

砂礫堆上の流れの相似則に関する研究 The Law of Similitude of the Flow over Alternating Bars

東京大学工学部 正員 玉井 信行

1. 序

開水路流れの相似則としてはフルード相似則があまりにも有名である。しかしながら、中規模河床形態、いわゆる砂礫堆が生じているような河川に対してフルード則により実験を行ってみると、異なる河床形態が出現し、ひいては水面勾配も現地における値と異なってくるという事態が屢々見られ^{1), 2)}、実験の担当者は調整に苦勞するという話が伝えられている。

一方、河川の流れを砂礫堆という観点から永年にわたって眺めてきた木下^{3), 4)}は、砂礫堆が小水路においても形成されるという点を本質的に重要と考え、実験水路を極小な原型と考えた。そして、フルード則に関しては条件を緩和し、砂礫堆相似則により対応する原型を推定するという手法を提案した^{5), 6)}。

本論文は砂礫堆が形成されている際の流れの状況をいま一度整理し、エネルギー式及び流砂量式の各項に関して考察を加える。現状においては幾何学的及び運動学的な形態、また力学則においても等流状態の釣合い式のみしか得られていないことに鑑み、砂礫堆形状に関する新しいパラメータを導入し、これにより相似条件を考える。

2. 砂礫堆上の流れの実態

2.1 水平面内の特性

砂礫堆の高まりは水路の縦断方向に周期的に変化するのみではなく、その位相が横断方向にも変化する。流れは微視的に見れば3次元的となる。水平面内での流れを見ると収束と発散とを繰返し、断面内の50%の等流量線は砂礫堆の前縁を横切るように、緩やかに蛇行する(図-1参照)。

図-2には平面内における流れの偏りの1例として、局所フルード数の分布を示す。これによれば深掘れ部(流れの収束部)及び前縁付近の一部で常流、その他の部分では射流状態となっており、異なる流況が混在している不均質な流れであることが分かる。

2.2 水位及び水路床高さの縦断図

前節において示されたように、砂礫堆上の流れでは河床形状と流れとが共に縦・横断方向に周期的に変化することが知られる。これを縦断方向に大局的に眺めたら、どのような結果となるであろうか。

水路の両岸に沿って縦断方向に測線を取り、両者の平均と共に示したのが図-3である。これにより平均水位と平均水路床高さはほぼ平行であることが分かり、断面平均としては等流と考えてよいことになる。従

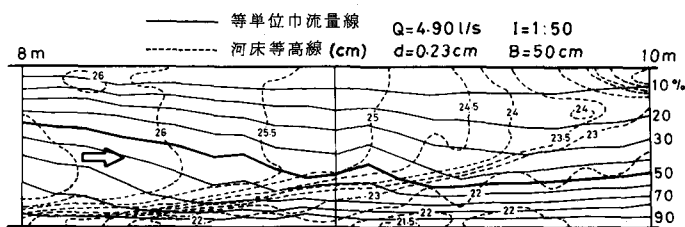


図-1 等単位幅流量線図(黄⁷⁾による)

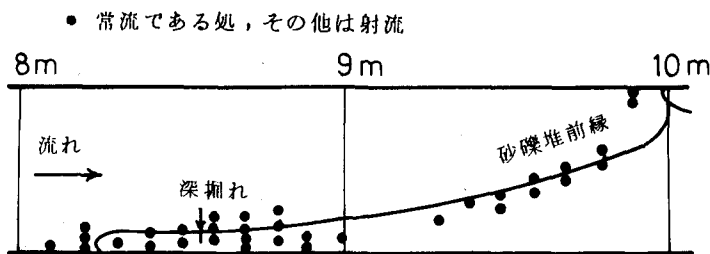


図-2 砂礫堆上の流れ(常流・射流の分布)(黄⁷⁾による)

