

セキを越流する急変非定常流の数値解析

Numerical Analysis of the Rapidly Varied Unsteady Flow over a Weir

京都大学農学部大学院 学生員 ○ 武 本 行 正
京都大学農学部大学院 学生員 奥 村 博 司

1. ま え が き

近年、開水路の非定常な流動・遷移現象の解明は水利工学上の諸設備の操作面ならびに水資源、水利用形態の高度化への応用面から重要性をもち、これらの急変非定常流の挙動を評価する手法の確立が求められている。しかしながらこれらの流れは自由表面の種々の変動状態を取扱う必要性から、実験値および理論近似式による流況の把握、とくに内部構造の把握は困難なことが多い。そこで自由表面のある開水路局所流の非定常運動の内部状態を知るひとつの試みとして、数値解析手法による数理モデルの作成とそのモデルによるシミュレーション解析例をここにのべる。

著者らは自由表面を有する流れ場を解析可能なMAC (Marker -And -Cell)法の検討¹⁾とより一般的に非定常急変流の表わす局所流動現象に対応することのできる数理モデルの開発について考察してきたが、セキを越流する流れに関して計算機処理能力に応じた経済性をもつモデルが得られた。このモデルは従来のMAC 計算法の利点をいかしつつ欠点としてもつ計算不経済性を改善するために、あらかじめ流況を人工粘性付Lax -Wendroff スキームによる不定流計算にて近似させてからMAC 法の2次元解析へと結合させるものである。MAC 法自体も計算効率化の点からマーカーを用いなくて自由表面位置を形状関数として表現する手法であり、ラグランジュ的要素のない完全なオイラー法である。

さらに自由な形状のセキ体を解析できるように境界条件としては差分格子網を横切る外部境界の設定をし演算ができるモデルとした。²⁾ 従来任意形状境界のモデル化は、有限要素法では境界形状に合わせた要素の設定により解決はかかれているが、MAC 法では計算技法面から境界条件を調節することにより境界に平行な流れ場をつくり出すことで解決させる。³⁾ このために境界の処理プログラム部分が複雑化するがセキのように単純な構造物の場合はプログラミング技法面から一括化した処理が可能である。

2. 基礎方程式について

ここでは不定流の基礎式とMAC 法の基礎式をそれぞれ呈示する。

(1) 人工粘性付L - W法の基礎式と差分近似式

不定流の連続式と運動方程式とを保存形に表現してベクトル表示する。水路幅B は一様単位幅とし、横流入量を考えないものとする、基礎式は

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \hat{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{b} \dots\dots\dots (1)$$

ここに $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{P}{\rho} + \frac{Q^2}{A} \end{pmatrix}$

$$\hat{A}(\mathbf{U}) \equiv \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g \frac{A}{B} - \frac{Q^2}{A^2} & \frac{2Q}{A} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ gA \left(i - \frac{n^2 Q |Q|}{A^2 R^{\frac{4}{3}}} \right) \end{pmatrix}$$

であり、式中の記号は A 流断面積, Q 流量, $v = Q / A$ 平均流速, $h = A / B$ の水深, $P = \frac{1}{2} \rho g h^2 B$ 流断面にかかる全水圧, g 重力加速度, R 径深, n マニングの粗度係数, i 水路床勾配 などである。

つぎに $\mathbf{U}(x, t + \Delta t)$ を (x, t) の近傍でテイラー展開し、時間に関する 1 次微分係数と 2 次微分係数とを次の関係式から空間的に近似させる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = -\hat{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{\mathbf{A}} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right)$$

この関係式に $\mathbf{b}$ の非斉次項も考慮すれば

$$\mathbf{U}(x, t + \Delta t) = \mathbf{U}(x, t) - \Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} - \mathbf{b} \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \hat{\mathbf{A}} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} - \mathbf{b} \right) \right\} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right] \quad (2)$$

が得られる。

(2) 式を $x = j \Delta x, \quad t = n \Delta t$ にて $\mathbf{U}(j \Delta x, n \Delta t) = \mathbf{U}_{j,n}$ と約束し、直接に差分化すれば

