

中規模河床形態の発生機構について
ON THE MECHANISM OF OCCURRENCE OF THREE-DIMENSIONAL
BED CONFIGURATIONS

中央大学理工学部 正員 林 泰 造
(財)電力中央研究所 正員 尾 崎 幸 男
○(株)I.N.A.新土木研究所 正員 大 西 光 陽

1. はじめに

2次元河床波及び3次元河床波の発生については安定理論に基づいてなされたいくつかの優れた理論研究がある。しかし、2次元河床波及び3次元河床波の各取り扱い、初めからそれぞれ2次元的及び3次元の河床波の発生を想定して解析が進められ、それらを統一的に取り扱った理論はなかったと思われる。そしてこのため、2次元河床波と3次元河床波の不安定性の要因の比較が十分に行なわれていなかったといえる。

本研究は、3次元Shallow Waterモデルを用いて、2次元河床波と3次元河床波の不安定性要因の差異を明らかにするために以下の解析を行なった。なお従来より、河床安定理論では水理量を表わすパラメータとしてフルード数Fが用いられてきたが、本解析では移動床の立場から、水理量を表わすパラメータとして無次元掃流力 τ_* を用いて解析を行なう。

2. 基礎方程式

(1) 水流の基礎方程式

図-1.に示すような移動床矩形断面の開水路流れについて考える。河床の時間的変化はゆるやかであり、水流や水面変動は河床変形に対してすばやく追従して変化するものとして、河床は非定常とし流体系は準定常として取り扱う。また、河床は非粘着性物質で構成されているものとする。

水深は水平方向の特性に比してかなり小さいものとする。xおよびy方向の水流の運動方程式ならびに連続方程式はそれぞれ次のように表わされる。

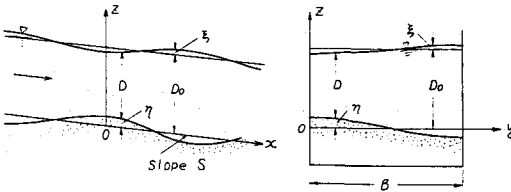


図-1.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \left(\frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\tau_x}{\rho D} - gS = 0, \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \left(\frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{\tau_y}{\rho D} = 0, \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial u D}{\partial x} + \frac{\partial v D}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、uおよびv：水深方向に平均化されたxおよびy方向の流速成分、D：局所的な水深、 η および ξ ：河床波形および水面波形、 τ_x および τ_y ：xおよびy方向の河床せん断力、 ρ ：水の密度、g：重力加速度、S：平均河床勾配、である。

(2) 掃流砂量式と連続方程式

局所掃流砂量式には、Einstein - Brown (1950) 公式に遅れ距離 δ を考慮した次式を用いる。

$$\phi_x(x,y) = q_{Bx}(x,y) / [\sqrt{(s-1)gd^3} F_f] = 40 [\tau_{*}(x-\delta, y)]^3, \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\phi_y(x,y) = -q_{By}(x,y) / [\sqrt{(s-1)gd^3} F_f] = \phi_x(x,y) \cdot v(x,y) / u(x,y) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし,

$$F_f = \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{36v^2}{gd^3(s-1)}} - \sqrt{\frac{36v^2}{gd^3(s-1)}}, \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに, q_{Bx} および q_{By} : x および y 方向の局所掃流砂量, ϕ_x および ϕ_y : x および y 方向の無次元局所掃流砂量, $\tau_* = \tau_x / [\rho(s-1)gd]$: x 方向の無次元掃流力, s : 砂粒の比重, d : 砂粒の代表粒径, F_f : Rubey(1933)の砂粒の沈降速度, δ : 局所掃流力と局所掃流砂量の間に生ずる遅れ距離, である。

掃流砂量の連続方程式は,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{By}}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

である。

なお, 河床せん断力 τ_x と τ_y の関係には次式を用いる。

$$\tau_x = f \frac{1}{2} \rho u^2, \quad \tau_y = (v/u) \tau_x. \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに, $f = 2(U_* / U)^2$: 摩擦抵抗係数, $U_* = (\tau_o / \rho)^{1/2}$: 河床擾乱のない場合の摩擦速度, U : 平均流速, である。

