

河道弯曲部の河床形に関する研究
A Study on Bed Topography in Channel Bend

北海道大学 正員 森 明 巨
北海道大学 正員 岸 力

1. は じ め に

一様曲率河道弯曲部の河床は、河床砂粒が河岸に沿って平行に移動する場合、平衡状態にあると考えられる。したがって、河道弯曲部の平衡河床を求める問題は、1. 移動砂粒に作用する力の横断方向成分の平衡式を導びく。2. 二次流の構造を求める。の2つの問題に分けられる。1.の問題について池田⁽¹⁾は、砂粒に働く流下方向の力を流体力と摩擦力で平衡させ、この関係を用いて流体力と重力の横断方向分力の平衡式を導びいている。同理論では、摩擦係数に一定値を与えていることから砂粒の運動形態が滑動及び転動が主体となるせん断力の小さい流れに適用できるものと考えられる。これに対し、著者ら⁽²⁾はせん断力が大きく砂粒の運動形態がSaltationが主体となる場の平衡式を導びいた。2.の問題については、従来、二次流内の相互干渉を無視して解かれるのが普通であった。著者らも前報においてこの様な仮定のもとに二次流を与えている。著者らは、この様にして得られた理論値が無次元有効せん断力 τ_*' の比較的広い範囲にわたって実測値と良く一致することを示した。しかし、図-1に示す様に τ_*' の極めて大きい流れに対しては、外岸側における洗掘深が実測値に比べ非常に大きくなることがわかった。本研究では、この原因の1ツが二次流内の相互干渉を無視したことによると考え、これを考慮した理論を導びき、理論値と実測値の比較を行ったものである。

2. 流れの運動方程式と渦動粘性係数

流れが河道弯曲部に流入すると、流下とともに二次流が発達するがある程度発達すると二次流の強さは減少する。この原因として運動量の横断方向への輸送及び上昇流による上層流と下層流の混合が考えられる。⁽³⁾ この効果を考慮して流下方向及び横断方向の運動方程式及び渦動粘性係数 ϵ を(1)~(3)式で与える。

$$\epsilon \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} = -g I \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial r UV}{\partial r} \tag{1}$$

$$\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = g I \xi - \frac{U^2}{r} \tag{2}$$

$$\epsilon = \frac{\alpha u_* + \alpha_k W_m}{6} h \tag{3}$$

座標系は図-2の様に取っており、U、V、Wはそれぞれ θ 、r、Z方向の流速、 $I\theta$ は流下方向の水面勾配である。図-2中の ξ 、 η は水位及び河床高であり、 $I\xi = d\xi / dr$ 、 $I\eta = -d\eta / dr$ 、 $h = \xi - \eta$ である。 r_0 は基準となるrであり、本研究では平均水深を取るrを選んだ。以下において添字0のついたものは $r = r_0$ に関する量を表わす。(3)式における α_k は係数であり W_m は $V = 0$ となる地点(この地点のZを h_c とおく)のWである。 W_m を次の様にして求める。連続の式(4)を $Z = 0$ から $Z = h_c$ まで積分し、 $W(Z = 0) = -V(Z = 0)$ 、 $I\eta$ なる関係を用いると(5)式が得られる。

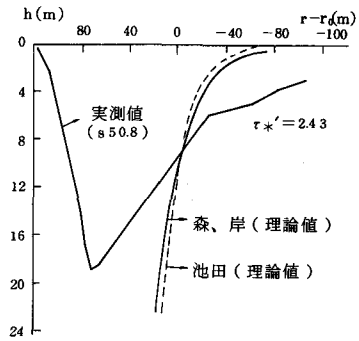


図-1 河床形の理論値と実測値の比較

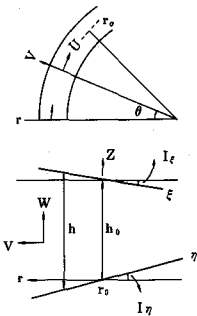


図-2 座標系の定義

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r V}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (4)$$

$$W_m = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \int_0^{h_0} V dz \right] \quad (5)$$

ここで、 $I_\eta < 1$ であることから流れに相似性を仮定して、 U 、 V を(6)式の様におく。(6)式において、

$$U = U_s \phi(\zeta), \quad V = V_s f(\zeta) \quad (6)$$

$\xi = 1 - Z/h$ である。又、 U_s 、 V_s は表面流速であり $\phi(0) = f(0) = 1$ である。(6)式を(5)式に代入し、後述する様に $V_s \propto (r/h)^{\nu_2}$ とすると次式が得られる。

$$\frac{W_m}{|V_m|} = (1 + \nu_2) \frac{dh}{dr} + (1 - \nu_2) \frac{h}{r} \quad (7)$$

