

掃流砂の確率特性に関する研究 Study of the Probability of bed load

早稲田大学理工学部 学生員 〇井筒 庸雄

早稲田大学理工学部 正 員 吉川 秀夫

早稲田大学理工学部 学生員 藤堂 正樹

早稲田大学理工学部 学生員 松梨 史郎

1. 序論

流砂の現象をその確率性に着目して取り扱った研究は、¹⁾アインシュタイン以来、多くの研究者²⁾によってなされている。これらの研究は、砂粒子の単位時間当りの平均離脱率 $\bar{P}_s$ と、移動を開始した粒子が次に停止するまでの距離、いわゆる Step Length l 、とによって構成されている。これらの研究で、step - Length は、指数分布をしており、又、平均離脱率 $\bar{P}_s$ は rest Period の分布を検討し、その平均値の逆数が平均離脱率 $\bar{P}_s$ に一致することから求められている。又、平均離脱率 $\bar{P}_s$ を流体力との関連から、直接推定した研究³⁾もある。これらの取り扱いで、平坦河床における流砂の現象への個々の確率変数の適用は、その平均値を用いて行なわれている。

筆者らは、平衡平坦河床においても、流砂量が変動しており、これは、 P_s 等の確率変数の変動に由来するものであるとし、本研究では、 P_s の変動及び流れの乱れを調べ、これらの関連について述べ、粒子の離脱速度に関しても言及する。

2. 実験

本研究では、長さ10m、断面 40cm×30cmの風洞、及び、長さ4m、断面8cm×7cmの長方形断面管路を用い、空気の場合、 $d_N = 0.25\text{cm}$ (等価球形⁴⁾)、比重 $\rho_s / \rho_w = 1.26$ の塩化ビニル片、水の場合、 $d = 0.5\text{cm}$ 、比重 $\rho_s / \rho_w = 2.5$ のガラスビーズを、それぞれ流路に敷き、移動床において、任意断面上、河床と同材料のものを着色したトレーサーを、いくつか敷き、河床鉛直上から、Video に撮影し、各トレーサーの移動を読み取り、 P_s の分布を求めた。又、空気の場合、移動床実験と合わせて床面を固定床にして、熱線流速計によって乱れの測定も行なった。

3. 砂粒子に作用する力の評価

今、流れの粘性底層は、粒径に比べて十分に小さく、粒子は流れにさらされているとき右図のような力のつり合いが成立している。

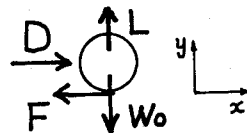


図1 力の評価

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{1}{2} \rho_f C_D (\bar{U} + U')^2 A_1 d^2 & \bar{U} + U' &= U; \text{流体の速度} \\
 L &= \frac{1}{2} \rho_f C_L (\bar{U} + U')^2 A_1 d^2 & \bar{U}; \text{流体の速度の時間平均値, } U'; \text{流体の速度の変動値} \\
 W_0 &= (\rho_s - \rho_f) A_2 d^3 & \rho_s, \rho_f; \text{粒子及び流体の密度, } d; \text{粒径, } \mu; \text{摩擦係数} \\
 F &= \mu (W_0 - L) & A_1; \text{面積係数 } A_2; \text{体積係数}
 \end{aligned}$$

球が移動するための条件は、 $D \geq F = \mu (W_0 - L)$ の時である。これを整理すると

$$\bar{U} + U' \geq \sqrt{\frac{2A_2}{A_1} \cdot \frac{\mu}{(C_D + \mu C_L)} \cdot g \cdot d \cdot (\rho_s / \rho_f - 1)} = U_c \quad \dots\dots(1)$$

となる。

上式の右辺の U_c は、河床構成材料の性質で決まる速度の次元であり、各諸定数を与えれば求めることができるであろう。この U_c と左辺の関係を求めることによって砂粒子の移動をとらえる。