以上が, 本解析に用いる基礎方程式ならびに仮定である。

(3) 無次元線型方程式

基礎方程式の線型化ならびに無次元化は次のように行なう。

線型化は, 次式のように各変動量を平均成分とプライムのついた変動成分にわけて行ない,

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \bar{\eta}, & \xi &= \bar{\xi}, & D &= D_0 + \xi - \eta, & u &= U + u', & v &= v', \\ \tau_x &= \tau_0 + \tau'_x, & \tau_y &= \tau'_y, & q_{Bx} &= q_{B0} + q_{Bx}', & q_{By} &= q_{By}' \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

また, 無次元化は次式のように行なった。

$$\left. \begin{aligned} x_r &= x/D_0, & y_r &= y/D_0, & \eta_r &= \eta/D_0, & \xi_r &= \xi/D_0, \\ u_r &= u'/U, & v_r &= v'/U, & t_r &= t(g/D_0)^{1/2}, & \delta_r &= \delta/D_0, \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

以上の式によって, 線型化ならびに無次元化された水流および掃流砂量に関する基礎方程式は次のようになる。

$$F^2 \frac{\partial u_r}{\partial x_r} + 2S u_r + \frac{\partial \xi_r}{\partial x_r} - S \xi_r + S \eta_r = 0, \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$F^2 \frac{\partial v_r}{\partial x_r} + S v_r + \frac{\partial \xi_r}{\partial y_r} = 0, \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial x_r} + \frac{\partial v_r}{\partial y_r} + \frac{\partial \xi_r}{\partial x_r} - \frac{\partial \eta_r}{\partial x_r} = 0, \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{\partial \eta_r}{\partial t_r} + A_s \left[6 \frac{\partial u_r'(x_r - \delta_r)}{\partial x_r} + \frac{\partial v_r}{\partial y_r} \right] = 0. \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに, $F = U / \sqrt{gD_0}$: フルード数, $A_s = q_{B0} / \sqrt{gD_0^3} = \sqrt{(s-1)d^3/D_0^3} F_f \phi_0$, $\phi_0 = 40\tau_{*0}^3$ である。

なお本解析では, フルード数 F と無次元掃流力 τ_* の関係には次式を用いる。

$$F^2 = (s-1) \left(\frac{U}{U_*} \right)^2 \frac{d}{D_0} \tau_o. \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここに, $U/U_* = 6.0 + 5.75 \log_{10}(D_0/2d)$, である。

3. 安定解析

河床波の波形を、

$$\eta_r = \eta_0 \cos \lambda y_r \exp[ik(x_r - ct_r)], \quad \dots\dots\dots (16)$$

としたとき、それによって生ずるその他の変動成分は次式のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} u_r &= u_0 \cos \lambda y_r \exp[ik(x_r - ct_r) + i\theta_u], \\ v_r &= v_0 \sin \lambda y_r \exp[ik(x_r - ct_r) + i\theta_v], \\ \xi_r &= \xi_0 \cos \lambda y_r \exp[ik(x_r - ct_r) + i\theta_\xi]. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここに、 η_0, u_0, v_0, ξ_0 : $t = 0$ における η_r, u_r, v_r および ξ_r の振幅、 $k = 2\pi D_0/L$: x 方向の河床波の無次元波数、 $\ell = m\pi D_0/B$: y 方向の無次元波数、 m : モード次数、 θ_u, θ_v ならびに θ_ξ : u_r, v_r, ξ_r の各波形が河床波 η_r に対してのもつ各位相差、 $C = C_R + iC_I$: 無次元複素位相速度である。

上式を無次元線型基礎方程式に代入し整理すれば次式となる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 e^{i\theta_u} \\ v_0 e^{i\theta_v} \\ \xi_0 e^{i\theta_\xi} \\ \eta_0 \end{bmatrix} = 0, \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= ikF^2 + 2S, & a_{12} &= 0, & a_{13} &= ik - S, & a_{14} &= S, \\ a_{21} &= 0, & a_{22} &= ikF^2 + S, & a_{23} &= -\ell, & a_{24} &= 0, \\ a_{31} &= ik, & a_{32} &= \ell, & a_{33} &= ik, & a_{34} &= -ik, \\ a_{41} &= 6ik + 6k^2\delta_r, & a_{42} &= \ell, & a_{43} &= 0, & a_{44} &= -i(k/A_S)c. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (19)$$

