

個々の波の発生・消滅事象に着目した河床波の発達過程 Mechanism of Dune Development as a Birth-and-Death Process

京都大学工学部 正員 中川 博 次
京都大学工学部 正員 辻本 哲 郎
京都大学大学院 学生員 赤尾 恒 博

1. ま え が き

河床波の発達過程をモデル化することは、河床波の形成機構を明らかにする上でのみならず、流量が時間的に変化する場での河床形状の応答については抵抗・流砂量の応答を予測する¹⁾上でも重要である。ところが河床波形成のごく初期の微小変形時は線型解析も可能で不安定解析を基盤にかなり理論的に精密な扱いも試みられるようになった²⁾ものの、発達過程全体をみると、非線型性や不規則性の卓越などによりその取り扱いが容易ではないようである。こうした河床波の発達過程を次元解析にもとづいて数式表示し、河床波の発達時間を推定しようとしたものに Yalin の研究^{3), 4)}があるが、そこでは発達の内部機構については何ら触れられていない。これに対し著者ら⁵⁾はすでに河床波の分布性状の役割の重要性に着目したモデルを提案し、時間の平方根に比例した波長・波高の発達過程を説明しているが、平衡状態に達する過程の説明には至っていない。これは発達の素過程として河床波の追いつき合体事象のみが着目され、分裂によって新しい波の発生する効果が無視したためと考えられる。以上のような研究の現状にあつては、この発達過程に対しいくつかのモデルを模索しながら現象の内部機構についての理解を深めていくことが意義のあることと思われる。

2. 河床波の発達過程に関する実験と発達機構の洞察

長さ9m、幅33cmの可変勾配水路で粒径0.5mmのほぼ均一砂を用いて平坦河床から河床波が発生・発達する過程を実験的に調べた。実験は砂粒 Reynolds 数が14~22, Froude 数が0.45~0.55, 相対水深が100~200程度で数ケース実施した(これらの実験条件は著者らの別の論文²⁾に示すものとほとんど同じである)。砂粒 Reynolds 数の範囲を見ると Yalin⁶⁾の領域区分では形成される河床波は ripples または dunes であると期待されるが、文献2)に示したようにその形成過程においては Froude 数または水深の影響が著しくそれゆえここでは dunes と判断した(ripples ならばその形成過程は粘性底層との干渉が卓越するはずであろう)。実験結果を峰間隔を波長、その間の落差高を波高と定義して整理すると平均波高、平均波長と初期平均波長の差の時間的変化は相似で発達過程のかなりの部分で時間の平方根にほぼ比例している。また波形勾配は初期においては増加がみられるがある程度時間が経過してからはほとんど一定である(文献2)図-9参照)。

上述の実験結果、著者らの従来の実験結果⁵⁾、さらに Yalin⁴⁾の洞察から dunes の時間的発達過程は相似と考えられ、それゆえその内部機構は共通のはずである。すなわち水理条件による発達過程の相違は「相似規準」⁴⁾のみで説明されよう。こうした前提からここでは上述の実験の一例(路床勾配1/500, 単位幅流量 $q=0.174$ lit/sec/cm)のみを取り上げ、河床波発達の内部構造を詳しく検討することとする。

まず平坦河床に通水後1分毎に測定された河床縦断形状記録(自走式超音波測深器を使用)より図-1に示すような走時曲線を作成した。ここでは水路の中央区間3m(A区間と呼ぶ)を対象としている。以下この走時曲線をもとに検討を進める。

走時曲線からは峰間隔として波長、

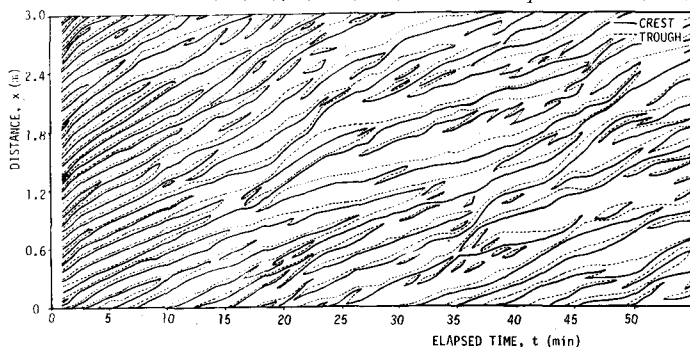


図-1 走時曲線

峰と谷の距離から安息角を一定として波高，また峰位置の時間的変化として波速が求められるが，走時曲線の作成の段階ですでに「3次元性」及び個々の波の高低差などに関する情報は「縮約」されていることに注意しておかねばならない。