左辺中の U は、砂粒に影響を与える流れの河床近傍での時間平均流速であるが、この値に関しては、従来よりいろいろな評価が試みられているが、いずれにしても流速分布に対数則を与え、河床底面から粒径オーダーの位置での流速を求めている。ここでも従来の研究と同じように扱う。すなわち流速分布に対数則をあてはめ、摩擦速度 U_* 、 y_0 を $\bar{U}$ を与える位置とする

$$\bar{U} = (8.5 + 5.75 \log_{10} \frac{y_0}{K_s}) U_* = a U_* \quad \dots\dots(2)$$

と(2)式ようになる。ここで相当粗度 K_s が河床構

成材料の粒径 d に等しく y_0 を d の位置にとれば、
 $a = 8.5$ となる。

$$(1 + \frac{U'}{\bar{U}}) \bar{U} = (1 + \frac{U'}{\bar{U}}) \cdot a U_* \quad \dots\dots(3)$$

さて(1)式の左辺を書き直すと(3)式となり、(1)式の両辺がそれぞれ求めることができる。なお(3)式中の $U'/\bar{U}$ は、流れの乱れを表わしており、 $f(1 + U'/\bar{U})$ は、乱れの確率密度関数である。

○ 砂粒子の離脱率 P_s

今 U の持続時間を Δt とすると、この Δt 時間中に、河床単位面積中の砂粒子の個数 N から i 個の粒子が

$$P_s = \frac{i}{N} \cdot \frac{1}{\Delta t} \quad \dots\dots(4)$$

移動したとすると、単位時間当りの砂粒の離脱率 P_s は、(4)式のように考える。 $\text{Prob}\{ \}$ は、 $\{ \}$ 内の起こる確率を表わす。

ある一定の流れが与えられた時 $U > U_c$ を満足する各値に対して P_s は、(4)式のように求まる。ここで(4)式中の i は、 U の大きさによって定まると思われる。この U は、確率変数であるから、 U によって主に支配される P_s も確率変数である。 $U > U_c$ を満足する U の中で、 $U = U_c$ に対応する P_s を P_{s0} とすると、

$$\text{Prob}\{ P_{s0} \leq P_s \leq P_{s0} + \Delta P_s \} \sim \text{Prob}\{ U_c \leq U \leq U_c + \Delta U \} \quad \dots\dots(5) \quad \text{となる。}$$

(5)式の右边は、 $U > U_c$ という条件付であるから、次のような関係が成立すると考えられる。

$$E\{ P_s \} \sim \text{Prob}\{ U > U_c \} \quad \dots\dots(6)$$

確率変数 P_s は、以上の考え方によって、その分布特性を論じることができる。

○ 粒子の初期移動速度 w

粒子の初期移動速度 w は、ある一定の流れが与えられた場合、次のように考えていく。

流体の速度 U と粒子の間で Δt 時間内での運動量の交換は、

$$\begin{aligned} M_f &= \rho_f \cdot A_1 d^2 \cdot (\bar{U} + U')^2 \cdot \Delta t \\ M_f &= M'_f + M_s \quad \dots\dots\dots(7) \quad M'_f = \rho_f \cdot A_1 d^2 (\bar{U} + U')^2 \cdot \Delta t \\ M_s &= (\rho_s - \rho_f) A_2 d^3 w \quad \text{;} \text{交換前後の速度比} \end{aligned}$$

$$w = g(\bar{U} + U') = A \cdot (\bar{U} + U')^2 \dots\dots(8)$$

(8)式により $U = \bar{U} + U'$ が確率変数であるので、 w も確率変数である。従って $U = U_c$ に対応する w を $w = w_0$ とすると

$$\text{Prob}\{ w_0 \leq w \leq w_0 + \Delta w \} \sim \text{Prob}\{ U_c \leq U \leq U_c + \Delta U \} \quad \dots\dots(9)$$