上式中で、無次元複素位相速度 C は、 a_{44} 中 C のみ含まれており、この式により各水理条件に対する河床波の増幅率が求められる。その結果は後述する。

4. 各変動量間の位相差

河床波に対する各変動量の位相差ならびに振幅比は、河床波の発生機構を説明するために不可欠である。そこでここでは各変動量間の位相差を求めておく。

(18) 式を書き直すと、次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 e^{i\theta_u/\eta_0} \\ v_0 e^{i\theta_v/\eta_0} \\ \xi_0 e^{i\theta_\xi/\eta_0} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (20)$$

上式より、河床波 η_r に対する u_r, v_r ならびに ξ_r の振幅比と位相差を求めると次式のようになる。

$$(1) \quad u_r \text{ の振幅比 } u_0/\eta_0 \text{ と位相差 } \theta_u \\ \frac{u_0}{\eta_0} = \left\{ \frac{\Delta_{uR}^2 + \Delta_{uI}^2}{\Delta_{44R}^2 + \Delta_{44I}^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\theta_u = \arctan \left\{ \frac{\Delta_{uI}\Delta_{44R} - \Delta_{uR}\Delta_{44I}}{\Delta_{uR}\Delta_{44R} + \Delta_{uI}\Delta_{44I}} \right\}. \quad \dots\dots\dots (22)$$

(2) v_r の振幅比 v_0/η_0 と位相差 θ_v

$$\frac{v_0}{\eta_0} = \left\{ \frac{\Delta_{vR}^2 + \Delta_{vI}^2}{\Delta_{44R}^2 + \Delta_{44I}^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\theta_v = \arctan \left\{ \frac{\Delta_{vI}\Delta_{44R} - \Delta_{vR}\Delta_{44I}}{\Delta_{vR}\Delta_{44R} + \Delta_{vI}\Delta_{44I}} \right\}. \quad \dots\dots\dots (24)$$

(3) ξ_r の振幅比 ξ_0/η_0 と位相差 θ_ξ

$$\frac{\xi_0}{\eta_0} = \left\{ \frac{\Delta_{\xi R}^2 + \Delta_{\xi I}^2}{\Delta_{44R}^2 + \Delta_{44I}^2} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\theta_\xi = \arctan \left\{ \frac{\Delta_{\xi I}\Delta_{44R} - \Delta_{\xi R}\Delta_{44I}}{\Delta_{\xi R}\Delta_{44R} + \Delta_{\xi I}\Delta_{44I}} \right\}. \quad \dots\dots\dots (26)$$

(4) τ_x の位相差 θ_τ

θ_τ は(8)式を用いて求められ, $\tau_x'/\tau_0 = 2u_r$ より

$$\theta_\tau = \arctan \left\{ \frac{\Delta_{uI}\Delta_{44R} - \Delta_{uR}\Delta_{44I}}{\Delta_{uR}\Delta_{44R} + \Delta_{uI}\Delta_{44I}} \right\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

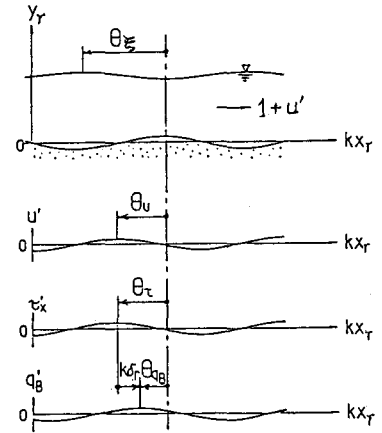


図-2

となり, これは本解析が Shallow Water 流れであるために $\theta_\tau = \theta_u$ となっている。

(5) 局所掃流砂量 q_{Bx} の位相差 θ_{qB}

θ_{qB} は(4)式より求められ, $q_{Bx}'/q_{B0} = 3\tau_x'(x-\delta)/\tau_0$ より,

$$\theta_{qB} = \theta_\tau - k\delta_r \quad \dots\dots\dots (28)$$

となる。

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに, } \Delta_{44R} &= \{k^2(1-4F^2) + 2\ell^2\}S, & \Delta_{44I} &= k\{(k^2+\ell^2-k^2F^2)F^2 + 3S^2\}, \\ \Delta_{uR} &= (k^2-\ell^2)S, & \Delta_{uI} &= k^3F^2, \\ \Delta_{vR} &= -k^2\ell F^2, & \Delta_{vI} &= 3k\ell S, \\ \Delta_{\xi R} &= -4k^2SF^2, & \Delta_{\xi I} &= k(3S^2-k^2F^4). \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

