しないことを確認することができる。なお、これらの実験は、河床波がない条件下で行われたものであるが、河床波がある場合においても同様の結論が得られている。さらに、図-4では、 ϵ に及ぼす粒径の効果についても検討されている。 w_f が増加すると ϵ が若干減少する傾向が認められる。

ところで、図に示された ϵ の値は、Rouseが導いた分布式

表-1 実験条件

Run	Sand	Bed Config.	Process
1	uniform	wavy	increasing
2	uniform	wavy	increasing
3	uniform	wavy	decreasing
4	uniform	wavy	decreasing
5	uniform	flat	increasing
6	uniform	flat	decreasing
7	mixed	flat	increasing
8	mixed	flat	decreasing

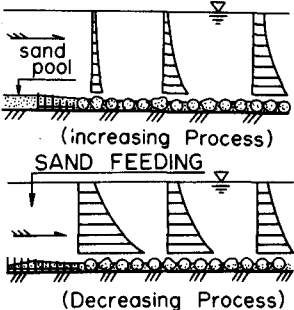


図-1 濃度変化の模式図

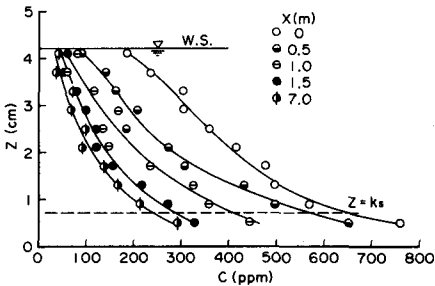


図-2 濃度分布の実測値（減衰過程）

によって計算されるものの2~2.5倍程度と、かなり大きい値をもっている。この点はよく引用されるVanoniの実験結果とは異なっているが、これと同様の傾向は本実験以外のいくつかの実験でも見出されており、必ずしも特異なことではない。しかし、その理由については判然としないので今後の課題としたい。

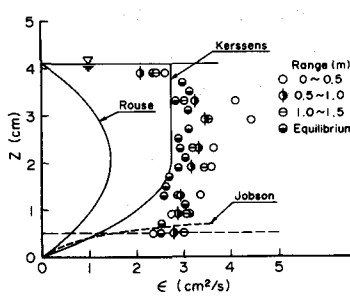


図-3 拡散係数の分布

3. 従来の路床条件式に関する検討

従来、路床条件式として表-2に示した8種の形式のものが提案されている⁴⁾。実際問題を取り扱おうとする場合、いずれを選ぶかが問題となるので、これらの妥当性を検討しよう。このとき基準高さ z_R の選び方によって結論に若干の差がでるが、本論文では、一応Yalin⁵⁾らの考え方に準じて、河床波がない場合には $z_R = k_s$ (相当砂粒粗度高)、河床波がある場合には、 $z_R = 4/2$ ($1/2$ 河床波高)としておく。

図-2を見ても明らかなように、1型の条件式は上述のような z_R による場合適切ではない。これは図-2以外の実測結果についても等しく言えることである。もちろん、 z_R を小さくしてゆけば $c_R = c_{Re}$ となるかも知れないが、その場合には浮遊砂の解析領域の一部が河床波や停止している砂礫で占められる恐れが多分に生じてくる。

つぎに2型について考えてみよう。これは、乱れ的作用により基準面の単位面積要素を通して生じる濃度 flux (q_{sf}) が、砂粒子と流れに固有のものであると仮定して、平衡状態の鈎合条件から

$$q_{sf} = w_f c_{Re} \quad \dots\dots\dots (2)$$

を得、さらに拡散係数の定義に従って上式を書き直したものである。したがって、ここでは(2)式を検討する。

$$(1) \text{式を } z = z_R \sim h \text{ の間で積分し、水面条件 } (z = h, \epsilon \partial c / \partial z + w_f c = 0)$$

を考慮して変形すると、

$$\frac{d}{dx} \int_{z_R}^h c u dz = q_{sf} - w_f c_R \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。上式に基づいて隣り合う濃度測定断面間の q_{sf} の平均値を求め、(2)式の関係の検討を行ったのが図-5である。これより、2型の条件式も一般性を持たないことがわかる。ただし、およそ $c_R / c_{Re} = 0.85 \sim 1.23$ の範囲内では、 $q_{sf} / w_f c_{Re} = 0.95 \sim 1.05$ となっており、ある程度平衡状態に近い現象の解析には、