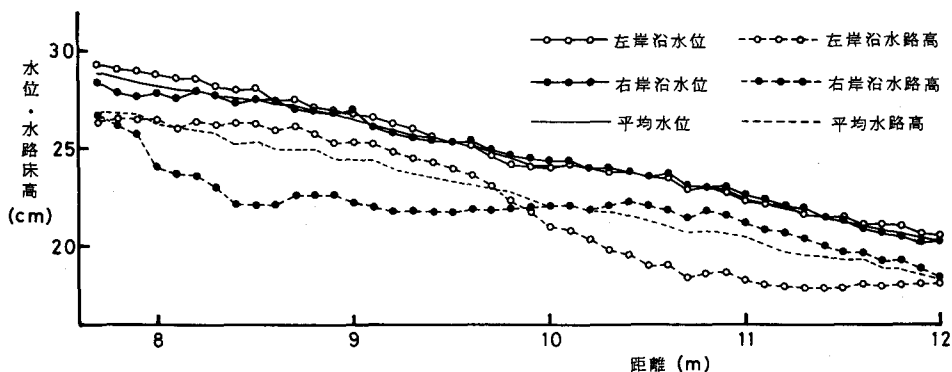


図-3 砂礫堆上の流れの水位及び水路高さの縦断曲線図(鮭川⁸⁾による)

って、横断面内の水理量の平均量を対象とする限り、通例の1次元解析が可能であると考えられる。

2.3 エネルギー式に関する考察

定常流に対して平均流速を用いて記述したエネルギー式は次式となる。

$$\alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2g} \right) - i + \frac{dh}{dx} + f' \frac{v^2}{2gR} = 0 \quad (1)$$

v は平均流速, g は重力加速度, i は底勾配, h は水深, f' は摩擦損失係数, R は径深, x は流れ方向の座標, α はエネルギー補正係数である。

砂礫堆の流れの実験結果⁷⁾を用いて式(1)の各項の大きさを比較する。図-4は図-1に示す実験例について、砂礫堆の3箇所において断面内の速度分布、流水断面形状を示したものである。流水断面積を測定することにより、 v は $x = 8.2 \text{ m}$, 8.9 m , 9.5 m で夫々 53.1 cm/s , 53.1 cm/s , 54.3 cm/s となる。従って、第1項が最も大きいと考えられる区間で、

$$\frac{v}{g} \frac{dv}{dx} \sim \frac{53.7}{980} \times \frac{1.2}{60} = 1.1 \times 10^{-3} \quad (2)$$

第2項と第3項の和は水面勾配と逆符号を有す。図-3の結果よりこれは水路床勾配に等しい。

$$-i + dh/dx = 2 \times 10^{-2} \quad (3)$$

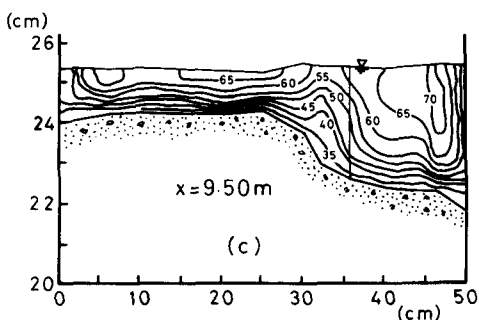
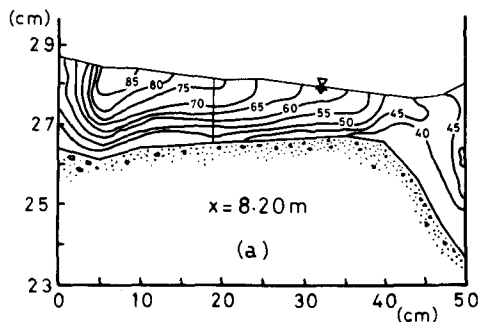
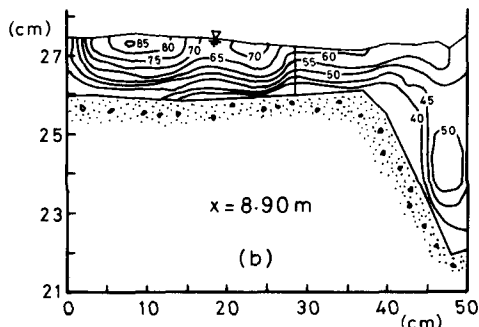