5. 河床波の増幅率

河床波の発達初期の増幅率は kC_I となり, これは(18)式より計算できるが, ここでは2次元河床波と3次元河床波の発生機構の違いを明らかにするために, kC_I を次式のように書き直した。

(14), (16)ならびに(17)式より,

$$kC_I = 6Ask \frac{u_0}{\eta_0} \left\{ \sin \theta_{qB} - \frac{m}{12} \frac{L}{B} \frac{v_0}{u_0} \cos \theta_v \right\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

この(30)式にもとづいて, 河床波の発生機構を説明してみる。ここに, L :河床波の波長, B :河幅, である。

河床波が発生するためには, $kC_I > 0$ でなければならないことから,

$$\sin \theta_{qB} - \frac{m}{12} \frac{L}{B} \frac{v_0}{u_0} \cos \theta_v > 0 \quad \dots\dots\dots (31)$$

である。

2次元河床波の解析では, 上式中 $m=0$ より, $\sin \theta_{qB}$ の項のみによって河床波の発生を説明されるが, 3次元河床波の場合には, 第2項目の $\cos \theta_v$ の値が正であるか負であるかによって河床波の発生領域が異

なってくる。そこで以下に(30)式に関係する各項の値を検討し、3次元河床波の発生機構を説明する。

(1) θ_v の値

河床波に対する各変動量の位相差は前述の式より計算され、 θ_v を(24)式より求めると図-3のようになる。この図は、 $D_0/d = 10$ 、 $\tau_* = 0.1$ の場合の θ_v を図示したものであるが、各 B/mD_0 ならびに k に対して、 θ_v の取り得る値は

$$-\pi/2 < \theta_v < \pi/2$$

であり、つねに $\cos \theta_v > 0$ であることがわかる。

従って3次元河床波の場合には、2次元河床波と異なり、河床波の安定性の要因が内在していることがわかる。また、3次元河床波の場合も、2次元河床波と同様、河床波の不安定性の要因の主役は θ_{qB} であることが理解できる。

(2) u_0/η_0 と v_0/u_0 の値

u_0/η_0 と v_0/u_0 の値を θ_v を求めたのと同じ条件で図示したものが図-4、図-5である。(30)式から、(31)式が満たされている波数領域では、 u_0/η_0 が大きい程、また v_0/u_0 が小さい程河床波は発生しやすいことになる。

