第25回水理講演会論文集　1981年２月

縦渦流れにおける流砂と分散について

Sedimcnt Transport and Dispertion
of Pollutant in Flow with Longitudinal Vorticies

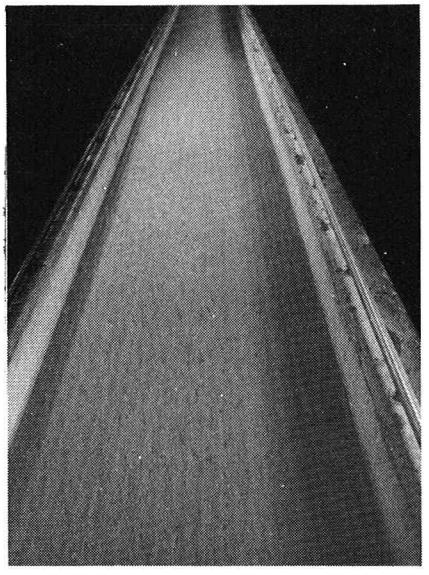
北海道大学　正会員　○黒木　幹男
北海道大学　正会員　岸　力

1. はじめに

開水路流れの中には種々の形ちの二次流が存在するが，本研究で対象とする縦渦もそうした二次流の一つであり，主流方向に軸を有しほぼ水深程度のスケールの二次流が，横断方向に規則的に配列されている。縦渦が顕著に発達すると，断面内での流動のみにとどまらず，主流速も横断方向に速い部分と遅い部分が生じることが大きな特徴である。　この特徴のゆえに縦渦の存在はかなり古くから河川技術者の間で知られていたようである[1]。　近年木下[2),3)]により実際河川の洪水流の観測および実験水路での組織的な研究によりその実体が明らかにされつつあり，また池田[4)]，林・山田[5)]および著者ら[6)]によって理論的な検討が行なわれている。

縦渦は滑面平坦床においても発生するが，その空間的な位置は常に横断方向に〝ゆらぎ〟を示し実験的な検出を困難にしていることを森および著者ら[7)]は示した。これに対し木下は水路床に幾つかの人工的なパターンを施した一連の実験によって，縦ミゾやウロコ状などの特定のパターンのときに縦渦が最も安定して存在することを示している。　これらの事実は移動床流れにおける各種の河床波の発生機構との関連を示唆する重要な指摘である。　写真－１は著者らが行なった移動床水路実験で縦渦が安定的に現われる場合の河床の形状であり，水路全長にわたって，水深のほぼ２倍の間隔で縦筋が生じている。

本研究では，平坦な移動床上にこのような縦筋河床が形成される機構について理論的な検討を行なった。また縦渦が形成された場合に流れの分散機構にどのような影響を及ぼすかにつき実験的な検討を行なった。



写真－１　縦渦流れによる縦筋の形成

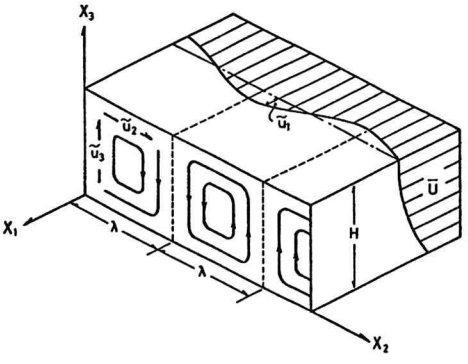
2. 縦渦流れの構造

本節では平坦床上における定常的な縦渦流れの構造に関する著者らの理論解析の概要を記す。　図－１のように座標系をとると，流れの運動方程式および連続式は次式のように表わせる。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = F_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\tau_{ij} - \rho\bar{u}_i\cdot\bar{u}_j - \rho\overline{u'_i u'_j}\right\} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0,\ \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (2)$$

ただし，$\bar{u}_i$，u'_i は i 軸方向の流速成分の時間平均値およ



図－１　縦渦流れの構造と座標系

び乱流瞬間値，F_i は外力，τ_{ij} は粘性応力である。
各流速成分および粘性応力とレイノルズ応力とからなる応力項を，縦渦の存在しない状態（基本流）と縦渦成分との和に分けて，それぞれ次式のように表わす。

$$\bar{u}_i = \bar{U}_i + \varepsilon \tilde{u}_i \quad , \quad \tau_{ij} - \rho \overline{u'_i u'_j} = \tau_{ij} + \varepsilon \tilde{\tau}_{ij} \tag{3}$$