図-4 砂礫堆上の流れの等流速線図(単位 cm/s , 黄⁷⁾による)

第4項は $x = 8.9\text{ m}$ と 9.5 m における水理量の平均をとり次式で表わされる。

$$f'v^2/2gR = f'(53.7)^2/2 \times 980 \times 1.83 = 0.804f' = O(10^{-2}) \quad (4)$$

砂礫堆形成後の流れの抵抗は、平坦床に比し粗度係数に10～20%の増大をもたらすと言われる⁸⁾。nは高々0.02程度と考えられ、 $f' = 2gn^2/R^{1/3}$ に $R = 0.02\text{ m}$ を代入すると $f' \sim 0.03$ である。従って、第4項のエネルギー勾配自体も 10^{-2} のオーダーと考えられる。

式(2)～(4)に依れば砂礫堆上の流れでは、断面平均量で考える限りは慣性項は相対的に重要でないと考えられる。水面勾配を I_s 、エネルギー勾配を I_e とすれば、図-3の結果と併せて

$$I_s \simeq I_e \simeq i \quad (5)$$

と結論でき、平均的には等流と考えてよいことになる。従って、式(1)からは幾何学的な条件、即ち、水面勾配が原型と模型とで一致すれば、断面平均量に関する相似が保たれることが結論される。この結論は陽な形では相似条件を与えないが、巨視的な流況の再現にはフルード数は主要な役割を果たさない点が重要である。

3. 砂礫堆上の流れの相似則

砂礫堆に関する模型実験においては、砂礫堆の形状が再現されることが最も重要である。これが可能となれば、ひいてはその上における3次元な流れも再現される、と考えられる。前章までの議論より、断面平均量に関しては流れは等流と考えてもよいことが分かった。さらに、もう1つの重要な因子である河床の砂移動に関しても、現在のところ平均量についての等流状態に関する公式しか得られていない。こうした背景をも考慮し、ここでは幾何学的条件と流砂量公式より相似則を探らうとする。

3.1 幾何形状の相似性について

第2.3節の考察より流れの特性は判明したが、これは結果であり、砂礫堆が形成される相似条件を知る必要がある。また、砂礫堆が形成後、エネルギー勾配が現地における条件と同一となる必要がある。従って、この節における幾何形状とは砂礫堆の長さとかさを意味し、この形状を同一に保つことにより水面勾配のみならず形状損失の占める割合についても相似性を保つことを期待する。

砂礫堆の長さおよび高さとか水理量との関係を求めたものには銚川⁸⁾、藤田ら⁹⁾のものがある。しかしながら、それらは形態区分図のパラメータと整合していないので、今回、別の整理を試みる。図-5に砂礫堆の