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{j,n+1} = & \mathbf{U}_{j,n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{j+1/2,n} - \mathbf{F}_{j-1/2,n} - \Delta x \mathbf{b}_{j,n} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left[\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2,n} \left(\mathbf{F}_{j+1,n} - \mathbf{F}_{j,n} - \Delta x \mathbf{b}_{j+1/2,n} \right) \right. \\ & \quad \left. - \hat{\mathbf{A}}_{j-1/2,n} \left(\mathbf{F}_{j,n} - \mathbf{F}_{j-1,n} - \Delta x \mathbf{b}_{j-1/2,n} \right) \right] \\ & + \frac{\Delta t}{2} \left(\mathbf{b}_{j,n+1} - \mathbf{b}_{j,n} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

(3) 式が通常の Lax-Wendroff スキームである。

ここで $\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2} = 0.5 (\hat{\mathbf{A}}_{j+1} + \hat{\mathbf{A}}_j)$

$\mathbf{b}_{j+1/2} = 0.5 (\mathbf{b}_{j+1} + \mathbf{b}_j)$ 等を表わしている。この (3) 式の安定性は Courant・Friedrichs・Lewy の条件

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(U_{\max} + \sqrt{gh_{\max}} \right) < 1 \quad (4)$$

を満たすならばよいとされている。⁴⁾

この L-W スキームは図 1 A から見てとれるように跳水の前後の部分で数値的な振動をおこしており、このような精度の高い差分式では避けられない。

そこでつぎに安定した解が得られるように (3) 式に以下の形式の人工粘性項を添加する。⁵⁾

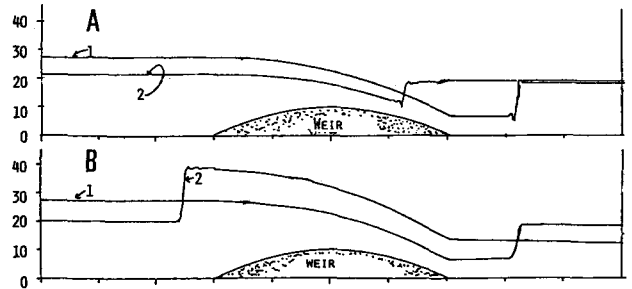


図 1 L-W 法(A)と人工粘性付 L-W 法(B)

$$\frac{\Delta t}{2 \Delta x} \hat{\mathbf{Q}}_{j+1/2,n} \left(\mathbf{U}_{j+1,n} - \mathbf{U}_{j,n} \right) - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} \hat{\mathbf{Q}}_{j-1/2,n} \left(\mathbf{U}_{j,n} - \mathbf{U}_{j-1,n} \right) \quad (5)$$

ここで用いる $\hat{\mathbf{Q}}$ は $\mathbf{U}_{j+1}$ と $\mathbf{U}_j$ との行列であり、 $\mathbf{U}_{j+1}$ と $\mathbf{U}_j$ とが大きく異なる時には解の発散を救済し振動抑圧の効果を与えるようにし、 $\mathbf{U}_{j+1}$ と $\mathbf{U}_j$ とがほぼ等しい時には無視されるように選定する。

このためには、 $\hat{\mathbf{Q}}$ のもつ式の形態は空気流の衝撃波形の計算から次のようにおくとよいとされた。

$$\hat{\mathbf{Q}}_{j+1/2} \left(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1} \right) = a^* | \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_{j+1}) - \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_j) | \quad (6)$$

ここで a^* は無次元の定数

一方で行列 $\hat{\mathbf{Q}}$ と $\hat{\mathbf{A}}$ とは可換であるという必要条件から、 $\hat{\mathbf{Q}}$ は $\hat{\mathbf{g}}$ を係数とする

$$\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{g}} \left(\hat{\mathbf{A}}_{j+1/2} \right) = \hat{\mathbf{g}}_0 \mathbf{I} + \hat{\mathbf{g}}_1 \hat{\mathbf{A}}_{j+1/2} \quad (7)$$

(7)式の多項式に展開される。ここで用いる $\hat{g}_0, \hat{g}_1$ は $\hat{A}$ の固有値 r が2つあり、 $r_l = U+C, r_m = U-C$ であるもの (ここに C は波速 $\sqrt{gh}$) であることから(6)式より

$$\hat{Q} = \frac{a^*}{2C_{j+1/2}} \left\{ |r_{l,j+1} - r_{l,j}| (\hat{A}_{j+1/2} - r_{m,j+1/2} I) - |r_{m,j+1} - r_{m,j}| (\hat{A}_{j+1/2} - r_{l,j+1/2} I) \right\} \dots\dots\dots (8)$$