さて図-1に示される走時曲線をもとに，区間A内の波個数の時間的変化，1分間当り区間Aに出入する波個数，区間A内での発生・消滅個数等を調べた。まず，図-2(a)は区間A内に存在する波(峰)の個数の時間的変化 $N(t)$ を示したものであり，図-2(b)には， N と平均波長 $\bar{L}$ の関係として次式を仮定して求めた波長の時間的変化を黒丸のプロットで示した。

$$\bar{L} = A_A / N \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここで A_A は区間Aの長さ(3.0 m)である。また図-2(b)には峰間隔として定義した波長の平均値の時間的変化をも白丸のプロットで併示した。図-2(b)及び図-3(a)からわかるように N の変化と $\bar{L}$ の変化は式(1)によって良好に対応している。なお，図-3(b)には峰間隔で定義した波長の変動係数 α_L と N の関係が示されている。 α_L と N の関係は実験条件によって異なり，一意的関係を見出すのは難しいが概略的には N に対して減少関数で0.5~0.2程度に変化する。なお図中に示した r は波長分布をgamma分布と仮定した場合のshape parameterで $r = 1/\alpha_L^2$ である。

ところで図-2(a)に示される N の時間的変化の様相から次式による表示が期待される。

$$N = N_\infty + (N_0 - N_\infty) \exp(-t/T_N) \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここで下付添字0は初期値， ∞ は平衡値を示し， T_N は発達時間スケールと言うことができる。実験結果より $(N - N_\infty)/(N_0 - N_\infty)$ の時間的変化を片対数表示すると図-4のようになり式(2)の成立が認められる。また式(2)をもとにした計算結果を図-2(a)，図-3(a)に破線で示した。なお式(2)は，