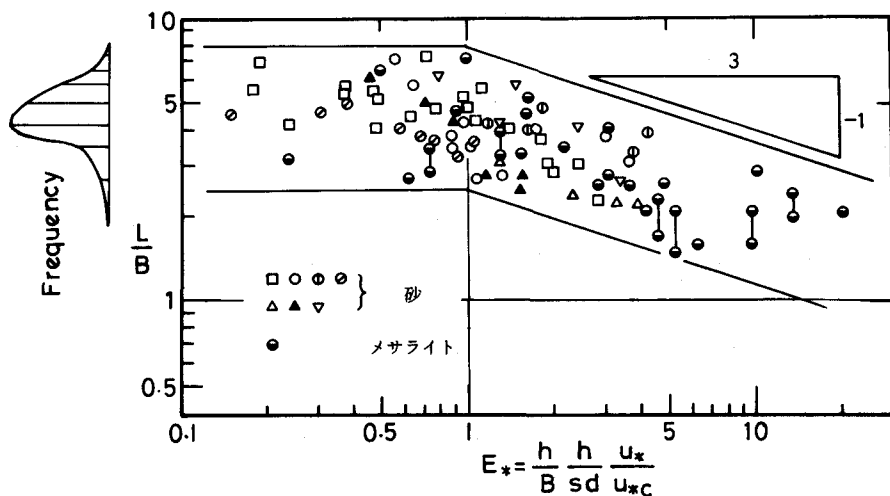


図-5 砂礫堆の無次元長さとか E_* との関係

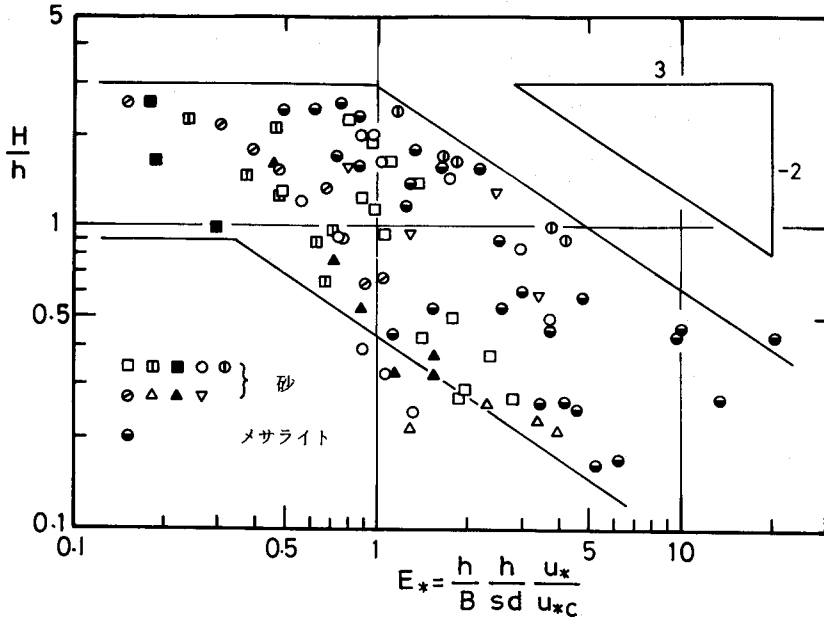


図-6 砂礫堆の無次元高さと E_* との関係

長さ L と水路幅 B の比, 図-6 に砂礫堆の高さ H と平均水深 h との比を示す。砂礫堆の長さとは, 砂礫堆が形成されている水路の左岸及び右岸沿いの水路床の縦断面図を描き, それらの交点間の距離とする。また, 砂礫堆の高さとは, 砂礫堆の最高点を通り傾きが平均水路床勾配に等しい平面を考え, この平面と最低点を通る鉛直線との交点と最低点の高さとの差を言う。資料は文献 8) の pp. 341-344, pp. 369-372 に示されている鮭川・吉野・井口・木下・風間のものであり, 底質は砂とメサライトである。

図-5 の L/B の資料の散らばりは約 2 倍の幅に入っているように見え, 文献 8) に示されている鮭川の方法と同程度である。しかし, 今回の指標 $E_* = (h/B)(h/sd)(u_*/u_{*c})$ を用いると, この数値が 1 より小さな領域で L/B はほぼ一定値となる。ここに s は底質の構成粒子の水中比重, d は粒径, u_* は摩擦速度, u_{*c} は限界摩擦速度である。従来の例では $u_*/u_{*c} \sim 10$, $h/d \sim 30$ 程度が上限を示しており, $s \sim 2$ であるので $B/h > 150$ では $E_* < 1$ となる。河川においては $B/h \sim 10^2$ の例は見られ, かつ, L/B もほぼ一定の例が報告されている¹⁰。従って, 河川を対象とした場合に L/B が一定値となる傾向を示す E_* による分類は有効で, L/B は E_* の関数としてよいと考えられる。

砂礫堆の長さは同一の水理条件下でもかなり変動することが知られており, 木下¹⁰ が直線水路で同一の条件下で実験した場合にも L/B は 2～8 程度に分散した。その頻度分布を図-5 に併記してある。また, 河川においても L/B が 2～11 の範囲に存することが報告されており¹¹, 図-5 のバラツキはこの種の現象には不可避のものと考えられる。