(3)式を(1)，(2)式に代入し ε のベキごとに整理し，ε の一乗の項だけをとり出せば線型化した縦渦の運動方程式および連続式は次式のようになる。

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \tilde{u}_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\tilde{\tau}_{ij}}{\delta x_j} , \quad \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{4}$$

ここで流れは x_1 方向に一様であると仮定し，基本流を $U_1 = U(x_3)$，$U_2 = U_3 = 0$ とおく。
さらに x_1 方向の渦度 $\tilde{w}_1 = (\partial \tilde{u}_2 / \partial x_3 - \partial \tilde{u}_3 / \partial x_2)$ を導入して(4)式を変形すると次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} + \frac{dU}{dx_3} \tilde{u}_3 = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial \tilde{\tau}_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{13}}{\partial x_3} \right\} \\ &\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} (\tilde{\tau}_{33} - \tilde{\tau}_{22}) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \tilde{\tau}_{23} \right\} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

上式を解くためには，右辺の応力項を適当な関係式で与えなくてはならない。 ここではNewtonの渦モデルの成立を仮定し，さらにPerkins[8]が偶角部の二次流の測定から与えた関係式を用いる。

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{\tau}_{33} - \tilde{\tau}_{22} = \alpha \tilde{\tau}_{13} \qquad (\alpha \fallingdotseq 1.0) \\ &\tilde{\tau}_{ij} = \rho(\nu + \varepsilon_m) \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial u_i} \right) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ただし，$\varepsilon_m = \kappa \bar{u}_* H / 6 = const.$ は渦動粘性係数の平均値，κ はカルマン定数，$\bar{u}_*$ は平均のマサツ速度および H は平均水深である。 (6)式の関係を(5)式に代入し整理すると次式を得る。

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} - (\nu + \varepsilon_m) \nabla^2 \tilde{\psi} = \frac{dU}{dx_3} \cdot \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_2} \\ &-\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \tilde{\psi} + (\nu + \varepsilon_m) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \tilde{\psi} = \alpha (\nu + \varepsilon_m) \frac{\partial^3 \tilde{u}_1}{\partial x_2 \partial x_3^2} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

ただし $\quad \tilde{u}_2 = \dfrac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_3} , \quad \tilde{u}_3 = -\dfrac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_2} , \quad \tilde{w}_1 = -\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \tilde{\psi} = -\nabla^2 \tilde{\psi}$

縦渦が定常的に存在する場合の流れの構造を求めるため，時間に関する微分項を除き，$\bar{u}_*$，H を用いて無次元化すると解析の基本式は次のようになる。

$$\nabla^2 \hat{u} = -R_*^2 (1 - z) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} , \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \hat{\psi} = \alpha \frac{\partial^3 \hat{\psi}}{\partial y \partial z^2} \tag{8}$$

ただし $\quad y = \dfrac{x_2}{H} , \quad z = \dfrac{x_3}{H} , \quad \hat{u} = \dfrac{\tilde{u}_1}{\bar{u}_*} , \quad \hat{\psi} = \dfrac{\psi}{\bar{u}_* H} , \quad R_* = \dfrac{\bar{u}_* H}{\varepsilon_m}$

(8)式の解の形ちは次のように与えられる。

$$\hat{u} = u_0(z) \cos ky , \quad \hat{\psi} = \psi_0(z) \sin ky \tag{9}$$

また $u_0(z)$，$\psi_0(z)$ に課せられる境界条件は次のように与えられる。

$$\left.\begin{aligned} &u_0(0) = U_B , \quad Du_0(1) = 0 \\ &\psi_0(0) = \psi_0(1) = D^2 \psi_0(0) = D^2 \psi_0(1) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

ただし，$U_B = \tilde{u}(0) / \bar{u}_*$ は x 方向の無次元変動流速の水路床での振幅，Dは微分オペレータである。
ここで，$\psi_0(z)$ を境界条件式（10）をみたすように次式のような正弦級数で表わす。

$$\psi_0(z) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cdot \sin(m\pi z) \tag{11}$$