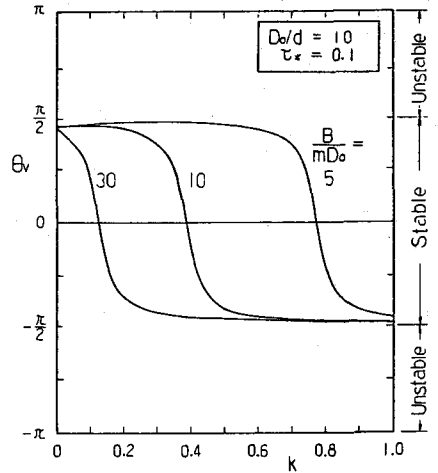


図-3. $\theta_v - k$

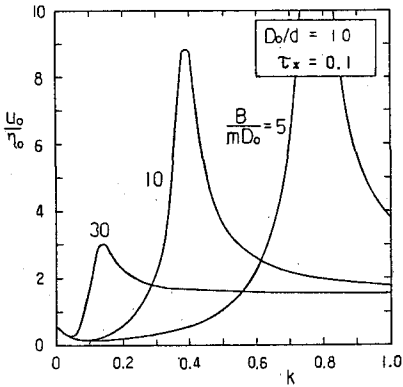


図-4

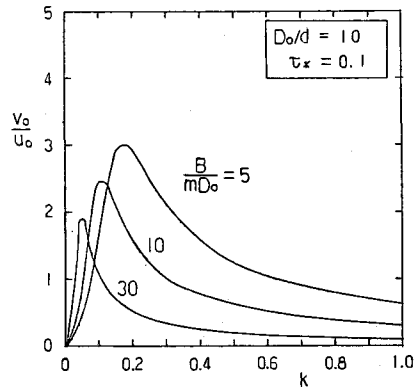


図-5

(3) θ_{qB} の値

θ_{qB} は(28)式のように $\theta_{qB} = \theta_r - k \delta_r$ で求まり、 θ_r は(27)式より求まり図-6のようになる。 θ_r が $0 < \theta_r < \pi$ の領域が河床波の不安定性に寄与する部分であるが、遅れ距離 θ_r によって河床波の発生する波数領域が狭められることになる。従って遅れ距離は2次元河床波と同様、河床波の安定性に寄与する機構である。 δ_r は砂粒の1ステップ長さに対応しており、 δ_r に林・尾崎(1979)式である $\delta_r = \lambda \tau_* d / D_0$ を用いた。 λ は砂粒 Reynolds 数に關係する係数であり、 $\lambda = \text{数} 10$ であると考えられるが、今回の解析では簡単化のために $\lambda = 10$ として解析を行なった。

図-7には θ_{qB} の値を示しておいた。上で述べたように $\cos \theta_v > 0$ であるから、(30)式より $\sin \theta_{qB} > 0$ すなわち $0 < \theta_{qB} < \pi$ の領域で河床波が発生し、 $\sin \theta_{qB}$ が最大となる $\theta_{qB} = \pi/2$ 付近で $k C_I$ が極大となり、この波数が卓越波数となる。また、 $\sin \theta_{qB} = 0$ ($\theta_{qB} = 0$) 付近が中立状態である。

なお、3次元河床波では、前述の河床波の安定化の要因 ($\cos \theta_v > 0$) が既に内在していることから、遅れ距離が2次元河床波と同じならば、同じ τ_* に対して、3次元河床波の発生波数領域は2次元河床波より

も小さくなる。つまり、3次元河床波の波長は2次元河床波よりも長くなることが説明できる。

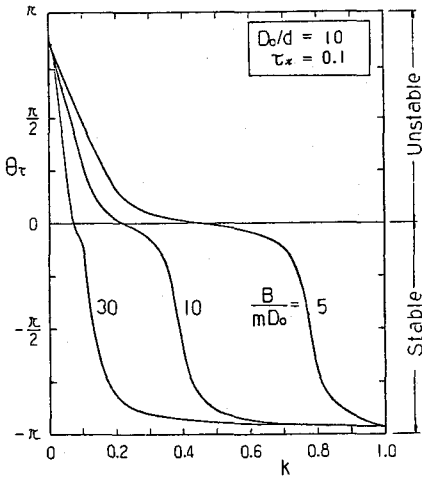


図-6 θ_τ

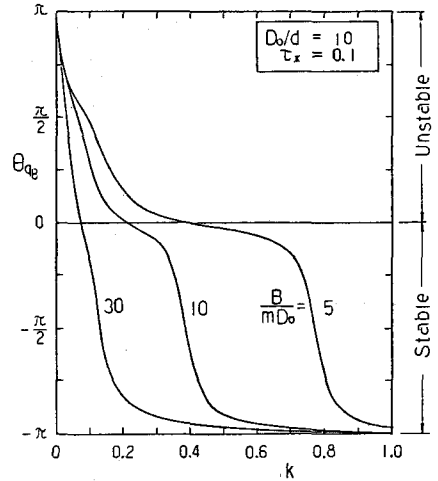


図-7 θ_{q_B}

(4) kC_I の値

以上(30)式に關係する各項の値より、 kC_I を求めたものが図-8である。各 B/mD_0 の曲線に対して、 $kC_I > 0$ となる部分が河床波の発生領域であり、また kC_I の値が極大値となる波数が河床波の卓越波数となる。