と展開されて、その結果

(8)式と(7)式とを対比すれば

$$\begin{aligned} \hat{g}_0 &= -\frac{a^*}{2C_{j+1/2}} \left(r_{m,j+1/2} |r_{l,j+1} - r_{l,j}| - r_{l,j+1/2} |r_{m,j+1} - r_{m,j}| \right) \\ \hat{g}_1 &= \frac{a^*}{2C_{j+1/2}} \left(|r_{l,j+1} - r_{l,j}| - |r_{m,j+1} - r_{m,j}| \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

ただし $C_{j+1/2} = \frac{1}{2} (r_{l,j+1/2} - r_{m,j+1/2})$, $a^* = 0.8$

が得られる。ここで $r_{j+1/2}$ は r_{j+1} と r_j との平均値を用いる。

この結果(7)式の行列 $\hat{Q}$ は(9)式の $\hat{g}_0, \hat{g}_1$ の値から直ちに計算されるので、これら $\hat{Q}_{j+1/2}$ と $\hat{Q}_{j-1/2}$ とを(5)式に代入すれば(5)式の人工粘性項が得られる。(計算例は図1Bを参照)

この人工粘性項の作用と結果をつぎにまとめておく。

- (i) U_{j+1} と U_j との差が大きい解の急激な変化部では不定流の式全体に望ましい散逸効果を与え、微小な振動をおこさずに平滑な水面形を得ることが可能
- (ii) 上下流側の傾斜の急なセキ体を越流する Fr 数の大きな流れでも演算可能となる (人工粘性項なしでは解は発散してしまう)
- (iii) 跳水部分の水面形は演算されるが実際の渦構造部としては表現しえない
- (iv) U_{j+1} と U_j とがほぼ等しい場合には通常型の L - W 法の解となる

(2) MAC 法の基礎方程式と境界条件

2次元の流れ場を表現する連続式と Navier - Stokes 運動方程式を用いる。

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

$$X = \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial Eu}{\partial x} + \frac{\partial Ev}{\partial y} \qquad E = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} g_x - \partial P / \partial x + \nu \nabla^2 u \\ g_y - \partial P / \partial y + \nu \nabla^2 v \end{pmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

上式で、 u, v は流速 U の水平鉛直方向成分、 P は圧力密度比、 g_x, g_y は重力加速度成分であり、また $\nu = \mu / \rho$ は動粘性係数を示す。自由表面の変動に関しては

$$\frac{\partial h}{\partial t} = v - u \frac{\partial h}{\partial x} \qquad \text{ここに } h \text{ は自由表面形状関数} \dots\dots\dots (12)$$

を用いる。この(10)~(12)式が基礎方程式である。これらの差分近似式は(11)式の移流項部分に風上差分 (Donor Cell) 法を用いて人工粘性効果を与え、さらに(12)式も同様の形とした。(差分化した式は省略する²⁾)

この(10)~(11)式の解き方はオリジナル MAC 型、SMAC 型とあるが、ここでは任意形状の境界をも扱う手法として ABMAC 型の流速圧力同時緩和法を用いる¹⁾。

この流速圧力同時緩和法は圧力のポアソン型方程式を解く場合 Semi-Implicit 法となるので解法上はきわめて有利である。

計算セル (i, j) において繰返し計算時の圧力の微小変化率を $\Delta P_{i,j}$ とすれば、各セルの流速の発散量 D はゼロではないので圧力と流速の関係式は

$$\frac{\Delta P_{i,j}}{\Delta \zeta} = -D_{i,j} \quad \Delta P_{i,j} = P_{i,j}^{K+1} - P_{i,j}^K \quad (13)$$

とおくことができる。ここに K は繰返しステップ、 $\Delta \zeta$ は緩和パラメーターである。(この(13)式はもともと圧縮性流体の連続式から類推して導入されたものである。) 一方 $N-S$ 式を現ステップの流速・移流項・粘性項・外力項を η^n と ξ^n でまとめて表現すれば

$$U_{i+1/2,j}^{n+1} = \eta_{i+1/2,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (P_{i+1,j}^n - P_{i,j}^n) \quad (14)$$

$$V_{i,j+1/2}^{n+1} = \xi_{i,j+1/2}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} (P_{i,j+1}^n - P_{i,j}^n) \quad \text{ここで } n \text{ は時間ステップ}$$