ここで、 V_m は $Z = 0 \sim h_0$ 間の平均流速であり(8)式で与えられる。一般に、弯曲部の河床形は(9)式で近似

$$V_m = -V_s \int_{1-h_0/h}^1 f(\zeta) d\zeta \quad (8)$$

$$\frac{h}{h_0} = \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \quad (9)$$

されるが、これを変形すると $r/h \cdot dh/dr = n$ が得られる。 n は5~10程度の値であり、又 ν_2 は1程度の値であることから(7)式右辺の第2項を無視する。 $|V_m| \div V_s/2$ として(7)式を(3)式に代入し、 $\alpha_K(\nu_2 + 1)/2$ を新たに α_K とおくと ε は(10)式で与えられる。

$$\varepsilon = \frac{\kappa u_* + \alpha_K V_s dh/dr}{6} h \quad (10)$$

3. 流速分布

U_s 、 V_s 、 ε 、 I_ξ を h 、 $I\theta$ 、 $r = r_0$ での摩擦速度 u_{*0} を用いて無次元化したものが、 $hr_0/rh_0 = q$ なる量のみに依存するものとして(11)~(14)式の様におく。

$$U_{s*} = \frac{U_s}{U_{*0}} = U_{s*0} q^{\nu_1} \quad U_{s*0} = \frac{U_{s0}}{U_{*0}} \quad (11)$$

$$V_{s*} = \frac{V_s}{U_{*0}} = V_{s*0} q^{\nu_2} \quad V_{s*0} = \frac{V_{s0}}{U_{*0}} \quad (12)$$

$$\varepsilon_* = \frac{\varepsilon}{U_{*0} h} = \varepsilon_{*0} q^{\nu_3} \quad \varepsilon_{*0} = \frac{\kappa + \alpha_K \left(\frac{V_s}{U_{*0}} + \frac{dh}{dr} \right)_{r=r_0}}{6} \quad (13)$$

$$I_{\xi*} = \frac{I_\xi}{I_0} \frac{h}{h_0} = I_{\xi*0} q^{\nu_4} \quad I_{\xi*0} = \frac{I_{\xi0}}{I_0} \quad (14)$$

以上の諸式及び(6)式を(1)、(2)式に代入し、無次元化すると(15)、(16)式が得られる。

$$\phi'' = -\beta_1 + 3\beta_2 \phi(\zeta) f(\zeta) \quad (15)$$

$$f'' = A(\alpha - \phi^2) \quad (16)$$

ここで、

$$\beta_1 = \frac{q}{\varepsilon_* U_{s*}} \quad (17)$$

$$\beta_2 = \frac{\nu_1 + \nu_2}{3} \frac{V_{s*}}{\varepsilon_*} \frac{db}{dr} \quad (18)$$

$$A = \frac{U_{s*}^2}{\varepsilon_* V_{s*}} q \frac{ho}{ro} \quad (19)$$

$$\alpha = \frac{I_{\varepsilon*}}{U_{s*}^2 q} \frac{ro}{ho} \quad (20)$$

ただし、(1)式右边第2項については、 $dh/dr \gg h/r$ として微小項を無視している。(19)式で与えられる A を用いて二次流の強さ V_{s*} は(2)式で表わされる。 A が遠心力と二次流の強さの関係を表わす係数であるこ

$$V_{s*} = \frac{U_{s*}^2}{A \varepsilon_{*0}} \frac{h}{r} \quad (21)$$

とを考慮すると、(2)の式形より二次流の構造が h/r に強く依存するであろうことが予想される。このことから独立変量として $q = hr_0/rh_0$ を選んだ。

さて、流速分布を求めるには(15)、(16)式を連立して解かなければならないが、これを行うのは容易ではない。本研究は二次流の細かい構造を求めるのではなく、二次流内の相互干渉が弯曲部の河床形にどの程度の影響を及ぼすかを調べるのが目的である。そこで、本研究では $\phi \cdot f$ を極く単純な関数形で近似することにし、これを(2)式で与えた。これを(5)式に代入し、(23)式の置き換えを行うと(24)式が得られる。これを積分し、