なお、各 B/mD_0 の曲線の kC_I の極大値のうち、最大 kC_I を与える B/mD_0 が、モード次数 m の卓越河幅である。ここに、 $m=1$ の場合が単列砂礫堆、 $m=2$ の場合が複列砂礫堆、 $m \geq 3$ の場合が網状流路、に対応している。

図-9(a),(b),(c)は、図-8をより理解しやすくするために各モード次数別に河床波の増幅率を示したものである。この図から、 $m=1, 2, 3$ のそれぞれの場合の各 B/D_0 に対する河床波の発生領域、卓越波数、ならびに卓越河幅がわかる。

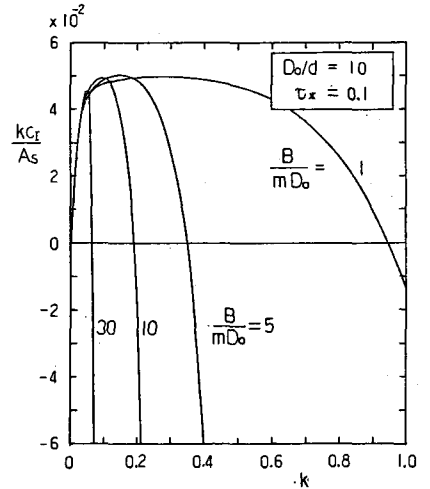


図-8 kC_I

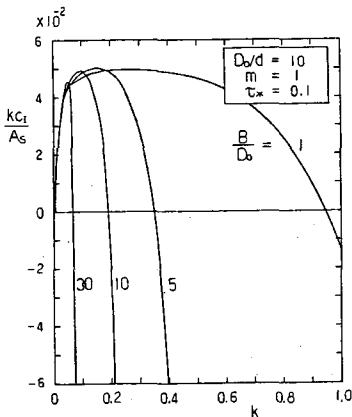


図-9(a) $m=1$

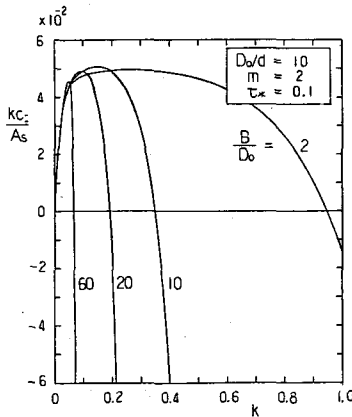


図-9(b) $m=2$

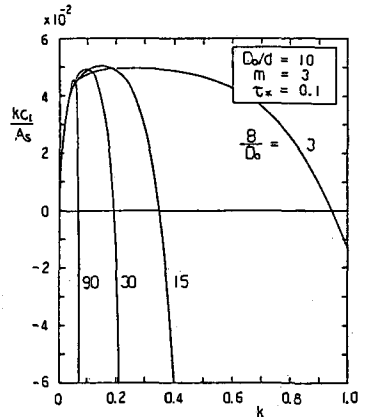


図-9(c) $m=3$

6. 河床波の発生領域と卓越波数

(18)式より kC_I の値を求めると、次式のようになる。

$$kC_I/A_S = (N_I D_R - N_R D_I)/(D_R^2 + D_I^2), \dots\dots\dots (32)$$

$$\left. \begin{aligned} N_R &= (F^2 + 6\delta_T S)\ell^2 k^2 + 6(F^2 - \delta_T S)k^4, & N_I &= 3S\ell^2 k - 6Sk^3 - 6\delta_T F^2 k^5, \\ D_R &= 3S^2 k + F^2 \ell^2 k^2 + (1 - F^2)F^2 k^3, & D_I &= -2S\ell^2 - (1 - 4F^2)Sk^2. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

ただし、(32)式では、数式の簡単化のために、 $k\delta_r \ll 1$ として、 $\exp(-ik\delta_r) \doteq 1 - ik\delta_r$ を用いて展開した。

(31)式中に含まれる主なパラメータを整理すると、河床波の増幅率 C_I は

$$C_I = C_I(k, \ell, \tau_*, D_o/d)$$

となり、本解析では、 $\ell, \tau_*, D_o/d$ をパラメータとして、以下に示す河床波の発生領域ならびに卓越波数を整理した。

(1) 中立安定曲線

3次元河床波の中立安定曲線は、(32)式で $C_I = 0$ より求め、 $D_o/d = 5 \sim 50$ 、 $B/mD_o = 5 \sim 30$ の計算結果を図-10に示した。図-8からもわかるように、各 B/D_o と D_o/d に対する曲線よりも、波数 k の小さい領域が不安定領域であり、それよりも大きい波数では河床波は発生しない波数領域である。