$$dN/dt = -a(N - N_\infty); \quad a = 1/T_N \quad \dots\dots\dots(3)$$

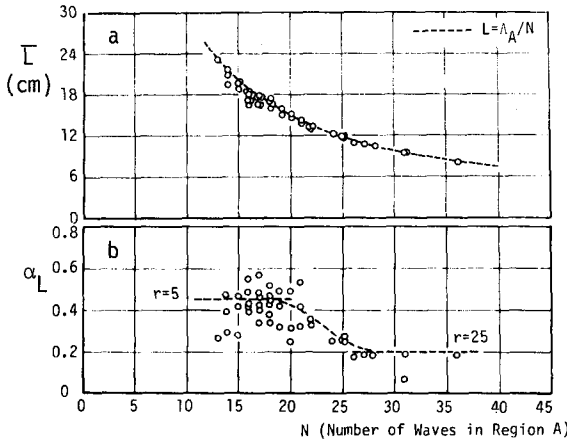


図-3 波長の平均値，変動係数と N の関係

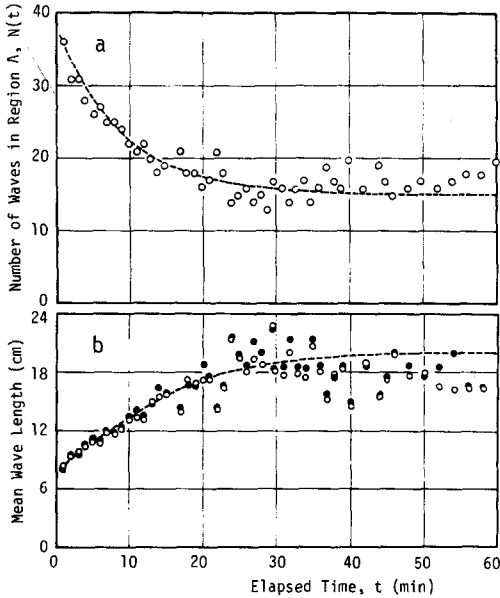


図-2 河床波の発達過程

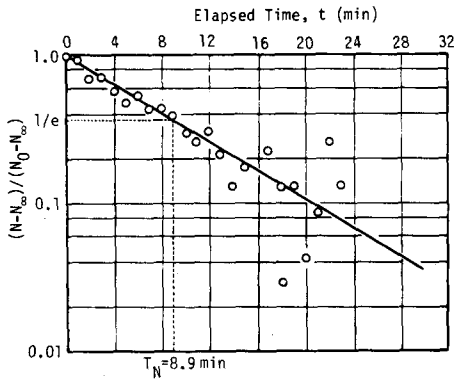


図-4 式(2)の検証

を示している。一方 dN/dt はその「しくみ」を考えると次のように書かれよう。

$$dN/dt = R_B - R_D + R_I - R_O \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここに、 R_B, R_D : 区間Aにおける単位時間当りの波の発生個数及び消滅個数、 R_I, R_O : 単位時間当り区間Aに入ってくる波の個数及び区間Aから出ていく個数である。なおここで河床縦断形状の測定は1分毎に行っており、実際現象の観察からも単位時間を1分程度とするのが最適と考えられ、以下単位時間を1分として扱うことにする。走時曲線をもとに各時刻の R_B, R_D 及び R_I, R_O を調べた結果は図-5, 6に示される。また図-7に区間Aでの波の個数の時間的変化へのこれらの貢献度合を変化個数の累積の時間的変化として示した。

これによると R_I と R_O はほぼ均衡しており(場所の一樣性が確保されている)、河床波の波の個数変化は主として R_B と R_D の差でもたらされる。波の発生・消滅はその時点での流砂状況及び河床状況 ($N(t)$) に規定されと考えられるが、流量一定での平坦河床からの河床波の発達過程を対象とすると、これらは N に依存すると考えられる。式(3)が正しければ、

$$R_B - R_D = a(N_{\infty} - N) \quad \dots\dots\dots(5)$$

である。すなわちここで a は実験条件(砂粒径、河床勾配、単位幅流量)で決定されるものであり、 R_B, R_D と N の関係を実験データから調べてみると、図-8に示すようになりこれはまさに「確率的事象」であるため相当にばらついている。こうした現象については数回の実験を繰り返してアンサンブル平均を求めるのが良いが、まず発生や消滅(これらが河床波の発達過程の素事象である)がどのような条件で生じ易いかを今回の実験結果から調べることにした。走時曲線をもとに1分毎にまず波長分布を調べ(ヒストグラムを作成)、その時点から1分間の間にどの波長の波が消滅したか及びどの波長の波が2つ(以上)に分裂したかをそのヒストグラム上に表示した。図-9はこうして得られたヒストグラ

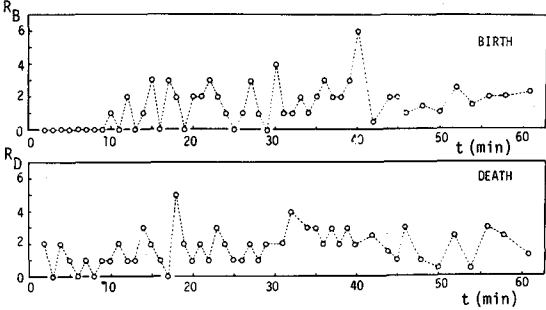


図-5 R_B, R_D の時間的変化

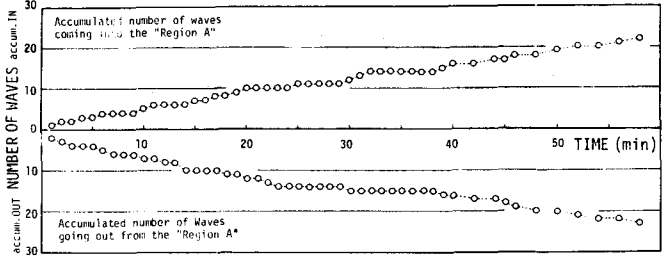


図-6 R_I, R_O の時間的変化(累積表示)