$$\phi f \approx 1 - 2\zeta \quad (22)$$

$$2\beta = \beta_1 - 3\beta_2 \quad (23)$$

$\phi(0) = 1$ 、 $\phi'(0) = 0$ なる境界条件のもとに解くと(25)式が得られる。

$$\phi'' = -2\beta - 3\beta_2 \zeta \quad (24)$$

$$\phi = 1 - \beta \zeta^2 - \beta_2 \zeta^3 \quad (25)$$

(25)式を(16)式に代入して積分し、 $f(0)=1$ 、 $\phi'(0)=0$ なる境界条件のもとに解くと(26)式が得られる。河床面で、流れの方向とせん断力の方向が一致するという条件から(27)式が得られ、 r 方向への流量が0という条件か

$$f = A \left[\frac{\alpha-1}{2} \zeta^2 + \frac{\beta}{6} \zeta^4 + \frac{\beta_2}{10} \zeta^5 - \frac{\beta^2}{30} \zeta^6 - \frac{\beta\beta_2}{21} \zeta^7 - \frac{\beta^2_2}{56} \zeta^8 \right] + 1 \quad (26)$$

ら(28)式が得られる。

$$\frac{f(1)}{\phi(1)} = \left[\frac{f'(\zeta)}{\phi'(\zeta)} \right]_{\zeta=1} \quad (27)$$

$$A \left[\frac{\alpha-1}{6} + \frac{\beta}{30} + \frac{\beta_2}{60} - \frac{\beta^2}{210} - \frac{\beta\beta_2}{168} - \frac{\beta^2_2}{504} \right] + 1 = 0 \quad (28)$$

4. 彎曲部の河床形

著者らは、流れと河床形の関係を(29)式で与えた。

$$\frac{dh}{dr} = m \frac{|f(1)|}{\phi_1} \frac{V_{s*}}{U_{s*}}, \quad m \approx 2.0 \tau_{*0}^{0.6} \quad (29)$$

ここで、 τ_{*0} は無次元河床せん断力である。(29)式右边を2、3節で導びいた諸式より与えるのであるがここで、未知量の数と方程式の数の関係を整理すると、未知数は、 U_{*0} 、 V_{*0} 、 ε_{*0} 、 I_{*0} 、 ν_1 、 ν_2 、 ν_3 、 ν_4 、 β 、 β_1 、 β_2 、 A 、 α 、 α_k 、 dh/dr 、 ho/ro 、 τ_{*0} の17個である。これに対して方程式の数は、(13)、(17)、(18)、(19)、

(20)、(23)、(27)、(28)、(29)の9本であるが、 β_1 、 β_2 、 A 、 α が常数であるという条件から4本加わり合計13本である。従って、4本の式が不足しているが、このうちの3つは、 h_0/r_0 、 τ_{*0} を水理条件として与え、 α_k はパラメータとして与える。残りの1つは次の様にして与える。 ϕ を $\zeta = 0 \sim 1$ で積分すると(30)式が得られる。流速係数 ϕ_m を(31)式で定義する。

$$\phi_m = \int_0^1 \phi d\zeta = \frac{u_m}{U_s} = \frac{U_{m0}}{U_{s0}} = 1 - \frac{\beta}{3} - \frac{\beta_2}{4} \quad (30)$$

$$\phi_m = U_m / u_* \quad (31)$$

ここで、 u_m は $r = r$ での平均流速である。 $u_* = \sqrt{ghI\theta}$ であるが、 $I\theta = I\theta_0 r_0/r$ を考慮すると(32)式が得られる。(30)、(31)、(32)式より(33)式が得られる。

$$u_* = u_{*0} q^{\frac{1}{2}} \quad (32)$$

$$\phi_m = \phi_m u_{s*} q^{\frac{1}{2}} = \phi_m u_{s*0} q^{-\frac{1}{2}} \quad (33)$$

(33)式に $r = r_0$ を代入し、(30)式を用いると(34)式が得られる。

$$\frac{\phi_{m0}}{u_{s*0}} = 1 - \frac{\beta}{3} - \frac{\beta_2}{4} \quad (34)$$

ϕ_{m0} は $r = r_0$ における流速係数である。以上のことから、 ϕ_{m0} 、 τ_{*0} 、 h_0/r_0 、 α_k を与えると二次流の構造及び河床形が決定される。これを実際に行うのには数値計算を行なわなければならないが、 ν_1 、 ν_2 、 ν_3 、 ν_4 については簡単に求まり、 $\nu_1 = 1/6$ 、 $\nu_2 = 1/2$ 、 $\nu_3 = 5/6$ 、 $\nu_4 = 4/3$ である。これらの数値を用いると、(29)式は(35)式となる。

$$\frac{r_0}{h_0} \frac{dh}{dr} = n q^{\frac{1}{2}} \quad , \quad n = m \frac{r_0}{h_0} \frac{|f(1)|}{\phi(1)} \frac{V_{s*0}}{U_{s*0}} \quad (35)$$