表-2 従来の路床条件式

1型	$c_R = c_{Re}$
2型	$\epsilon \partial c / \partial z _{z_R} + w_f c_{Re} = 0$
8型	$\epsilon \partial c / \partial z _{z_R} + K w_f c_R = 0$
z_R : 基準面高さ, c_R : 基準面濃度, c_{Re} : 平衡状態で c_R , K : 係数	

これもかなり有

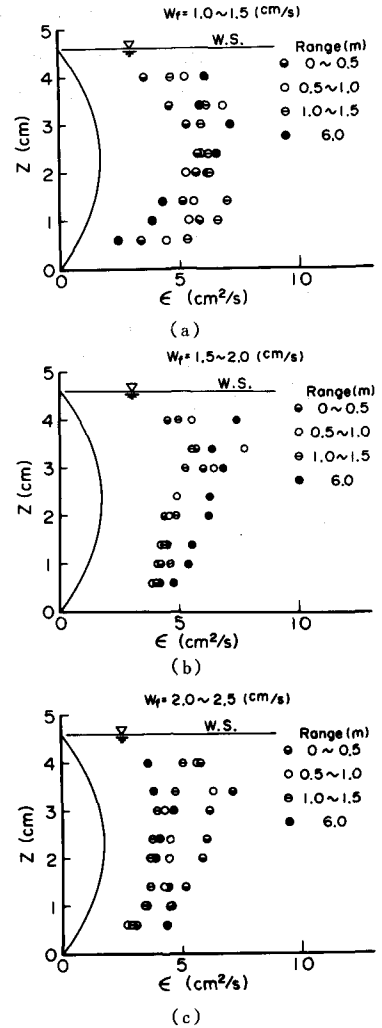


図-4 沈降速度別濃度分布に対する拡散係数

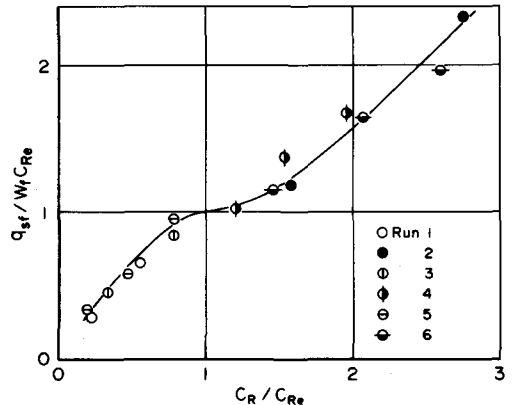


図-5 路床条件式2型に関する検討図 (一様砂の場合)

用であると思われる。

最後に3型は、 $q_{sf} \propto c_R$ を仮定したものと解釈できる。しかし、図-5を見れば、実現象はそれ以上に複雑であることが理解されよう。

以上のように、従来の路床条件式はいずれも十分なものではないことがわかる。

4. 路床条件式の提案

近年、剪断乱流場の内部構造は、bursting現象と称される大規模で比較的規則的な流動現象に支配されていることが明らかとなり、これに関する研究が進められている^{6), 7)}。著者らは、底面近傍の浮遊砂の挙動もまたbursting現象によって支配されるのではないかという考えに基づいて、理論的に路床条件式を誘導した。

4-1 Bursting Cycleにおける砂粒子の挙動モデル

はじめに、bursting現象は、ejection $\rightarrow$ sweep $\rightarrow$ interaction という形態の異なる流動事象のcycleであるとみなし、各事象中の粒子の挙動を考察してみよう。考察の出発時点はejectionの完了時点に置く。この直前においては、burstingと称されるに見合う、急激な流体塊の浮上が起っている。

さて、ejectする流体塊は、その中に含まれていた粒子のほとんど全てをかなり上方まで連行するであろう。一方、路床表面を構成する粒子は、ejection事象中に極めて大きい揚圧力を受けて非常に不安定な状態になる。しかし、慣性のために、これが十分な上昇速度を持つに至るまでには若干の時間を要し、またejectionはその時間占有率が1%にも満たないほどパルスの的に生じる⁷⁾ことを考えると、それらがすぐさまejectする流体塊と共に浮上してゆくとはみなし難い。ejectionによって誘起されるsweep事象においては、比較的大きい速度をもつ流体塊が、直前のejectionで生じる“抜け穴”を補填すべく、若干下向きに侵入してくる⁸⁾。なお、この時点では、流体塊の粒子濃度は、“抜け穴”の頂部に相当する高さにおけるEuler的時間平均濃度にほぼ等しいと考えてよからう。このあと、侵入してきた流体塊は暫時路床に接しつつ流下するが、その間に下記のような粒子交換が生じる。すなわち、