(11)式を基本式(8)の第1式に代入し，境界条件(10)のもとに解くと$u_0(z)$は次式のようになる。

$$u_0(z)=U_B\left[\frac{\cosh k(1-z)}{\cosh k}+kR_*^2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_m/U_B}{k^2+(m\pi)^2}\left\{\frac{2m\pi}{k^2+(m\pi)^2}\cdot\frac{\cosh k(1-z)}{\cosh k}\right.\right.$$

$$\left.\left.+(1-z)\sin(m\pi z)-\frac{2m\pi}{k^2+(m\pi)^2}\cos(m\pi z)\right\}\right] \tag{12}$$

(12)式を基本式(8)の第2式に代入し直交化すると，係数$(C_m/U_B)/[k^2+(m\pi)^2]$に関する連立方程式を得る。

$$A_{n,m}\cdot\frac{C_m/U_B}{k^2+(m\pi)^2}=B_n \tag{13}$$

ただし

$$A_{n,m}=\frac{2m\pi}{k^2+(m\pi)^2}\cdot\frac{n\pi}{k^2+(n\pi)^2}\cdot\frac{(-1)^{n+1}+\cosh k}{\cosh k}+\frac{k^2+(m\pi)^2}{2(k^2R_*)^2}\left\{(n\pi)^2-k^2\right\}^2\delta_{nm}+X_{nm}$$

$$B_n=-\frac{\alpha}{kR_*^2}\cdot\frac{n\pi}{k^2+(n\pi)^2}\cdot\frac{\cosh k+(-1)^{n+1}}{\cosh k},\quad \delta_{nm}\text{はクロネッカーのデルタ}$$

$$X_{nm}=\begin{cases}0 & m+n\text{が偶数}\\ \frac{1}{4}\left(\frac{m\pi}{k}\right)^2 & m=n\\ \frac{4mn\pi}{m^2-n^2}\left\{\frac{m^2}{k^2(m^2-n^2)}-\frac{1}{k^2+(m\pi)^2}\right\} & m+n\text{が奇数}\end{cases}$$

(13)式を解いて係数C_m/U_Bを決定すれば，$u_0(z)$，$\psi_0(z)$は確定する。　m，$n=1$，2，…と順次大きくして解の近似度を上げて係数を求めると，表－1のようになる。　ただし，kには縦渦の卓越波長を与えることが必要であるが，著者らは(7)式を直接解くことで卓越波長がほぼ$k=\pi$であることを求めており，ここではその値を用いている。

表－1　(13)式より求めた係数C_m/U_Bと近似度

order of approximation	$\frac{C_1}{U_B}$	$\frac{C_2}{U_B}$	$\frac{C_3}{U_B}$	$\frac{C_4}{U_B}$	$\frac{C_5}{U_B}$
1	0.025499	——	——	——	——
2	0.026456	−0.002122	——	——	——
3	0.026908	−0.002512	0.001461	——	——
4	0.026903	−0.002510	0.001457	0.000072	——
5	0.026906	−0.002513	0.001457	0.000070	0

3. 縦筋河床の形成と縦渦

移動床上の流れに縦渦が形成されると，河床には写真－1に示したような縦筋河床とよばれる河床形態が形成されることが多いようである。　村本ら[8]はガラス球と細砂を敷きつめた水路床上の流速分布を測定し細砂が縦渦の上昇部に集中して縦筋河床を形成すること，およびその部分の流砂量が非常に大きくなることを実験的に確かめている。　本節では，縦渦によってもたらされる流れ場の非一様性によって，縦筋河床が形成される機構について，前節の解析結果にもとづいて考察を行なう。

まず河床砂の移動に直接的な関連を有する河床近くの流れの様子を明らかにするため，河床での流線を求めてみる。　河床の流線の方程式は次式で与えられる。

$$\frac{dx}{\hat{U}(0)+\hat{u}(0)}=\frac{dy}{\hat{v}(0)} \tag{14}$$

ただし，基本流の無次元流速分布$\widehat{U}(z)$は

$$\frac{d\widehat{U}(z)}{dz} = R_*(1-z) \tag{15}$$

で与えられており，$\widehat{U}(0) = \varphi_0 - R_*/3$ なる関係が導かれる。 ここに φ_0 は平均の流速係数である。

(14)式を解いて，点（x_0，y_0）を通る流線の式を求めると次式のようになる。

$$x - x_0 = \frac{1}{A\pi} \ln\left\{\frac{\left|\tan\frac{\pi y}{2}\right|}{\left|\tan\frac{\pi y_0}{2}\right|}\right\} \tag{16}$$

