

下流側水深を有するダム破壊問題における抵抗の効果

Effect of hydraulic resistance on a dam-break wave in a channel of constant water depth

秋田大学鉱山学部 正員 松富 英夫

1. まえがき

下流側に水深がない場合のダム破壊問題は、Ritter¹⁾(1892)により初めて解かれた。その後、波先端部では抵抗の影響が無視できないとして抵抗を考慮した解がDressler²⁾(1952)とWhitham³⁾(1955)によりそれぞれ別の方法で導かれた。そして、筆者は彼等の理論解が実際現象を十分に説明できることを確認してきており、この条件に対する解は一応確立されたと言える。

一方、Stoker⁵⁾(1957)は従来のこの種の研究をとりまとめるとともに、下流側に水深がある場合のダム破壊問題を新たに解いた。彼の理論では下流側条件に対応した理想段波を仮定しているため、波先端の移動速度は常に一定ということになる。しかしながら、実際に実験を行って測定してみると、先端の移動速度は一定とならず流下するに従って減少してくる。これは流水抵抗の影響によるためと思われる。

よって、本研究は基本式に抵抗項を付加して、まだ不十分な段階にある下流側に水深がある場合のダム破壊問題を理論的に扱おうとするものである。

2. 基本式

図-1に示すように、ダム破壊による急変不定流を抵抗の無視できる領域Ⅰとできない領域Ⅱの2つに分ける。前者ではRitterの理論が、すなわち浅水理論が成立すると仮定する。後者では、流速は流れ方向に変化せず時間だけの関数と仮定する。

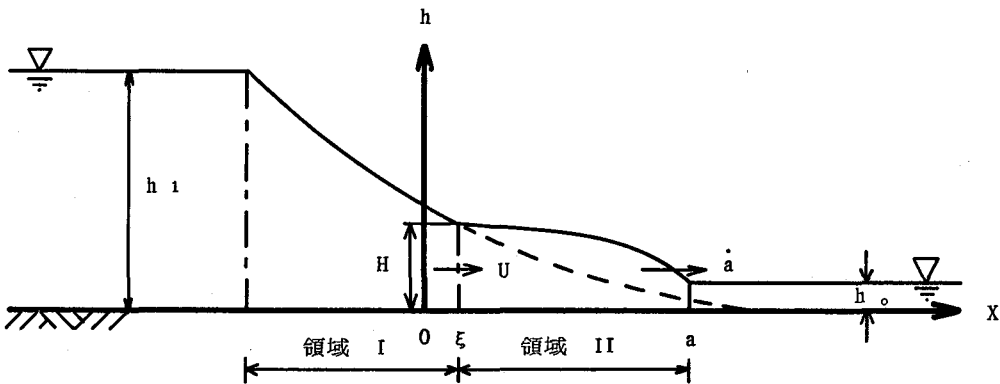


図-1 本研究モデルと記号説明図

領域Ⅰでの全ての物理量は上流側水深 h_1 が決まればRitterの次式で求められるので、ここでは既知量とみなす。

$$u = \frac{2}{3} (\sqrt{gh_1} + \frac{x}{t}) \dots\dots\dots (1)$$

$$\sqrt{gh} = \frac{1}{3} (2\sqrt{gh_1} - \frac{x}{t}) \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 u : 粒子速度、 h : 水深、 x : ゲート位置を原点とする距離座標、 t : 時間。

領域Ⅱについてはその領域全体に関する連続式と運動量式を誘導し、それを解くことによって諸物理量を決定する。この領域の連続式と運動量式は

$$\frac{dM}{dt} = \rho H \left(U - \frac{d\xi}{dt} \right) + \rho h_0 \frac{da}{dt} \quad (3)$$

$$\frac{dP}{dt} = \rho H U \left(U - \frac{d\xi}{dt} \right) + \rho h_0 U \frac{da}{dt} + \frac{1}{2} \rho g H^2 - \frac{1}{2} \rho g h_0^2 - \rho K U^2 (a - \xi) \quad (4)$$

ここで、M：本領域の全質量、P：本領域の全運動量、 ρ ：水の密度、H：本領域後端での水深、U：流速、 ξ ：後端位置、 h_0 ：下流側水深、a：先端位置、K：抵抗係数。ただし、 $\tau_0 = \rho K U^2$ と定義している。