(9)式によって w の確率密度関数は求まる。しかし、(8)(9)式によって求まる w の密度関数は、實際上、無意味と思われる w に対しても密度が存在するので、 $w \geq w_c$ を満足する w についての密度関数を求めなくてはならない。これは、(9)式より求まる w の密度関数を $f(w)$ とすると、

$$f(w | w \geq w_c) = f(w) / \int_{w_c}^{\infty} f(w) dw \quad \dots\dots\dots(10)$$

となる。

4. 実験結果について

さて上で述べた(5)式と(9)式は、別々に求めてきたものであるが、その形式は、同じ形になっている。

そこで実験で求まった P_s の確率密度関数、及び w の確率密度関数を、図-2, 3に示す。

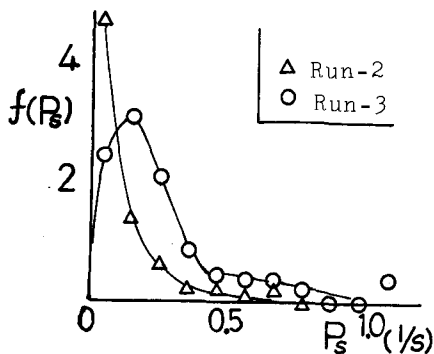


図2 P_s の確率密度関数

尚、結果は、風洞における実験結果であり、縦軸は確率密度である。Run-2 及び3の無次元掃流力 τ_* ($= U_*^2 / g \cdot d \cdot (\rho_s / \rho_f - 1)$) は、それぞれ 5.2×10^{-2} , 5.66×10^{-2} である。

図-2と3は、非常に対応がよく、(5)と(9)式との対応が確認できる。

次に P_s の変動係数を τ_* とプロットしたものが図-4である。図中の白抜が、風洞における実験で、黒丸は、水中における実験である、図から P_s の変動係数は減少していく傾向にあることが分る。すなわち P_s の平均値への集中度は、 τ_* につれて大きくなっていくということである。但し、 S は P_s の標準偏差。

さて、3. で述べたように、 P_s は、乱れの成分を含んだ流速 $U = (\bar{U} + U')$ によって評価することができると考えられるが、 U は、 U' が変動するため、 U' の分布によって分布が支配される。今回の風洞実験で得られた U' の r. m. s. $\sqrt{\overline{U'^2}}$ をプロットしたものが、図-5である。風速は、数段階に変えて行っているが、Laufer等⁵⁾⁶⁾の結果と良い一致を見た。

筆者らの実験結果からも相当粗度 K_s 近傍では、 $\sqrt{\overline{U'^2}} / U_* \div 2.0$ という値を与えることができる。 U の変動係数 $\sqrt{\overline{U'^2}} / \bar{U}$ は、(2)式における y_0 と K_s の値に一定値を与えれば、一定と考えることができる。

筆者らの実験では、 K_s が、 d_N (等価球形) に比べて大きく、 y_0 が d_N の近傍付近での変動係数の実測値を求めることができない。これは、実験に用いた材料が、かなり偏平していたためである。

今ここで、試みに図-5より、 $y_0 = d_N$ 及び $y_0 = 0.5 d_N$ の場合の $\sqrt{\overline{U'^2}}$ を求め、変動係数 $\sqrt{\overline{U'^2}} / \bar{U}$ を求める。

さて、 U が正規分布すると仮定すれば、(1)式の砂粒の移動条件 $U > U_c$ の起こる確率を求めることができる。この確率と、 P_s の平均値をプロットしたものを、図-6、7に示す。