- i) 流体塊の底面を通して、直前のejectionで不安定になった粒子が、掃流現象に類した形式で取り込まれる⁶⁾と同時に、
- ii) 重力作用による粒子の離脱がある。さらに、
- iii) 流体塊の頂面を通して、重力作用による粒子の流入がある。

なお、この期間はいわゆるinteraction時象であって乱れの強さがかなり低下するので、頂面を通る乱れによる粒子fluxは無視し得るであろう。このようにして流体塊はその粒子濃度を増大させるが、いつまでも路床近傍に止まることは不可能であって、周辺の流体との間の不安定性があるlevel以上になると、突然にejectionが生じる。

以上、1回のbursting cycleにおける粒子の挙動を推論した。著者らのモデルが実際の流れにおける粒子の挙動とどの程度一致するかについては、今後実験などにより直接検討されねばならないが、この考え方により誘導された路床条件式が現象をかなりよく説明することから、妥当なものであると考えている。

4-2 路床条件式の誘導

流れはほぼ定常であり、 x 方向にも急激な変化はないとする。また、浮遊砂現象も比較的定常性が強く、Fick-typeの拡散式で記述したときに、 $\partial c / \partial t = 0$ とすることが出来る場合を考える。

図-6に示すように、時刻 $t=0$ において、sweepにより路床に近付いた流体塊が $x=x-x_{\text{le}}$ の点で路床と接触し、一定の速度 u_b をもって、 $0 \leq t \leq t_e$ (bursting現象の平均周期)の期間路床との接触を保ちながら流下して、 $x=x$ の点でejectしたとする。この間、流体塊中の粒子濃度 $\hat{c}$ は、4-1で述べた機構に支配されるが、簡単のために流体塊中の空間的な濃度変化を無視すると、 $\hat{c}$ は近似的に次式のように

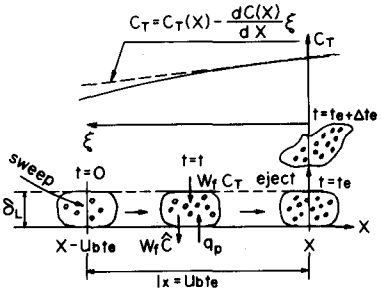


図-6 流体塊の粒子交換に関する模式図

表わされる。すなわち、流体塊の体積を V_L として、

$$V_L \frac{d\hat{C}}{dt} = \underset{\textcircled{1}}{A_B q_P} + \underset{\textcircled{2}}{A_T w_f c_T} - \underset{\textcircled{3}}{A_B w_f \hat{C}} \quad \text{..... (4)}$$

ここに、①は、流体塊と路床面との接触面積 A_B を通して、単位時間あたりに取り込まれる粒子量であり、 q_P はその面積平均値、②は、流体塊の頂面(有効面積 A_T)を通して重力の作用により流入する粒子量であり、 c_T は、 $z = \delta_L$ における周辺流体の粒子濃度、③は、重力の作用により接触面(有効面積 A_B)を通して流体塊から離脱する粒子量である。なお、 V_L 、 A_B 、 A_T および q_P は一定値に保たれるものとしておく。

(4)式は、このままでは取り扱いにくいので、流体塊は高さ δ_L の直方体であると仮定してこれを次式のように簡略化する。

$$\delta_L d\hat{C}/dt = q_P + w_f c_T - w_f \hat{C} \quad \text{..... (5)}$$

ここで c_T について考えてみよう。流れの砂粒濃度は流下方向に変化するので、 c_T は t の関数となるが、本来これは解の一部なので、完全に陽な形式では表示できない。したがってこれについても、次に述べるようになかなり大胆な取り扱いをせねばならない。すなわち、図-6の ξ について、 c_T が次式のように表示できるものとする。