となる。(13)式からの $P^{K+1} = P^K + \Delta P$ を(14)式へ代入すれば、 U について

$$U_{i+1/2,j}^{K+1} = U_{i+1/2,j}^K + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta P_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta P_{i+1,j}$$

$$U_{i-1/2,j}^{K+1} = U_{i-1/2,j}^K - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta P_{i,j} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta P_{i-1,j}$$

したがって、Sweep 順に並べれば、 U と V について

$$U_{i\pm 1/2,j}^{K+1} = U_{i\pm 1/2,j}^K \pm \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta P_{i,j}, \quad V_{i,j\pm 1/2}^{K+1} = V_{i,j\pm 1/2}^K \pm \frac{\Delta t}{\Delta y} \Delta P_{i,j} \quad (15)$$

でよいことになる。この時に各セルの $D_{i,j}$ は

$$D_{i,j}^{K+1} = D_{i,j}^K + 2\Delta t (1/\Delta x^2 + 1/\Delta y^2) \Delta P_{i,j}$$

となる。このことから $D_{i,j}^{K+1}$ がゼロの連続条件をみたすためには、結局のところ

$$D_{i,j}^K = -2\Delta t (1/\Delta x^2 + 1/\Delta y^2) \Delta P_{i,j}$$

の条件を与えればよいことになり、(13)式でのパラメーター $\Delta \zeta = \omega / 2\Delta t (1/\Delta x^2 + 1/\Delta y^2)$ となる。

この $\omega = 1.7$ とした。流速圧力同時緩和法による直接解法は古い $D_{i,j}^K$ の値から(13)式で $\Delta P_{i,j}$ を計算して、これを(15)式に代入すると新たな値 U^{K+1} , V^{K+1} が求まりこ

の時に $D_{i,j}^{K+1}$ はゼロに近い値となる。

全セルで $D_{i,j}^{K+1} < 2 \times 10^{-4}$ の範囲内に収束すればこの時新時間ステップ $(n \rightarrow n+1)$ の u, v, b 値が求められたことになる。

次に境界諸条件について触れる。まず自由表面の流速境界条件は次の接線方向応力条件である。

$$\nu \left(\frac{\partial V_n}{\partial m} + \frac{\partial V_m}{\partial n} \right) = 0$$

ここに ν は動粘性係数、 n は自由表面の法線方向 m は同接線方向である。圧力境界条件は法線方向応力条件を水面位置の圧力 P_{ns} として

$$P_{ns} = 2\nu \frac{\partial V_n}{\partial n}$$

また表面セルの圧力補間は次の式による

$$P_{sur} = \frac{\Delta y}{\alpha} P_{ns} + \left(1 - \frac{\Delta y}{\alpha}\right) P_{i,j-1}$$

をそれぞれ用いる。

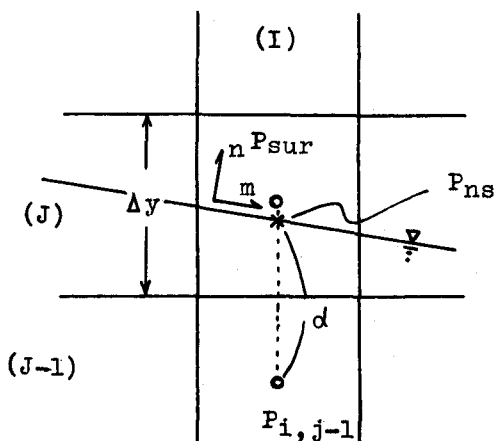


図2. 表面セル圧力補間

壁面の境界条件は流入流速は一定値、流出流速は Continuitive , その他は Free - Slip とする。

3. セキの境界条件

セキの表面部分での実流速ベクトルを $\mathbf{U_p}$ とするとセキ表面の法線方向ベクトル $\mathbf{U_n}$ はそこでのセキの傾斜角を θ とすれば

$$\tan \theta_{i,j} = (hb_{i+1} - hb_{i-1}) / 2\Delta x$$

であるので

$$|\mathbf{U_n}| = \frac{2\Delta x (aV_{i,j+v_2} + (dy-a)V_{i,j-v_2})}{\sqrt{4\Delta x^2 + (hb_{i+1} - hb_{i-1})^2}} - \frac{U_{i,j}(hb_{i+1} - hb_{i-1})}{\sqrt{4\Delta x^2 + (hb_{i+1} - hb_{i-1})^2}} \dots\dots\dots (16)$$