$x = \xi$ では、Ritter の理論から次式の関係が得られる。

$$\xi = \left(\frac{3}{2} U - \sqrt{gh_1} \right) t \quad (5)$$

$$H = h_1 \left(1 - \frac{U}{2\sqrt{gh_1}} \right)^2 \quad (6)$$

よって、(3)式は

$$\frac{dM}{dt} = \rho h_1 \sqrt{gh_1} \left(1 - \frac{U}{2\sqrt{gh_1}} \right)^2 \left(1 - \frac{U}{2\sqrt{gh_1}} - \frac{3}{2} \frac{t}{\sqrt{gh_1}} \frac{dU}{dt} \right) + \rho h_0 \frac{da}{dt} \quad (7)$$

上式を $t = 0$ で $M = a = 0$ の条件で解くと、

$$M = \rho h_1 \sqrt{gh_1} \left(1 - \frac{U}{2\sqrt{gh_1}} \right)^3 t + \rho h_0 a \quad (8)$$

一方、仮定より $P = MU$ と表現できるから、(4)式は

$$M \frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} \rho g H^2 - \frac{1}{2} \rho g h_0^2 - \rho K U^2 (a - \xi) \quad (9)$$

(5)、(6)と(8)式を用いると、(9)式は

$$\begin{aligned} & \left\{ h_1 \sqrt{gh_1} \left(1 - \frac{U}{2\sqrt{gh_1}} \right)^3 t + h_0 a \right\} \frac{dU}{dt} \\ &= \frac{1}{2} g h_1^2 \left(1 - \frac{U}{2\sqrt{gh_1}} \right)^4 - \frac{1}{2} g h_0^2 - K U^2 \left\{ a - \left(\frac{3}{2} U - \sqrt{gh_1} \right) t \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

結局、本研究は(10)式を解くことに帰着される。(10)式で $h_0 = 0$ と置くとWhithamの基本式となる。

3. 移動跳水発生条件

ダム破壊による流れはゲート下流側と上流側の初期水深比 h_0/h_1 により次の4つのパターンに分類される様である。^{6),7)} ⅰ) 放物波面をもつドライ・ベッド上の流れ、ⅱ) 不連続波頭をもつ移動跳水、ⅲ) 不安定な波状段波、ⅳ) 安定した波状段波。

(10)式を解くまえに、この式の各項を吟味して、ⅱ)の移動跳水発生限界を求めてみる。 $t \rightarrow 0$ の時、 $M \rightarrow 0$ かつ $a \rightarrow 0$ である。故に、この時は(10)式の右辺の第1項と第2項が釣り合わねばならない。よって、初期の粒子速度は

$$U = 2(\sqrt{gh_1} - \sqrt{gh_0}) \quad (11)$$

流体粒子が下流側水深近傍の波面から飛び出す時、移動跳水が発生すると仮定すると、その発生条件の数学的表現は

$$\frac{U}{\sqrt{gh_0}} \geq 1 \quad (12)$$

よって、(11)・(12)式より移動跳波発生条件として次式が得られる。

$$\frac{h_0}{h_1} \leq \frac{4}{9} \approx 0.44 \quad (13)$$

実験により、中川等はこの条件として $0.45^{(6)}$ ($0.40^{(7)}$) を与えている。彼等の実験値と(13)式を図-2に示す。

4. 基本式の解

下流側に水深のない場合において、Whitham は先端の移動速度 $\dot{a}$ と粒子速度 U は等しくなると仮定している。この仮定は流速は流れ方向に変化せず時間だけの関数であるという仮定を考慮すれば道理になかったものである。しかしながら、下流側に水深がある場合は同じ仮定を考慮しても $\dot{a} = U$ とは限らない。

その良い例は理想段波モデルで、段波の移動速度と粒子速度は一致しない。

よって、本研究では $\dot{a}$ と U との関係を次式の様に仮定し、その係数を未知数として残しておく。

$$U = r \frac{da}{dt} \quad (14)$$

ここで、 r は実際にはゲート下流・上流側水深比 h_0/h_1 と時間 t の関数と思われる。しかし、本研究では定数と仮定する。

そこで、(14)式を(10)式に代入すると、

$$\begin{aligned} & r \left\{ h_1 \sqrt{gh_1} \left(1 - \frac{r \dot{a}}{2\sqrt{gh_1}} \right)^3 t + h_0 a \right\} \ddot{a} \\ &= \frac{1}{2} gh_1^2 \left(1 - \frac{r \dot{a}}{2\sqrt{gh_1}} \right)^4 - \frac{1}{2} gh_0^2 - Kr^2 \dot{a}^2 \left\{ a - \left(\frac{3}{2} r \dot{a} - \sqrt{gh_1} \right) t \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