ただし，

$$A = \frac{U_B}{\varphi_0 - R_*/3} \cdot \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{C_m}{U_B}\right) m\pi$$

図－2には(16)式より求めた底面流線，底面の主流速の横断分布および，断面内の二次流の回転方向を示す。 図より縦渦の上昇部（図中のBの部分）に流線の集中が生じている様子が示されている。

次にこの様な非一様な流れ場における流砂の挙動を調べることにする。 流砂量は底面流速のn乗に比例すると仮定すれば，点（x_0，y_0）から移動を開始する流砂量はその点の水理量のみに依存し，次式の様に表わせる。

$$q_{Bd}(x_0, y_0) \doteqdot \bar{q}_B\left\{1 + n\beta\cos\pi y_0\right\} \tag{17}$$

ただし，$\beta = U_B/\widehat{U}(0)$。

これに対して，点（x_0，y_0）で移動を停止する流砂量は，*Einstein* 流の判り切った考え方をすれば，$x_0 - l$の断面の水理量に依存する。 ただしlは無次元移動距離。 これに上で求めた流線の集中を考慮すれば，

$$q_{Bd}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0}\int_{y_1}^{y_2}\frac{\bar{q}_B}{\Delta y}\left[1 + n\beta\cos\pi y\right] dy \tag{18}$$

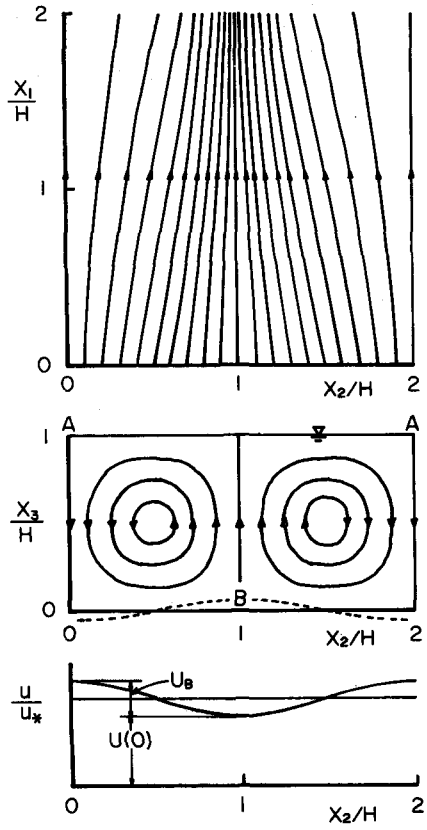
と表わせる。

ただし，y_1，y_2 はそれぞれ流線の式(16)をみたすから，

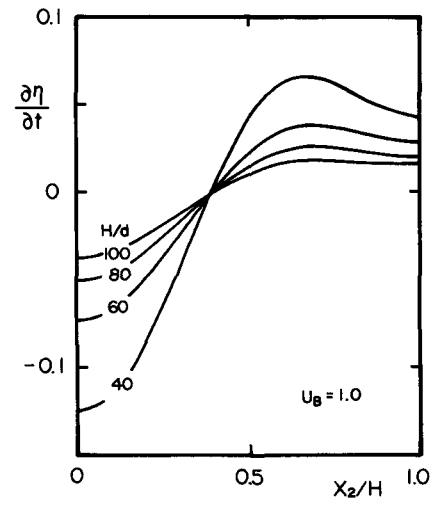
$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left[\tan\frac{\pi}{2}(y_0 + \Delta y)e^r\right] \\ y_2 &= \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left[\tan\frac{\pi}{2}y_0 e^r\right] \quad r = -A\pi l \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

この関係を代入して解くと，

$$q_{Bd}(x_0, y_0) = \frac{e^r}{\cos^2\left(\frac{\pi y_0}{2}\right) + e^{2r}\sin^2\left(\frac{\pi y_0}{2}\right)}\left[1 + n\beta\frac{\cos^2\left(\frac{\pi y_0}{2}\right) - e^{2r}\sin^2\left(\frac{\pi y_0}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi y_0}{2}\right) + e^{2r}\sin^2\left(\frac{\pi y_0}{2}\right)}\right] \tag{20}$$