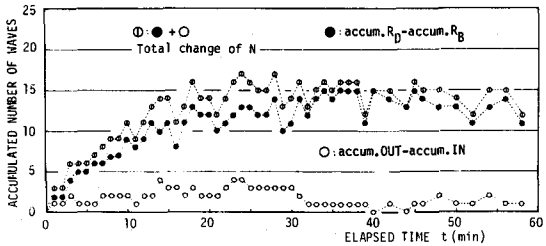


図-7 河床波の発達に対する各素過程の貢献度

ムを N の等しい時刻については加算して整理したものである(図中の N の値の次の()内の数字はその N の値を有する時刻の数である)。図-9のヒストグラムのうち  は単位時間(1分)当りに消

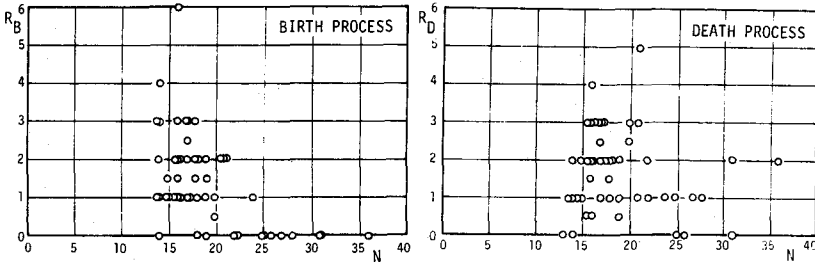


図-8 R_B, R_D と N の関係

減したもの(2分を単位としたものを参考のため)で表示している),  はその波の上に新しい波が発生した割合を示している。これらによると発生事象は長い波に, 消滅事象は短い波に頻繁に生じていることがわかる。すなわち N が大きいほど短い波の割合は高いから R_D が大きく, また N が小さくて長い波の割合が小さいほど R_B は小さくなっているはずであり, R_D は N の増加関数, R_B は減少関数であると考えられる(図-8 だけでは判断し難い)。また, 河床波の発達過程が河床波スケールの分布性状に強く支配されていることが予想される。次章ではこうした洞察をもとに, 河床波の発達過程の素事象のモデル化を試みる。