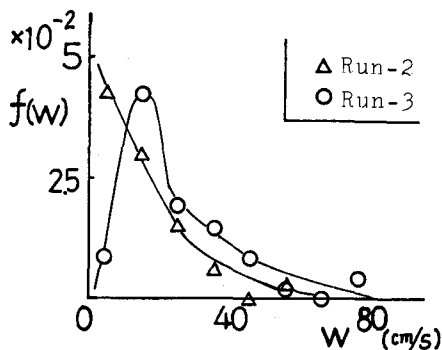


図3 w の確率密度関数

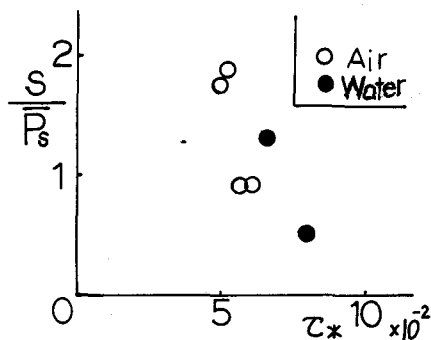


図4 P_s の変動係数と τ_* の関係

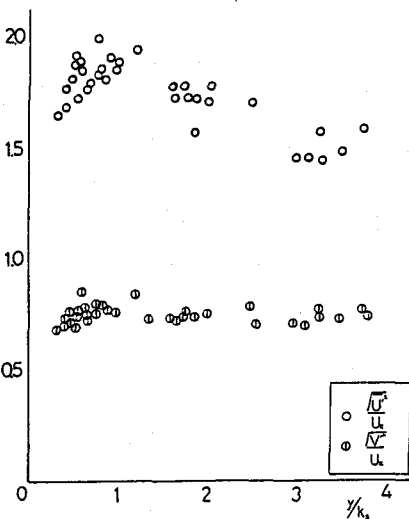


図5 乱流強度の鉛直方向分布

これは、実験に用いた材料

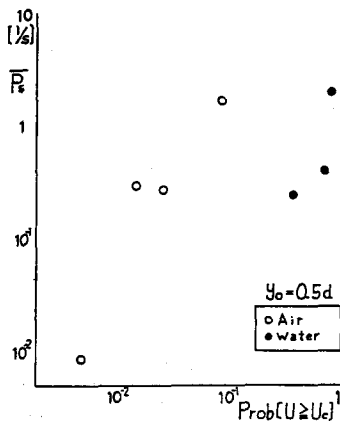


図6 $\bar{P}_s$ と U の超過確率との関係

両図で白抜きは、空気、黒丸は、水のときの実験である。

図-6, 7は、その勾配が少し変わるが、(6)式の関係が成立するようである。

さてここで、(1)式の U_c を決めるには、粒子の諸定数を、決めなくてはならないが、ここでは、簡単のため、粒子は、球としているが、 U_c によって、この対応関係自体は、変化しない。

(なお水の実験の場合、 W_0 は、付加質量を考慮した。)

横軸の $\text{Prob}\{U > U_c\}$ の値を求めるには、さらに $\sqrt{\bar{U}^2}/\bar{U}$ の値を知らねば、ならないが、前述したように y_0 の値で変化する量であるため、図-6, 7の間で、グラフの傾きは、わずかに変わっているが、 y_0 の値は、粒子に影響を与える流速の評価であるが、 y_0 を粒径オーダの位置で選べば、この場合図-6と図-7とで高さは、2倍異なるが、それが、両軸の対応に及ぼす影響は、少ないと考えることができる。但し空気中と水中でのプロットがずれているが、水中及び空気中では、それぞれの摩擦係数、 C_D , C_L , 等が異なることによるものなのかどうか今、ここでは、述べない。

P_s の平均値 $\bar{P}_s$ については、(6)式の表現で述べられたような関係が分ったが、その分布形がどうなるかということは、その分散を調べればよい。先に述べた(5)式の表現によって P_s の分布形は、求めることができるであろうが、ここでは、 $\bar{P}_s$ との関連が調べられた、前述の $\text{Prob}\{U > U_c\}$ との関係を、図-8に示した。

(5)式の右辺は、 $\text{Prob}\{U > U_c\}$ の値によってその特性が、変化するが、その平均的な、特性は、 $\text{Prob}\{U > U_c\}$ が受けもつので、図-8のように P_s の標準偏差とプロットしたものは、図-6, 7と同様に、関連づけることができる。