図－2 河床流線と流れの構造



図－3 $\partial\eta/\partial t$の横断分布

従って流砂の連続式より任意点の河床高の時間変化率$\partial\eta/\partial t$は次式で求められる。

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{-1}{1-\lambda}\frac{\partial q_B}{\partial x}=\frac{-1}{1-\lambda}(q_{Be}-q_{Bd})$$

$$=\frac{-\bar{q}_B}{1-\lambda}\left[1+n\beta\cos(\pi y_0)-\frac{e^r}{\cos^2(\frac{\pi y_0}{2})+e^{2r}\sin^2(\frac{\pi y_0}{2})}\left\{1+n\beta\frac{\cos^2(\frac{\pi y_0}{2})-e^{2r}\sin^2(\frac{\pi y_0}{2})}{\cos^2(\frac{\pi y_0}{2})+e^{2r}\sin^2(\frac{\pi y_0}{2})}\right\}\right]$$

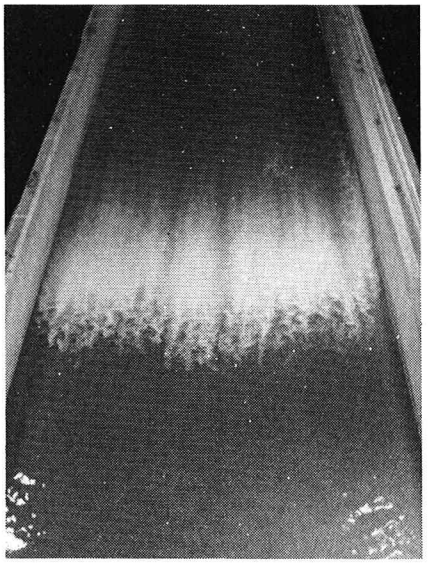
図－3に上式より求めた横断方向の河床高の時間変化率の分布を示す。 具体的な計算に当っては，縦筋の発生初期の状態のみを考えて，平坦床の抵抗則の成立を仮定し，$\varphi_0=7.66(H/2d)^{\frac{1}{6}}$とした。 また移動距離$l$は掃流力の函数となるはずであるが，ここでは簡単のため一定値とし$l=100d/H$とした。 さらに縦渦の強度を規定するU_Bについては今後理論的，実験的に調べることが必要であるが，ここでは若者らの実験値を参考に$U_B=\tilde{u}(0)/\bar{u}_*=1.0$と与えた。 また図は半波長のみ示してある。

図から明らかなように， $y=1$ 即ち縦渦の上昇部で$\partial\eta/\partial t>0$となり，この部分に縦筋が形成され，これまでの実験事実と一致する。また本解析では河床砂の粒度構成を考慮に入れていないが，村本らの実験のように選択的な砂流の移動が生ずる状態では，縦渦下降部では次第に粗粒化が進行し，流砂は縦筋部分にのみ集中することが期待できる。

4. 縦渦流れと分散

本節では，縦渦流れにおける流れの分散特性について考察を行なう。 縦渦が顕著に発達した流れにおいて，水路横断方向に線状に染料を投入すると，写真－2に示すように一様には広がらずに，くしの歯状に前後にはり出した部分が生じる。 この現象は*Fischer*[9]や室田ら[10]によっても指摘されており，室田らは“*fingering*現象”と名付けている。

この特徴的な染料雲の挙動を仔細に観察すると，前方にはり出した部分は水面近くに，後方に尾をひく部分は河床近くにそれぞれ形成されている。更に河床に形成された縦筋との位置関係を調べると，前方にはり出した部分は2本の縦筋の中央付近に，また後方に尾をひく部分は縦筋のあたりに生じている。



写真－2 縦渦流れにおける瞬間線源からの染料の分散（B=90cm, H=2.0cm）

このような染料雲の形成は，前節の縦渦流れの構造から合理的に説明出来る。すなわち，水面近くでは縦渦の下降部（図－2中のAの部分）に流線の集中が生じるため高濃度域が形成されるとともに，この部分の早い流速に乗って輸送されるために前方にはり出すものと考えられる。 また河床近くでは縦渦の上昇部（図－2Bの部分）への流線の集中によって生ずる高濃度域が，この部分の遅い流速のために後方にとり残されたようになる。

このような流れの特徴が流れ全体の分散にどのように反映されるか，縦渦流れの縦分散係数E_xの評価を試みた。 2)節で求めたx_1方向の流速式を用いて，*Fischer*[11]の方法に従って次式のようにq'を定義する。