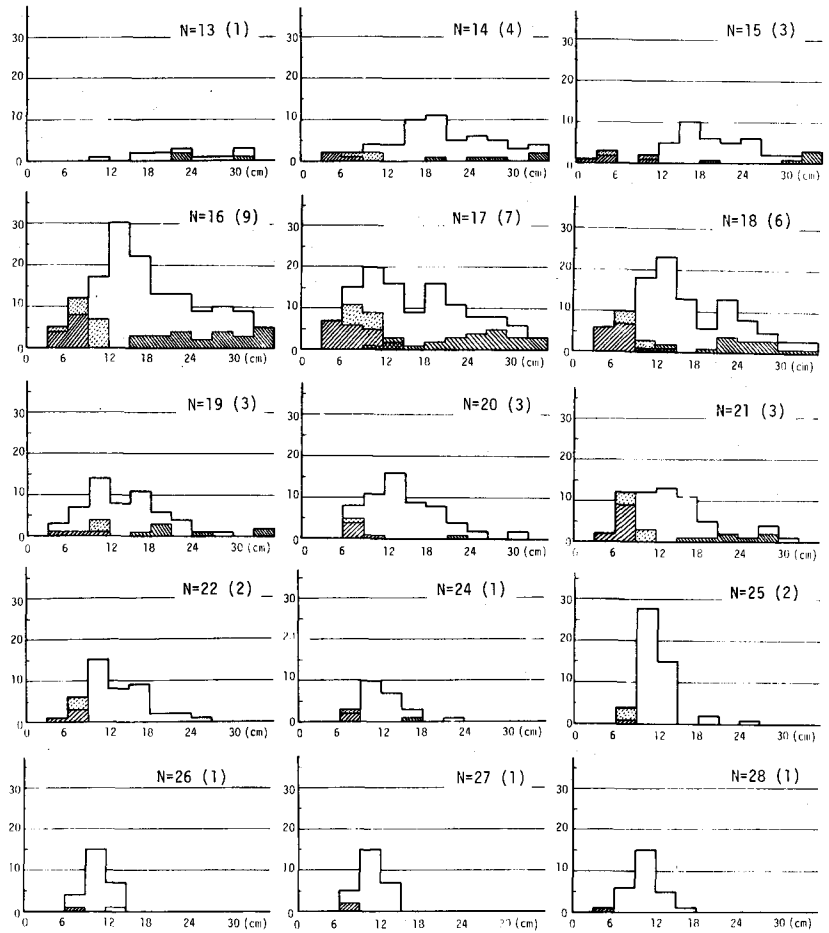


図-9 波長分布のヒストグラムと発生・消滅事象

3. 河床発達の素過程としての発生・消滅過程のモデル化

前章の実験的考察の結果, 河床波の発達の素過程は新しい波の発生と波同志の合体による消滅であると見なせる。新しい波の発生は長くなってきた波の上流斜面で生じる「確率的」なものであり, 波同志の合体は波のスケールの分布にもとづく波速差に依るものと考えられ, いずれも単に対象区間の波数(N)そのものだけでなく波長分布性状に強く支配されている。そこでまず波長の分布性状について調べ, その後発生・消滅事象のモデル化を試みる。波長分布の時間的変化を調べたものが図-10である。いま, 波長分布に gamma 分布を適用すると, 規準化された波長($\xi \equiv L/\bar{L}$)の密度関数は,

$$f_L(\xi) = \frac{\tau}{\Gamma(\tau)} (\tau \xi)^{\tau-1} \exp(-\tau \xi) \quad \dots\dots\dots (6)$$

で与えられる。図-10に示すように図-3(b)に示した α_L と N の関係にもとづいて時刻 $t=1$ 分~6分程度で $\tau=25$, 7~9分で $\tau=15$, 10~12分で $\tau=9$, 15分以降は $\tau=5$ とすると良い適合が見られる。

ところで, 新しい波の発生は主として長くなった波が2つ(以上)に分裂するといった型式(様相)で現れる。このことから1個の波が2個に分裂する「可能性」が1つの波長が2つの波長で占められ得る「確率」で評価されると考え, これにもとづいて新しい波の単位時間当りの発生確率密度を求めるモデルを提案する。すなわち規準化された波長 ξ の波が ξ_1 と ξ_2 の2つの河床波に置き換えられ得る確率 $p_B(\xi)$ は $\text{prob}[\xi_1 + \xi_2 < \xi]$ で与えられるものとする。新しく配列された波 ξ_1, ξ_2 も, もとの ξ と同じ統計的母集団に属すると考えると確率変数 $\{\xi_1 + \xi_2\}$ の

密度関数は $\{\xi\}$ のその2重畳み込みとなる。よって $\{\zeta\} \equiv ((\xi_1 + \xi_2)/2)$ の密度関数は、

$$g(\zeta) = \frac{2r}{\Gamma(2r)} (2r\zeta)^{2r-1} \cdot \exp(-2r\zeta) \dots\dots(7)$$

となり、 $p_B(\xi)$ は次式で与えられる。

$$p_B(\xi) = \int_0^{\xi/2} g(\zeta) d\zeta \dots\dots(8)$$

確率 $p_B(\xi)$ で新しい波の発生が生ずると考えられるが、一旦分裂が生じるとそれによって短波長となり「ひきつづいて」そこに分裂が生じることは無い。このようにある状態で分裂による発生を考え、次に次の新しい状態でまた確率的な分裂事象を考えることになるがその状態の遷移は瞬間的ではなく時間を要するものである。この状態の“exchange time”をいま t_{ex} とおくと、単位時間当り波1個当りの発生確率密度 $r_B(\xi)$ が次のように求められる。

$$r_B(\xi) = p_B(\xi)/t_{ex} \dots\dots\dots(9)$$

すなわちこの“exchange time”はEinsteinの掃流砂モデル⁷⁾において砂粒の移動開始の可能性を表わす確率（たとえば揚力が砂粒の水中重量を上回る確率）を pick-up rate（単位時間当りの砂粒の離脱確率密度）に置き換えるのに用いられたものと同質のものである。例えば砂粒径スケールの河床波が形成されるのに要する時間を考え、 t_{ex} がこれに比例すると考えると、