この図より、3次元河床形態の発生領域は D_o/d の影響よりも B/D_o の影響が大きいことがわかる。また各 B/D_o に対して、 D_o/d が大きくなる程河床波の発生波数領域が大きくなる。このことは、(30)式で D_o/d が大きくなると v_o/u_o ならびに $\cos \theta_v$ の値が小さくなり、3次元性のために生じた安定化の寄与が少なくなり、 D_o/d が大きくなるにつれて3次元河床波から2次元の河床波に移行していくものと考えられる。

(2) 卓越波数

卓越波数は(32)式で、与えられた $\ell, \tau_*, D_o/d$ に対して、 kC_I が極大となる波数であり、これを図示したものが図-11である。

また図-12に、本解析より得られた $s = 2.65$ 、 $D_o/d = 10$ 、 $B/D_o = 5, 10, 30$ 、 $m = 1$ の場合の中立安定曲線と卓越波数を、鮭川(1971)ならびに木下(1962)の単粒砂礫堆の実験データとともに比較してみた。

図-13は、図-9(a),(b),(c)図のようにして求められた、各モード次数に対して kC_I が最大となる B/D_o をひとまとめにして図示したものである。この図より与えられた水利条件のもとでどのようなモードの砂礫堆が発生しやすいかがわかる。なお図中に示した曲線の D/d は $D_o/d = 10$ の場合である。