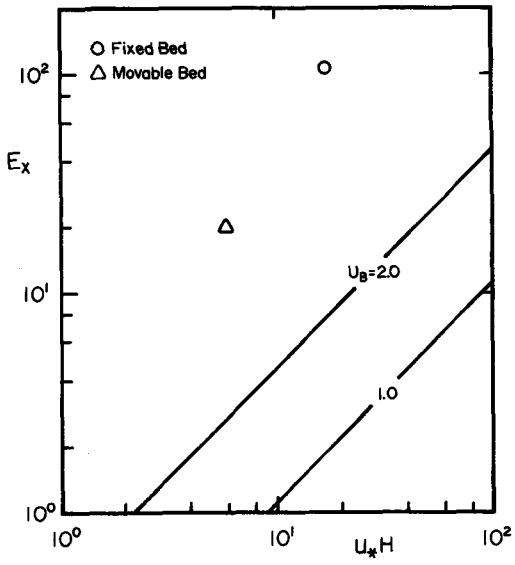
$$q'(y)=\int_0^H\{\bar{u}(x_3)+\tilde{u}(x_3)-u_m\}dx_3=\bar{u}_*H\int_0^1 u_0(z)\cos\pi y dz$$

$$=\bar{u}_* H U_B \left\{ \frac{\tanh \pi}{\pi} + \pi R_*^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m / U_B}{(1+m^2)\pi^2} \left[\frac{2m\pi}{(1+m^2)\pi^2} \cdot \frac{\tanh \pi}{\pi} + \frac{1}{m\pi} \right] \right\} \cos \pi y \tag{22}$$

ただし $\bar{u}_m$ は全断面平均流速。 $q'(y)/U_t H = q_0 \cos \pi y$ と略記すると，広矩形断面水路の縦渦流れの無次元分散係数 $E_x/\bar{u}_* H$ は次式のように与えられる。

$$\frac{E_x}{\bar{u}_* H} = -\frac{H}{B} \int_0^{B/H} q_0 \cos \pi y \int_0^y \frac{U_* H}{E_y} \int_0^y q_0 \cos \pi y \, dy dy dy = \frac{1}{2} \frac{\bar{u}_* H}{E_y} \left(\frac{q_0}{\pi}\right)^2 \tag{23}$$

ここに B は水路巾， $E_y/\bar{u}_* H = 0.23$ は横分散係数である。 所要の値を代入すると縦渦流れの縦分散係数は図－4の実線のようになる。 図中には固定床および移動床実験水路で縦渦が顕著に発達した流れにおいて，*Routing* 法によって定めた測定値を併せて示してある。 *Fischer*[9] は縦渦の "ゆらぎ" と乱流の *Hurst* 現象との密接な関連を指摘した後に，縦渦やそのゆらぎは流れの分散にほとんど寄与しないだろうと直感的な推定を行なっている。 本節の解析および図－4の実測値との比較は，*Fischer* の推定に定量的な根拠を与えることが出来たと考える。



図－4 縦分散係数

5. 結語

本研究では開水路流れに発生する縦渦に着目してその流れの構造を解析的に明らかにし，流砂および *pollutant* の移動過程との関係を考察した。 前者では移動床に見られる縦筋の形成過程を流れの側から解析的に説明した。後者では縦渦流れに見られる特徴的な分散パターンと縦渦の関係を明らかにし，併せて流れ全体の縦分散係数に与える影響を定量的に評価した。 今後は側壁の効果を取入れるなどの改良を行なってゆきたいと考える。

参考文献

1) *Nemenyi, P. F*; *Discussion on "Transportation of Suspended Sediment by Water", Trans. ASCE* 1946
2) 木下良作：水工学夏期研修会講議集 1968
3) 木下良作：北海道開発局委託研究報告 1977
4) 池田駿介：埼玉大学建設基礎工学研究報告 1976
5) 林泰造，山田正：第２１回水講論文集 1977
6) 黒木幹男，岸力：土木学会論文集（投稿中）
7) 森明巨，黒木幹男，岸力：第２６回土木学会年講 1971
8) 村本嘉雄，河田恵昭，布村明彦：京大防災研年報第２０・B 1977
9) *Fischer, H. B*: *Water Resources Research vol* 9, *No.* 2 1973
10) 室田明，中辻啓二，福原輝幸：第２３回水講論文集 1979
11) *Fischer, H. B*: *Proc. ASCE, HY* 6 1967