$$c_T = c_T(x) - dc_T(x)/dx \cdot \xi \quad \text{..... (6)}$$

ここに、 $c_T(x)$; Euler 的に見た場合の $z = \delta_L$ における濃度である。本質的には c_T と同じものであるが、混乱を防ぐために表示法を変えている。そして、 $\xi = u_b(t_e - t)$ なる変換式によって(6)式を、次式のような t に関する式に書き直す。

$$c_T = c_T(x) + u_b dc_T(x)/dx \cdot (t - t_e) \quad \text{..... (7)}$$

このようにして得られた(7)式を(5)式に代入し、初期条件

$$t = 0 : \hat{C} = c_T(x) - u_b t_e dc_T(x)/dx \quad \text{..... (8)}$$

で解けば次式が得られる。

$$\hat{C} = \left(\frac{q_P}{w_f} - \frac{u_b \delta_L}{w_f} \frac{dc_T(x)}{dx} \right) \left(1 - e^{-\frac{w_f}{\delta_L} t} \right) + u_b \frac{dc_T(x)}{dx} (t - t_e) + c_T(x) \quad \text{..... (9)}$$

そして、 $t = t_e$ における濃度 $\hat{C}_e$ は、つぎのようになる。

$$\hat{C}_e = \left\{ \frac{q_P}{w_f} - \frac{u_b \delta_L}{w_f} \cdot \frac{dc_T(x)}{dx} \right\} \left(1 - e^{-w_f/\delta_L \cdot t_e} \right) + c_T(x) \quad \text{..... (10)}$$

さて、時刻 $t = t_e$ において生起する ejection のために、考えている流体塊が極めて短かい時間 Δt_e 内に、単位面積の水柱あたり M_f の粒子を連行するとすれば、 M_f は、

$$M_f = \delta_L \hat{C}_e \quad \text{..... (11)}$$

と表わされる。そして、界面物質移動に関する更新理論を参考にすれば、 M_f は $z = \delta_L$ における時間平均的拡散 flux $\hat{q}_f$ と次式のように関係付けられる。

$$\hat{q}_f = \frac{K_e}{t_e + \Delta t_e} \cdot M_f \simeq \frac{K_e}{t_e} M_f \quad \text{..... (12)}$$

ここに、 K_e は、実際問題への適用を行う場合には必要となる補正係数である。

さらに、 $z_R = \delta_L$ とおくことにすれば、(10)~(12)式より、浮遊砂解析の基準面における q_{sf} は、

$$q_{sf} = K_e \frac{z_R}{t_e} \left\{ \left(\frac{q_P}{w_f} - \frac{z_R u_b}{w_f} \cdot \frac{dc_R}{dx} \right) \left(1 - e^{-w_f/z_R \cdot t_e} \right) + c_R \right\} \quad \text{..... (13)}$$

のように表示される。最後に、評価が困難な q_P を、

$$c_R = c_{Re}, \quad dc_R/dx = 0 : q_f = w_f c_{Re} \quad \text{..... (14)}$$

なる関係式を用いて消去し、拡散係数の定義式に従って(13)式を書き直せば、次式のような路床条件式が求まる。

$$z = z_R : \epsilon \frac{\partial C}{\partial z} + w_f c_{Re} \left\{ 1 + K_e \frac{z_R}{w_f t_e} \left(\frac{c_R}{c_{Re}} - 1 \right) - K_e \frac{z_R^2 u_b}{w_f t_e} \left(1 - e^{-w_f/z_R \cdot t_e} \right) \frac{dc_R/dx}{c_{Re}} \right\} = 0 \quad \text{..... (15)}$$

本式において、 $\{ \}$ 内の式は $q_{sf}/w_f c_{Re}$ を表示したものである。一般に、 $|c_R/c_{Re}-1|$ が大であるほど $|dc_R/dx|$ も大であるから、図-5に示された $q_{sf}/w_f c_{Re} \sim c_R/c_{Re}$ の關係の定性的傾向は、それによって明快に説明し得る。したがって、(15)式は十分に妥当なものであると推察される。

4-3 数値計算による検討

提案された路床条件式を、一様砂を用いて行われた河床波がない場合の実験に適用し、有用性を検討してみた。以下において、その概要と結果を紹介する。

(1)式をimplicitな差分法で離散化し、最上流断面の実測濃度分布を上流端条件として与えて、流下に伴う濃度分布の变化過程を計算した。このとき、(14)式中の t_e は、bursting周期に関する既往の研究成果^{7), 9)}を参考にして、次式により算定された。

$$t_e = 3.0 h / V_\infty \dots\dots\dots (16)$$

ここに V_∞ は水面流速であり、これと(1)式中の u および(15)式中の u_b は、実測資料から算定された u_* と h_s を用い、対数則を適用して算定された。また、 ε と c_{Re} にも実測値を用いた。なお、 x および z の差分間隔 Δx および Δz は、それぞれ $\Delta x/h = 0.1$ 、 $\Delta z/h = 0.02$ とした。