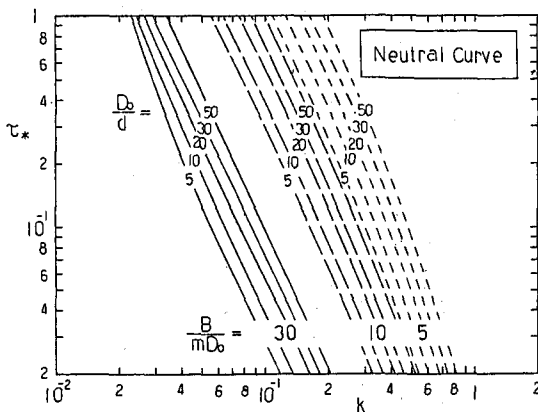


図-10. 中立安定曲線

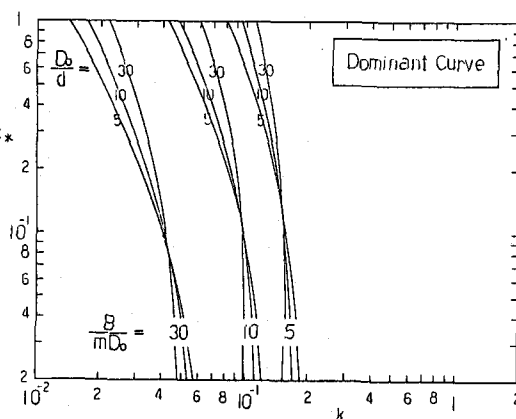


図-11. 卓越波数曲線

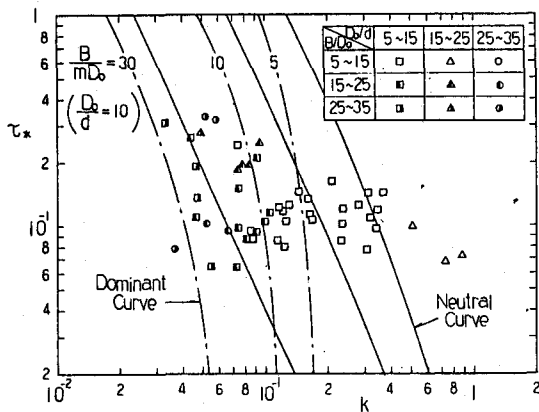


図-12

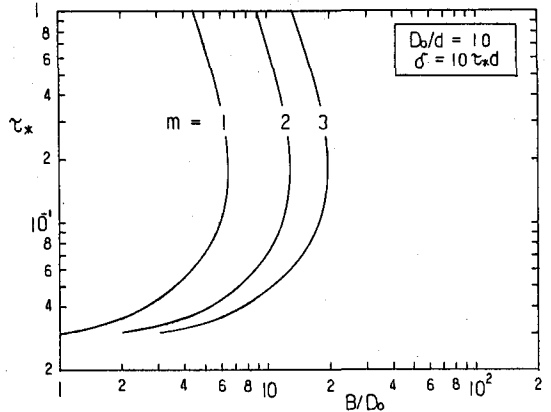


図-13

7. まとめ

本解析では、3次元 Shallow Water 流れモデルを用いて、3次元河床波の発生機構ならびに、2次元河床波の発生機構との比較、3次元河床波の発生領域ならびに卓越波数を河床安定理論の立地から検討した。これらの主な結果は、

1) (30)式で、 $\cos \theta_v > 0$ となることから、 θ_{qB} によってほぼ発生領域が決まる。

2) 3次元河床波では、河床波の安定化の要因として遅れ距離以外に、 $\cos \theta_v > 0$ の項があるため、3次元河床波と2次元河床波の δ_r が同じならば、同じ τ_* に対して河床波が発生する波数領域は、3次元河床形態の波数が2次元河床形態の波数よりも小さくなる。

3) 3次元河床形態では相対水深 D_0/d よりも相対河幅 B/D_0 の影響が大きいことが解析的に明らかになった。

なお、本解析は、3次元河床波の発生機構を中心として解析をすすめたため、実験値との十分な比較検討が行えなかった。今後この点について検討を進めていくつもりである。

謝辞 本研究をすすめるにあたり、中央大学大学院和泉雄一君から熱心な協力を得た。記して謝意を表する。

参考文献

- 1) 土木学会水理委員会(移動床流れの抵抗と河床形状研究小委員会): 移動床流れにおける河床形態と粗度, 土木学会論文集, 第201号, 1973, pp.65-91.
- 2) Hayashi, T.: Formation of dunes and anti-dunes in open channels, Proc. ASCE, vol. 96, HY 2, 1970, pp.357-366.
- 3) Engelund, F.: Instability of erodible beds, Jour. Fluid Mech., vol. 42, 1970, pp.225-244.
- 4) Fredsøe, J.: On the development of dunes in erodible channels, Jour. Fluid Mech., vol. 64, 1974, pp.1-16.
- 5) 林泰造・大西光陽: せん断流モデルによる2次元河床波発生 of the theoretical study, 第25回水理講演会論文集, 1981, pp.81-92.
- 6) Hansen, E.: On the formation of meanders as a stability problem, Hy. Lab., Technical Univ. Denmark, Basic Research Prog. Report no. 13, 1967, pp.9-13.
- 7) Callander, R.A.: Instability and river channels, Jour. Fluid Mech., vol. 36, part 3, 1969, pp.465-480.
- 8) 林泰造: 河川蛇行の成因についての研究, 土木学会論文報告集, 第180号, 1970, pp.61-70.
- 9) Engelund, F. and Skovgaard, O.: On the origin of meandering and braiding in alluvial streams, Jour. Fluid Mech., vol. 57, part 2, 1973, pp.289-302.
- 10) Parker, G.: On the cause and characteristics scale of meandering and braiding in rivers, Jour. Fluid Mech., vol. 76, part 3, 1976, pp.457-480.
- 11) Fredsøe, J.: Meandering and braiding of river, Jour. Fluid Mech., vol. 84, part 4, 1978, pp.609-624.
- 12) Hayashi, T. and Ozaki, S.: Formation of alternating bars, Proc. of U.S. Japan Binational Seminar on Erosion and Sedimentation, Hawaii, 1978.
- 13) 木下良作: 石狩川河道変遷調査一参考編一, 科学技術庁資源局資料, 第36号, 1962, 174p.
- 14) 鮎川登: 直線河道における蛇行現象に関する水理学的研究, 科学技術庁資源局資料, 1971, 427p.
- 15) 林泰造・尾崎幸男: 掃流砂量に関する基礎的研究, 第23回水理講演会論文集, 1979, pp.157-167.