$$t_{ex} = K_{ex} \cdot (d^2/q_B) \dots\dots\dots(10)$$

と表わせ実験定数 K_{ex} は系統的な実験から決めると良い。なお d :砂粒径、 q_B :流砂量である。いまのところ検討している実験条件は一つであり、先に単位時間として採用した1分が t_{ex} としても適当なようである。なお R_B は式(9)と波長分布の密度関数を用いて、

$$R_B = N \int_0^\infty r_B(\xi) f_L(\xi) d\xi \dots\dots\dots(11)$$

で計算される。

一方、波の消滅は短波長の波が下流側の波に追いつき合体することに依っていることが推定され、こうした事象を生じる条件としてまず波長と波速の関係を検討する。河床波の進行が掃流砂の輸送を担っていると考え、掃流砂量が発達過程でほとんど変化しないとすると波速と波長の関係として次式が得られる。

$$U_W = \frac{\beta}{L}; \quad \beta \equiv \frac{2q_B}{\theta(1-\rho_0)} \dots\dots\dots(12)$$

ここに ρ_0 :砂の空隙率、 θ :波形勾配である。走時曲線から求めた波長と波速の関係は図-11に示されほぼ式(12)が成立していると判断される(q_B, θ, ρ_0 は実測値を用いており $\beta \approx 1.57 \text{ cm}^2/\text{sec}$)。

さて、合体事象を考えるのに図-12に示すように任意の3つの波の連なりを取り出す。その波長を上流から η, ξ, η (いずれもその時刻の平均波長で規格化してある)とする。いま ξ の波を着目波としこの波の消滅(下流側の波に追いつき合体する)を考える。 η, ξ, η の大小関係より次の4つの場合が考えられる(図-13参照)。

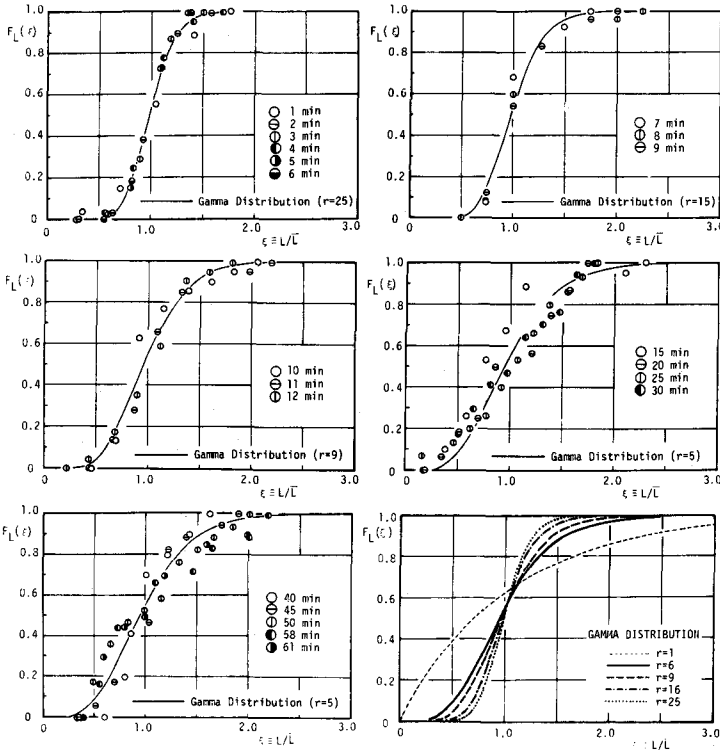


図-10 波長分布の時間的变化

A: $\eta, \eta' > \xi$ のとき; ξ の波が η の波に追いつく。

B: $\eta > \xi, \eta' < \xi$ のとき; η' の波が ξ に、または ξ の波が η の波に追いつく。

C: $\eta, \eta' < \xi$ のとき; 追いつきは生じない。

D: $\eta < \xi, \eta' > \xi$ のとき; η' の波が ξ の波に追いつく。

ところで ξ の波が η に追いつくのに要する時間及び η' の波が ξ の波に追いつく時間の無次元量 (波長, 波速を規準化して表示) はそれぞれ

$$T_{A*}(\xi, \eta) = \eta / (\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\eta}), T_{B*}(\xi, \eta') = \xi / (\frac{1}{\eta'} - \frac{1}{\xi}) \quad \dots\dots\dots (13)$$