図-6 における H/h と E_* との関係からも, E_* が 1 より小となると H/h が一定の値を超えない傾向を読み取ることができる。 H/h のバラツキは大きく, 約 5 倍程度の帯域に広がるが, これは他の指標で表示したときも同様である。砂礫堆長さと同じく, 水路幅が大きくなると高さもある平衡状態に達するのが妥当と考えられ, その点 E_* の関数形で表示することは意味があると考えられる。

3.2 流砂量の相似性について

河床形態の形成には掃流砂が支配的な役割を果たすと考えられるので, 掃流砂量公式について考える。混合砂の掃流砂量式として, 佐藤・吉川・芦田の式を修正した平野¹² の式がある。

$$\frac{q_{Bi}}{u_* d} = K \frac{u_*^2}{s_g d} F\left(\frac{u_{*ci}^2}{u_*^2}\right) \quad (6)$$

原型における量の模型における量に対する比を添字 r で示す。 $q_{Bi r} / u_{* r} d_r = 1$ であるためには

$$u_{* r}^2 / s_r d_r = R_r I_{er} / s_r d_r = 1, \quad u_{* r} / u_{* cr} = 1 \quad (7)$$

であればよい。限界掃流力は Shields の関数 Sh で表わされる。

$$u_{* cr} = \left[(s_r d_r / \rho_r) Sh_r (u_* d / \nu) \right]^{1/2} \quad (8)$$

従って、式(7)₂より次式を得る。

$$(s_r d_r / \rho_r) Sh_r = R_r I_{er} \quad (9)$$

水を用いるときは $\rho_r = 1$ であり、Shields 関数 Sh が一定値であると近似すれば、

$$I_{er} \simeq s_r d_r / R_r \quad (10)$$

である。式(10)の関係は式(7)₁と等価であり、結局

$$u_{* r} / u_{* cr} = 1 \quad (11)$$

が満たされれば、掃流砂量の相似則が満足されることになる。

3.3 砂礫堆上の流れの相似則

第3.1, 3.2節において幾何形状と掃流砂に関する考察を行った。ここでは両者を統合して考える。

砂礫堆の水平面内の形状 L/B も鉛直面内の形状 H/h も共に E_* の関数で表現できることが分かった。従って、 E_* の値が原型と模型とで等しければ3次元的な意味で巨視的な河床形態が相似になり、その上の流れの水面勾配、エネルギー勾配の相似が成立する。この条件は次式で表わされる。

$$(h_r / B_r) (h_r / s_r d_r) (u_{* r} / u_{* cr}) = 1 \quad (12)$$

流砂の相似条件である式(12)を代入し、幅の広い流れの条件より $R_r = h_r$ とする。さらに、式(9)において $\rho_r = 1$ を代入した形を用いると式(12)は次式となる。

$$(h_r / B_r) (Sh_r / I_{er}) = 1 \quad (13)$$

Shields 関数が $u_* d / \nu$ に依らずほぼ一定であると考え、式(5)の結果を用いると式(13)は $h_r = B_r i_r$ となる。従って、式(12)と合わせて、次の2つの関係が成立すれば砂礫堆上の流れは相似となる。

$$u_{* r} / u_{* cr} = 1, \quad B_r i_r / h_r = 1 \quad (14)$$

式(14)の結果は $u_* / u_{* c}$ と Bi/h との値を原型と模型とで一致させればよいことを示しており、木下の提唱する砂礫堆相似の追認となる。また、式(14)の結果はこの2つの無次元量で形態区分図を描けば砂礫堆の形状特性を表現できることをも示しており、その図の上の1点が砂礫堆の1つの固有な状態を表わす。この2つの無次元量による形態区分図は池田¹³⁾により初めて導入された。

ここでは幾何形状についてのみ考えているので、流速あるいは流量についての比は陽には得られない。これについては水位-流量曲線を利用することが考えられる。

3.4 歪みなしの模型における考察

歪みなしの模型を作るときには水平縮尺と鉛直縮尺は等しく、 $h_r = B_r$ である。また、粒子径も長さの尺度と同一の比率で変化させるので $d_r = h_r$ である。流体としては水、底質としては砂を用いることを前提と