である。一方 $|\mathbf{U_n}| = f(p)$ とみなし $f(p) = 0$ の近似解 P_0 が

既知として真の値 $P_0 + \Delta p$ は、 $|\mathbf{U_n}| = U_n$ として $U_n(P_0 + \Delta p)$ のテイラー展開より Δp は次のようになる。

$$\Delta p = -U_n(P_0) / U'_n(P_0) \dots\dots\dots (17)$$

さらに(16)式の右辺を N - S 式から U, V 値を P 値におきかえ $P_{i,j}$ にて偏微分すれば

$$U'_n(P_0) = \frac{2\Delta x^2 \Delta t + 4(dy-a) \Delta y \Delta t}{\Delta x \Delta y \sqrt{4\Delta x^2 + (hb_{i+1} - hb_{i-1})^2}} \dots\dots\dots (18)$$

となる。これら(16)式と(18)式から(17)式にて Δp が計算されて、 $|\mathbf{U_n}| = 0$ となり、この圧力値からセキ部分のセルの諸流速値が(15)式で緩和される。

そして最終的にセキ表面の法線方向流速値がゼロとなって平行流がつくられるのである。

4. 計算例

不定流計算の初期状態として河床勾配 $i = 1/200$ 、流量は $Q = 0.04 \text{ m}^3/\text{S}$ 初期流速 0.70 m/s の定常等流の中に瞬間的に広頂ゼキを出現させた場合を仮想する。この時発生する非定常解の中で時刻 $T = 2.26 \text{ sec}$ 後の自由表面形状ならびに平均流速値をそのまま MAC 法の初期条件として用いた。

図 4 - 2 の MAC 法の 2 次元解析は演算時間 CPU タイムで約 5 分程であった。この計算を初期状態からすべてすれば数時間以上はかかるだろうと思われる。しかも現在の MAC 法では収束するという保証は無い。そのため本解析手法はきわめて有効な手段となりうると考える。本数値計算の Fr 数は 0.27 であるがこの結果と Moayeki がゆるやかな段上り部の圧力分布等をポテンシャル流モ

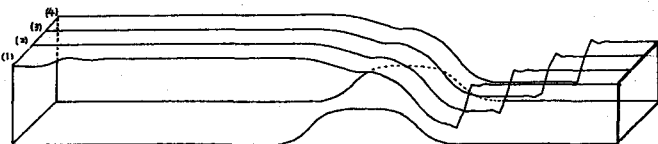


図 4 - 1. 不定流計算 (人工粘性項付) (1) 0.56 秒
(2) 1.13 秒 (3) 1.69 秒 (4) 2.26 秒

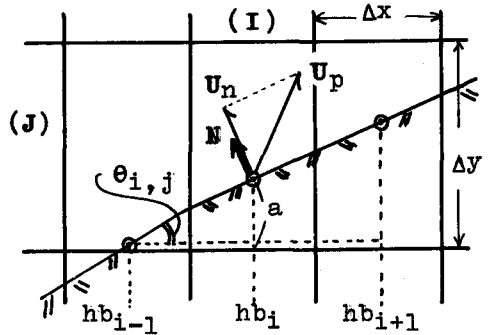


図 3 傾斜セキ面での法線方向流速

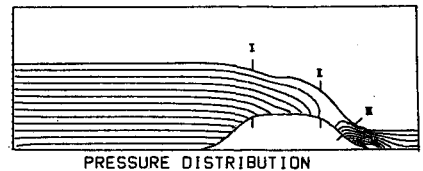
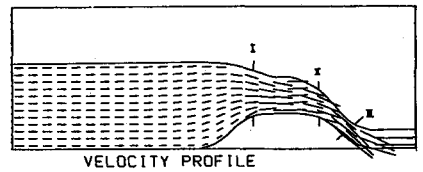