であり, 図-13のB領域では $T_{A*}(\xi, \eta) < T_{B*}(\xi, \eta')$ のときに限って ξ の波が η の波に追いつく (このとき ξ の波が消滅したとする)。この領域を図-13でBⅡ領域としBⅠ領域と次の式で表わされる関係で区分される。

$$\eta'_0(\xi, \eta) = \xi \eta^2 / (-\xi^2 + \xi \eta + \eta^2) \quad \dots\dots\dots (14)$$

ξ の波が η の波に追いついた場合を対象 (このときを合体によって消滅したと定義している) とすると結局単位時間当りの波長 ξ の波1個当りの消滅確率密度 $r_D(\xi)$ の無次元表示 $r_*(\xi)$ は次式で与えられる。

$$r_*(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} f_L(\eta') d\eta' \cdot \int_{\eta}^{\infty} \frac{1}{T_{A*}(\xi, \eta)} f_L(\eta) d\eta + \int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{T_{A*}(\xi, \eta)} \int_{\eta'_0(\xi, \eta)}^{\xi} f_L(\eta') d\eta' f_L(\eta) d\eta \quad \dots\dots\dots (15)$$

これをもとに $r_D(\xi)$ は次のように与えられよう。

$$r_D(\xi) = \begin{cases} (60 \beta / \bar{L}^2) r_*(\xi) & (\xi < \xi_f) \\ 1 & (\xi \geq \xi_f) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで r_D [1/min], β [cm²/sec], $\bar{L}$ [cm] であり, 上式は1分間以内に1個の波当り1個以上消滅することを除外している。 ξ_f は次式を満たす ξ の値である。

$$r_*(\xi_f) = \bar{L}^2 / 60 \beta = R_A^2 / (60 \beta N^2) \quad \dots\dots\dots (17)$$

R_D は勿論次式で与えられることになる。

$$R_D = N \int_0^{\infty} r_D(\xi) f_L(\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots (18)$$

4. ま と め

本章では前章で提案した河床波発達過程の素現象である新しい波の発生と追いつき合体による波の消滅についてのモデルを実験結果と比較して検討する。まず図-14に式(9)(式(7), (8)を代入)の検証が示される。実験データは図-9をもとに波長分布の相似なものをいくつかまとめたものである。これによると t_{ex} の評価に曖昧さがあるもののほぼ良好に $r_B(\xi)$ が評価されているようで, 今回の実験では $t_{ex} = 1$ 分と選んだのは適当であったと判断される。なお, 式(11)によって求められる R_B と N の関係を実験値と比較したものが図-16(a)で実測値との対応もほぼ良好である。

一方, 消滅過程について式(16)(式(15)を代入)を検証したものが図-15で, 図-9に示した実験結果の傾向を良く説明している。また式(18)によって求められる R_D と N の関係については, 図-16(b)に示されるが実測値がかなりばらついているため検証には不適である。そこで R_D と R_B の差と N の関係を調べた