まず、濃度分布の発達過程を対象として数値計算をくり返し、実際結果を良好に再現する K_e を模索した。その結果、 $K_e = 0.5$ とするのが適当であることが判明した。図-7は、この場合の計算値と実験値の比較図である。つぎに、このようにして得られた K_e を用いて、図-2の減衰過程に関する計算を行い、得られた結果と実測値を比較したのが図-8である。本図においても、算定された濃度分布曲線と実測の描点とが比較的よい対応を見せることは、(14)式を路床条件式とする本計算法が満足すべきものであることを裏付けている。

5. 結 語

本論文では、まず、等流中で行われた非平衡浮遊砂実験に基づき、非平衡現象の拡散係数の性質および従来の路床条件式の適合性を考察した。その結果、流れと粒子の性質が同一であれば、平衡現象の拡散係数と非平衡現象のそれとは一致することが実証された。

ただし、その定量評価法については、若干の問題が残された。一方、従来の路床条件式については、いずれもかなり不備であることが指摘された。そこで、Bursting現象に着目した粒子交換モデルにより、(14)式のよな路床条件式を新たに提案し、その適用性を検証した。

参 考 文 献

- 岡部・杉尾・石川；河床波上の流れにおける非平衡浮遊砂の流送について、第35回年講、Ⅱ-161, 1980, pp. 319-320.
- 岡部・杉尾；非平衡状態にある浮遊砂の流送機構に関する実験的考察、第33回中四年講、Ⅱ-17, 1981, pp. 85-86.
- 岡部・杉尾；河床波上の流れにおける非平衡浮遊砂の流送特性とその解析、第36回年講、Ⅱ-300, 1981, pp. 597-598.
- 芦田；浮遊砂、水工学に関する夏季研修会講義集、水理委員会、A-4, 1974, pp. 14-19.

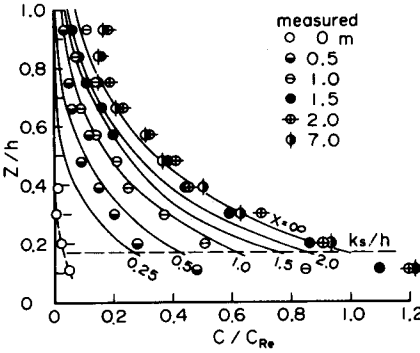


図-7 計算値と実験値の比較(発達過程)

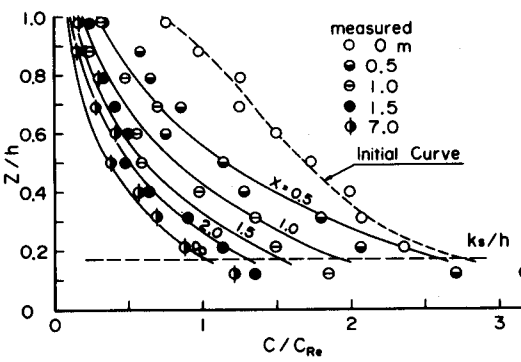


図-8 計算値と実験値の比較(減衰過程)

- 5) Yalin · Finlayson ; On the Development of Suspended Load , Proc. of IAHR, Vol. 1, Turkey , 1973, pp. 287-294.
- 6) Grass ; Structural Features of Turbulent Flow over Smooth and Rough Boundaries , JFM. Vol. 50, part 2 , 1971, pp. 233-255.
- 7) 中川 · 祢津 ; せん断乱流の bursting 現象とその物理モデル , 第22回水理講演会論文集 , 1978, pp. 29-36.
- 8) 中川 · 祢津 ; 水素気泡法による開水路流の乱れの可視化 , 第5回流れの可視化シンポジウム , 1977, pp. 47-50.
- 9) Jackson ; Sedimentological and Fluid-dynamic Implications of the Turbulent Bursting Phenomenon in Geophysical Flows , JFM Vol. 77, part 3, pp. 531-560.