すれば $\rho_r = s_r = 1$ となる。また、この場合には Shields 関数の比 $Sh_r = 1$ となるので、式(4)_{1,2}からの結果は一致し、次式となる。

$$I_{er} = i_r = 1 \quad (4)$$

一方、式(1)について考察すると、第1項と第2項あるいは第3項との比が一定であるためには $(F_r)_r = 1$ が必要であり、第1項と第4項の比が一定であるためには $f'_r = 1$ が必要である。 $f' = 2(u_*/v)^2$ であるので

$$(F_r^2)_r = (v^2/gh)_r = 1, \quad (v/u_*)_r = 1 \quad (5)$$

であれば、慣性項の効果を含めて厳密に流れの相似が成立することになる。

$\varphi = v/u_*$ が砂礫堆上の流れにおいてどのような関数で表示されるかは、現在のところ明らかではない。しかし、小規模河床形態における結果が準用できるものとすれば、 $\varphi = \varphi[R/d, \tau_*(R/d, \tau_*')]$ である。 τ_* は無次元掃流力、 τ_*' は有効無次元掃流力である。従って、 φ は R/d と $\tau_*' = R I_e'/sd$ の関数であり、砂礫堆の形状が相似になることを前提とすれば $I_{er}' = 1$ と考えうる。他の水理量の比率もすべて1か互いに相殺するから

$$\varphi_r = (v/u_*)_r = 1 \quad (6)$$

となる。式(6)が成立すれば次式を得る。

$$(F_r^2)_r = v_r^2/h_r = u_{*r}^2/h_r = I_{er} = 1 \quad (7)$$

式(7)の最終的な形と式(4)とは一致する。従って、底質に至るまで歪みなしで再現し、フルード数を一定にするという規準で模型を作れば、この場合には砂礫堆相似も満足されることを意味している。扇状地河道の模型実験においては底質粒子が大きいので、水平縮尺と同一の縮尺を底質粒子にも適用できる。こうした場合にはフルード相似と砂礫堆相似とが両立しうるので、河床形態の相似が期待できると共に、流量の換算率が一義的に定まる。

4. 結論

今回示した資料は直線流路で得られたものであるが、木下^{5), 6)}の実験は弯曲をも含む河川を対象として同じ規準で行われ、よい再現性を得ているので、以下の結論の一般性は高いものと考えられる。

- (1) 砂礫堆上の流れは3次元的であるが、断面内の平均量を対象とする限りは等流と考え得る。
- (2) 砂礫堆の幾何形状を支配する新しいパラメータ E_* が導入され、この値が小さいときには無次元化された砂礫堆長さおよび高さは一定値に近づく。
- (3) 上述の結論と流砂量に関する考察より、 Bi/h と u_*/u_{*c} の値が原型と模型とで一致すれば砂礫堆の形状は両者で一致し、その上の流れも巨視的に一致する。これは木下博士の結論の追認である。
- (4) 歪みがない模型においては砂礫堆の幾何学的相似条件とフルード相似則とは等価となる。このことから(3)項で述べられた砂礫堆相似条件が一般性を持つことが確認できる。
- (5) 河床形態の区分についても(3)項で得られた2つの無次元量を用いるのが妥当と考えられる。

謝 辞

この研究は自由学園の木下良作博士から数年にわたって研究成果の紹介を受け、議論をして頂いた成果の一端である。これらの示唆がなければこの論文も存在しなかったことを想い、記して厚く謝意を表します。

参考文献

- 1) 土研資料 974号, 1975. 2) 土研資料 1416号, 1978. 3) 木下良作: 水工学シリーズ A-4, 1972.
- 4) 木下良作: 水工学シリーズ A-7, 1978. 5) 木下良作: 砂防年講, 1980. 6) 静岡河川工事報告書, 1980. 7) 黄哲雄: 東大修士論文, 1969. 8) 鮎川登: 資源調査所報告, 1971. 9) 藤田裕一郎: 年講, 1981 および京都大学学位論文, 1980. 10) 木下良作: 論文集第42号, 1957. 11) 土研資料 1327号, 1978. 12) 平野宗夫, 論文報告集, 第195号, 1971. 13) 池田宏: 東京教育大学学位論文, 1972.