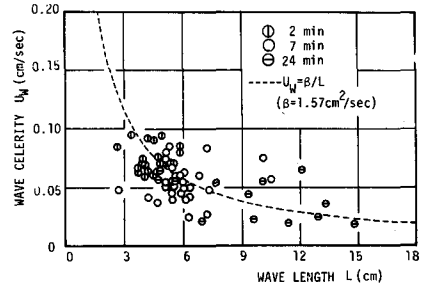


図-11 波長と波速の関係



図-12 記号図

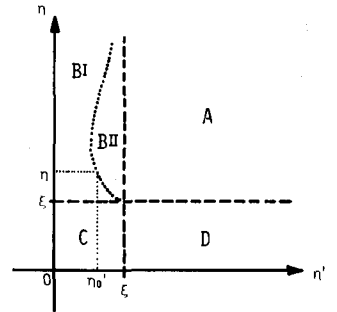


図-13 参考図

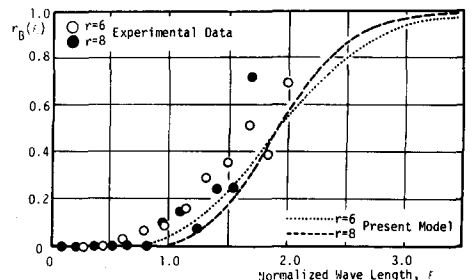


図-14 波数別発生確率密度

のが図-17である。この場合も個々のデータのばらつきは大きいが式(3)で近似される関係(図に破線で表示)と計算曲線(実線)はかなり良く一致しており、本論文で展開したモデルで現象の大筋は比較的うまく説明されると考えられる。なお、今後、“exchange time”に代表される説明の不明瞭な点を克服するとともに、河床波発達過程の相似基準をも明らかにする予定である。

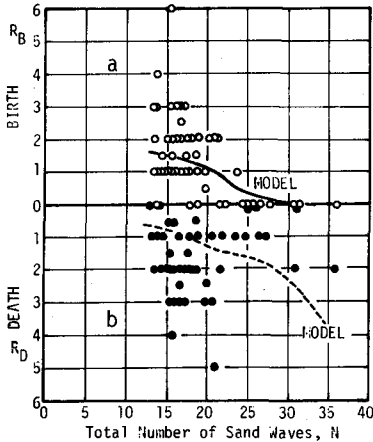


図-16 モデルの検証(I)

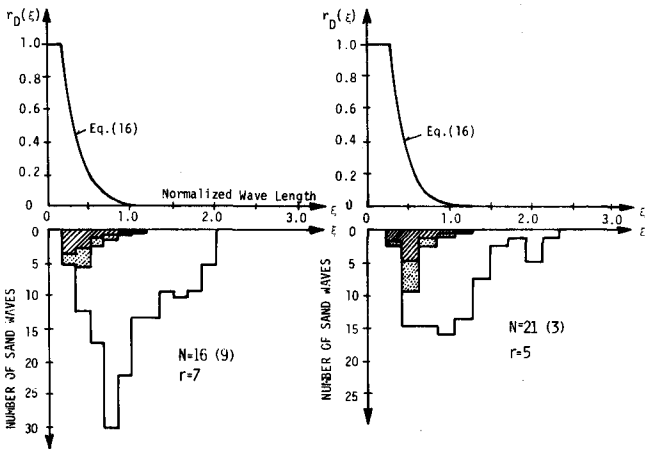


図-15 波数別消滅確率密度

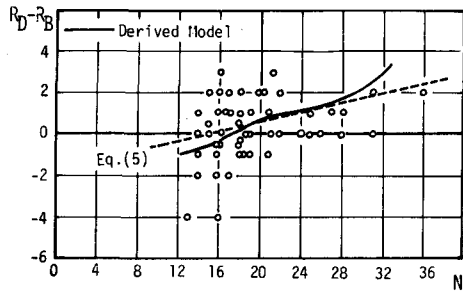


図-17 モデルの検証(II)

参考文献

- 1) 中川博次・辻本哲郎：Lower Regimeにおける非定常移動床流れの抵抗の遅れ性状。第25回水理講演会論文集，1981。
- 2) 中川博次・辻本哲郎：砂面の波数スペクトルの時間的変化からみた河床波の形成機構。第26回水理講演会論文集，1982。
- 3) Yalin, M. S.: On the Development of Sand Waves in Time, Proc. XVIth Congr., IAHR, Brasil, Vol. 2, 1975.
- 4) Yalin, M. S. and C. T. Bishop: On the Physical Modelling of Dunes. Proc. XVIIth Congr., IAHR, FRG, Vol. 1, 1977.
- 5) 中川博次・辻本哲郎：河床波の発達性状に関する実験的考察。京都大学防災研究所年報第19号B-2, 1976.
- 6) Yalin, M. S.: *Mechanics of Sediment Transport*, 2nd Ed., Pergamon Press, 1977.
- 7) Einstein, H. A.: The Bed Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flows. Tech. Bull., No. 1026, USDA, SCS, 1950.