(35)式を解くと(36)式が得られる。

$$\frac{h}{h_0} = \left[1 + n \left\{ \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right\} \right]^{\frac{3}{2}} \quad (36)$$

5. 石狩川への理論の適用

石狩川の河口から5km前後には図-3にみる様な河道弯曲部がある。この河道の中心線を図中に示した点線で近似すると、その曲率半径は875mである。北海道は、昭和50年8月と56年8月に集中豪雨に 図-3 河口より5km附近の河道平面図
見まれたが、このときの上述地点での主な水理量は表-1の様である。表中川幅は死水域と思われる部分を取り除いている。又、河床砂の平均粒径は0.26mmである。図-4は、S56.8出水時に北海道開発局土木試験所によって測定された5km付近の流跡を示したものである。流跡の測定には図-5に示した浮子を用いている。図-4中の実線は水面下0.5mの流跡であり、点線で示したものは図中の下部に示す様に水面下6mの流速である。図によれば、河床附近では流れが内岸側に向かい、水面附近で

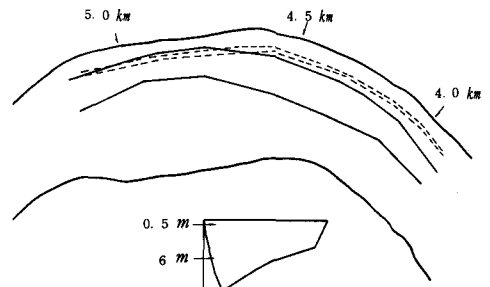
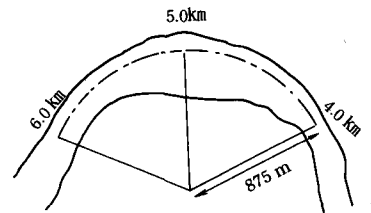


図-4 S56.8洪水時の流跡

表－１ 昭和５０．８及び５６．８出水時の５km地点における諸元

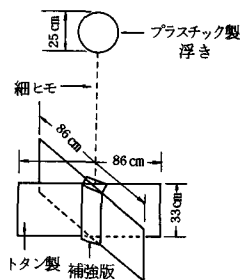
	流量 (m ³ /sec)	川 幅 (m)	h ₀ (m)	U _m (m/sec)	I _θ	τ _*	τ _* '	φ ₀
S 5 0.8	6,800	200	9.75	3.3	1/3,000	7.5	2.43	18.6
S 5 6.8	11,330	300	11.0	3.44	1/2,400	10.7	2.74	16.2

は外岸側に向かうという二次流の特徴は明らかでない。このことからこの流れは＋本理論で考察した様な二次流の相互干涉の強い流れと考えられる。図－６は③式で定義される $\tan \delta$ の S 5 6.8 出水時の $r = r_0$ における α_K による変化を示したものである。著者らは前報において $\tan \delta = 11$ としたが、二次流の干涉効果を取

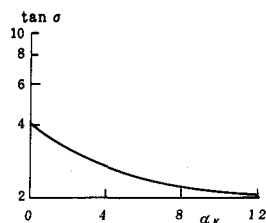
$$\tan \delta = \frac{|f(1)| V_{s \times 0} r}{\phi(1) U_{s \times 0} h} \quad (37)$$

り入れた本理論では $\alpha_K = 0$ で $\tan \delta \div 4$ であり、 α_K の増加とともに減少し $\alpha_K = 10$ では $\tan \delta \div 2$ 程度になっている。図－７、８は S 5 0.8 及び S 5 6.8 出水に対して求められた河床形の理論値と実測値を比較したものである。 $\alpha_K = 0$ の場合をみると、理論値と実測値の一致は充分とは云えない。しかし、図－１に示した二次流内の相互干涉を考慮しない理論に比べると、かなり実測値に近くなっているのがわかる。次に α_K に値を持たせると $\alpha_K = 4 \sim 8$ とすると理論値と実測値が良く一致することがわかった。