上述のように、(5)式(6)式の関係は、実験で求まった P_s の平均値と分布に関して調べてみると、図-8及び図-6, 7によって 確かめられた。

さて、粒子の移動速度に関する(9), (10)式の対応は、(5), (6)式の導入のプロセスと同様な形式となっているが、図-2, 3の説明で少し述べたように、別々に求めた、分布であるが、かなり強い相関がみられる。

5. 結語

本論文では、次のようなことが考察された。

(1) 砂粒の移動限界(すなわち限界掃流力の評価)は、(1)式によってとらえると、次のようになる。

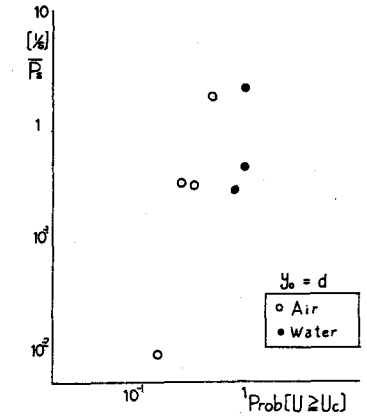


図7 $\bar{P}_s$ と U の超過確率との関係

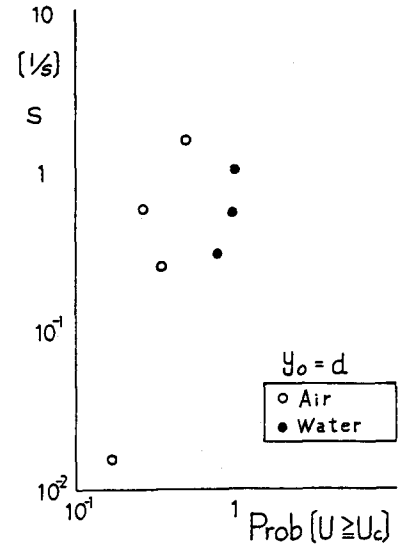


図8 P_s の標準偏差と U の超過確率との関係

流れの持つ力の時間平均の特性量である，平均せん断力が決まった時に，河床粒子の形状等によって定まる U_c に対して，(3)式によって求まった流れの瞬間値 $U = (\bar{U} + U')$ が，(1)式の条件を満足する，確率がいくらのものを，限界値として定めるかという問題に帰着する。

(2) $U = (\bar{U} + U')$ は，確率変数であるから，(4)及び(8)式のように定義された単位時間当りの砂粒の離脱率 P_s 及び初速度 w も確率変数である。 U の確率密度関数がきまると，(5)式及び(9)式は，それぞれの，確率変数， P_s ， w の確率密度関数を定義し， U の確率密度関数の関連で調べることが分った。

(3) 今後の検討課題としては， $U = (\bar{U} + U')$ の持続時間 Δt の検討， $f(U | U > U_c)$ なる確率密度関数の評価等がある。

謝辞；本研究では，文部省科学研究費・総合研究（A）「ストカスティック・ハイドロリックスの手法の確立と応用の研究」（課題番号 No. 56350035：研究代表者 林泰造）の補助により行われたものであることを記し，謝意を表する。

参考文献

- 1) Einstein, H.A. ... "The Bed-Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flows" U. S. Department of Agriculture
- 2) HSIEH WEN SHEN ... "River Mechanics Vol. II"
- 3) 辻本哲郎 ... "掃流過程の確率の確率モデルとその移動床問題への応用" 京都大学. S. 53
- 4) 尾崎幸男 ... "水流による河床砂礫の移動と流路形態とに関する水理学的研究" 中央大学
- 5) John Laufer ... "The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow" N. A. C. A.
- 6) P. S. Klebanoff ... "Characteristics of turbulence in A Boundary Layer With Zero Pressure gradient" N. A. C. A.