図 4 - 2 完全越流時の流速圧力分布

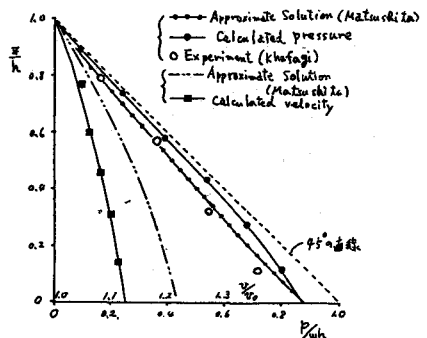


図 5 I 断面での流速圧力値

デルの緩和解法で計算したFr 数 0.4 の場合とを比較すればセキ体中央部までの流況は、ほぼ図4-2と同様と考察される。

さらにつぎにセキ上・セキ下流部の流速・圧力分布について実験値・理論値との対比を行なう。

図4-2の断面ⅠについてKhafagiら⁷⁾の実験値ならびに松下による理論計算値⁸⁾との比較を図5に掲げる。本計算値は丸味付の広頂ゼキであるが、Khafagi・松下のものは台形ゼキであり、さらにFr 数もかなり大きな値(セキ上で0.86~1.9)であるので厳密な比較とはならないが圧力値はほぼKhafagi・松下のデータに良く一致する。流速値は本計算値がやや少ないがこれは丸味部の上向き曲線により減速されているかあるいは初期状態の流速分布が等速分布としたからであろう。

図6は、断面Ⅱでの流速・圧力分布である。本計算例では低Fr 数と低水深(セキ中央部で水深5.5cm)のため負圧が生じておらず比較データに欠けるため本計算のみとした。高いFr 数の解析例では本計算においても負圧は生じている。

図7では断面Ⅲにおける流速・圧力分布を松下⁸⁾の実験値とくらべる。圧力は通常の静水圧分布よりかなり強く圧縮される。これもきわめて実験値と良好に一致した。流速値は水面側が速く底面がおそい様子が計算されたが、やや実験値よりも等速分布寄りである。

(謝辞) 本研究の遂行に当って三重大学農学部の松下玄教授に御助言をたまわりました。また不定流計算については京都大学農学部福岡順助教授と鳥井清司助手に御示唆をいただきました。さらに京大大型計算センターの開発課題として京都産業大学藤井宏教授に御協力いただきました。MAC 法研究グループの愛媛大学農学部武内智行助手・長崎大学工学部の薦田広章氏には貴重な御助言をうけました。以上厚く御礼申し上げます。

(参考文献)

- 1) 武本行正、奥村博司、福岡順、藤井宏：非圧縮性粘性流体の数値解法プログラム(その1)
京都大学大型計算機センター広報、Vol 13, No 6, pp 19~27 (1980)
- 2) 武本行正、奥村博司、鳥井清司：任意形状のセキを越える流れの数値解法—I(理論—、農業土木学会論文集89号、pp 38~47 (1980)
- 3) Viecegli, J. A.; A Computing Method for Incompressible Flows Bounded by Moving Walls, J. Comput. Phys. 8 pp 119~143 (1971)
- 4) Richtmyer, R. D. and Morton, K. W.; Difference Methods for Initial Value Problems, 2nd ed., Interscience Publishers (1967)
藤井宏、伊藤剛；第5章 河川の不定流の計算、数値解析の応用と基礎、アテネ出版(1971)
- 5) Lax, P. D. and Wendroff, B.; Systems of Conservation Laws, Comm. Pure Appl. Math., Vol 8, pp. 217~237 (1960)
- 6) Moayeki, M. S.; Flow in Open Channels with Smooth Curved Boundaries, ASCE-HY 12 pp. 2217~2232 (1973)
- 7) Khafagi, A. and Hammad, S. Z.; Velocity and Pressure Distribution in Curved Stream—line Flow, Water and Water Engineering March 106~115 (1954)
- 8) 松下 玄；セキを越流する流れの流速・水圧分布、農業土木研究別冊第10号 pp 30~35 (1965)

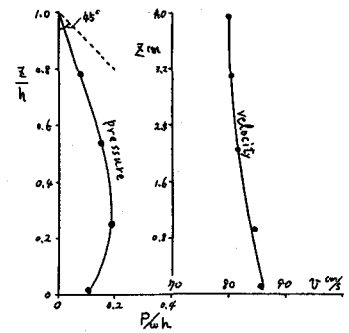


図6 Ⅱ断面での流速圧力値

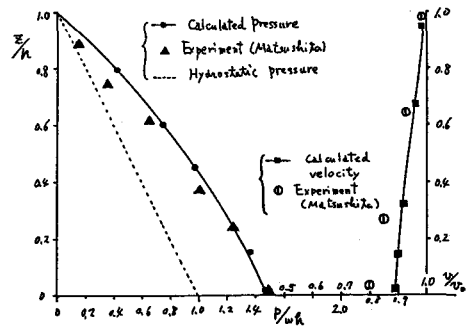


図7 Ⅲ断面での流速圧力値