以上の計算例から、強い二次流が発生する場合には二次流内の相互干涉を考慮する必要のあることが理解される。



図－５ 浮 子



図－６ α_K と $\tan \delta$ の関係

6. 考 察

本研究では、(6)式で示される流れの相似性を仮定し、二次流の構造を支配する独立変量として $q = hr_0 / rh_0$ を選んでいる。Engelund⁽⁴⁾ も同様な仮定のもとに理論を展開しているが、(1)式右辺第 2 項を無視しているため流れを決める方程式が 1 つ不足している。これを補うため Engelund は ε を③式で与えた。又、河床形を与える式は②式と同

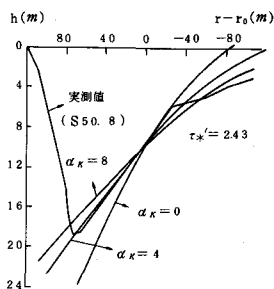
$$\varepsilon_K = \frac{\pi}{6} q^{\frac{1}{2}} \quad (38)$$

形である。これらより定まる ν の値が著者らが得た値とともに表－２に示されている。

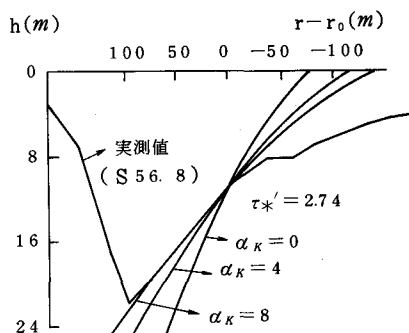
表－２ ν の値の比較

	ν_1 (U)	ν_2 (V)	ν_3 (ε)	ν_4 (I_ξ)
著 者 ら	1/6	1/2	5/6	4/3
Engelund	1/2	3/2	1/2	2
池 田	1/(n-1)	1+2/(n-1)	0	1+2/(n-1)

表によれば Engelund 理論は著者らのものに比べて q の変化に伴う U、V の変化が大きく、 ε の変化は小さい。これは、③式の仮定が二次流の相互干涉を考慮していないことから当然の結果といえる。



図－７ 河床形の理論値と実測値の比較



図－８ 河床形の理論値と実測値の比較

池田は、著者らと同様に流れに相似性を仮定しているが、流れを支配する独立変量には著者らと異なり r/r_0 を選んでいる。しかし、 r/r_0 は河床形を(9)式で近似すると、(39)式で示す様に近似値に q で表わされる。

$$\frac{r}{r_0} = q^{\frac{1}{n-1}} \quad (39)$$

この関係を用い、池田による強制渦の場合の ν の値を求めたものが表-2中に示されている。表によれば池田の理論は、二次流内の相互干渉の弱い流れになっているものと考えられる。

7. お わ り に

二次流内の相互干渉の存在は、実験的には認められているがこれを理論的に示すのは容易ではなかった。本研究では、流れの相似性の仮定、 q の導入、 ϵ を深さ方向に一定としたこと、(3)式、(23)式の仮定など流れを単純化しているが、二次流の強い流れでは二次流内の相互干渉がその構造及び弯曲部の河床形を決める上に大きな影響を持つことを理論的に示し得たと考える。

参考文献

- (1) 池田駿介：移動床河川の弯曲部における二次流と動的横断平衡河床について、土木学会論文報告集第 229 号 1974
- (2) 森明巨・岸力：河道弯曲部の河床形状に関する Engelund 理論の改良、第 25 回水理講演会論文報告集 1981
- (3) 岸力：弯曲水路の流れ、水工学のための夏期講演会、1965
- (4) F. Engelund : Flow and Bed Topography in Channel Bend, A. S. C. E., HY 11, 1974

記 号

A	(19)式	V_r	r 方向の表面流速	添字
f	(6)式	W	Z 方向の流速	○ $r = r_0$ での諸量
g	重力の加速度	W_h	$Z = h$ における W	* 無次元化量 (ただし U_* は摩擦速
h	水深	Z	図-2	度)
h c	$V = 0$ となる Z	α	(20)式	
I_θ	θ 方向の水面勾配	α_K	(10)式	
I_r	r 方向の水面勾配	β	(23)式	
I_v	r 方向の河床勾配	β_1	(17)式	
m	(29)式	β_2	(18)式	
n	(35)式	ϵ	渦動粘性係数	
q	$h r_0 / r h_0$	κ	カルマン常数	
r	曲率半径	ζ	$1 - Z/h$	
U	θ 方向の流速	ϕ	(6)式	
U_s	θ 方向の表面流速	φ_m	流速係数	
V	r 方向の流速	τ_*	無次元せん断力	
V_n	$Z = 0 \sim h c$ 間の r 方向の平均流速	ν	ベキ	