3.で述べた様に、初期には(15)式は次式を満足する。

$$\dot{a} = \frac{2}{r} (\sqrt{gh_1} - \sqrt{gh_0}) \quad (16)$$

そこで、(15)式を解くに当って次の無次元の新変数を導入する。

$$\alpha = \left\{ \frac{2}{r} (\sqrt{gh_1} - \sqrt{gh_0}) t - a \right\} \frac{K}{h_1} \quad (17)$$

$$\tau = \sqrt{\frac{g}{h_1}} K t \quad (18)$$

ここで、 α は初期速度のまま継続的に移動する点に対する波先端の遅れ距離を示す。

(15)式を(17)・(18)式を用いて書き直すと、

$$\begin{aligned} & -r \left\{ \left(\sqrt{\frac{h_0}{h_1}} + \frac{r}{2} \dot{a} \right)^3 \tau + \frac{2}{r} \frac{h_0}{h_1} \left(1 - \sqrt{\frac{h_0}{h_1}} \right) \tau - \frac{h_0}{h_1} \alpha \right\} \ddot{\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{h_0}{h_1}} + \frac{r}{2} \dot{a} \right)^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{h_0}{h_1} \right)^2 - \frac{1}{2} r^2 \left\{ \frac{2}{r} \left(1 - \sqrt{\frac{h_0}{h_1}} \right) - \dot{a} \right\}^2 \left\{ \left(\frac{4}{r} - 4 + 6 \sqrt{\frac{h_0}{h_1}} - \frac{4}{r} \sqrt{\frac{h_0}{h_1}} + 3r \dot{a} \right) \right. \\ & \quad \left. \tau - 2\alpha \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

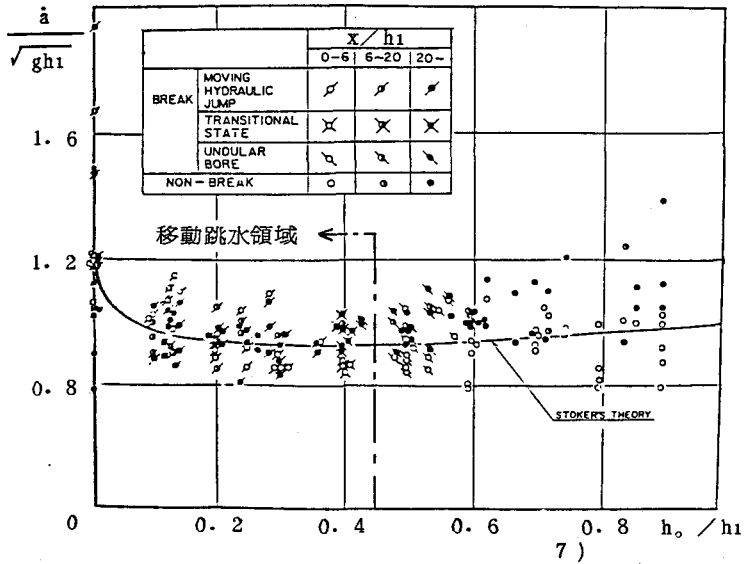


図-2 移動跳波発生領域 (中川等の論文 7) より)

ここで、 $\dot{\alpha} = d\alpha/d\tau$ 、 $\ddot{\alpha} = d^2\alpha/d\tau^2$ である。

さらに、Whitham にならって、次の新変数を導入する。

$$p = \dot{\alpha} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\tau = f'(p) = \frac{df}{dp} \quad \dots\dots\dots (21)$$

これにより、変域は無限領域から有限領域 $0 \leq p \leq \frac{2}{r}(1 - \sqrt{\frac{h_0}{h_1}})$ に変わり、 $\alpha = pf' - f$ 、 $\ddot{\alpha} = 1/f'$ と表現される。よって、(19)式は

$$\begin{aligned} & \{4r(2\sqrt{\frac{h_0}{h_1}} + rp)^3 f' + 64\frac{h_0}{h_1}(1 - \sqrt{\frac{h_0}{h_1}})f' - 32r\frac{h_0}{h_1}(pf' - f)\} \\ & + r(r^3 p^3 + 8r^2\sqrt{\frac{h_0}{h_1}}p^2 + 24r\frac{h_0}{h_1}p + 32\frac{h_0}{h_1}\sqrt{\frac{h_0}{h_1}})pf' \\ & = 16r^2\left\{\frac{2}{r}(1 - \sqrt{\frac{h_0}{h_1}}) - p\right\}^2\left\{\frac{4}{r} - 4 + 6\sqrt{\frac{h_0}{h_1}} - \frac{4}{r}\sqrt{\frac{h_0}{h_1}} + (3r - 2)p\right\}f' + 2f\}f' \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

(22)式の解として p の級数解を仮定し、初期条件 $\tau = 0$ の時 $\alpha = \dot{\alpha} = 0$ のもとで解く。 p について恒等的に成り立つ様に各係数を決めると、たとえば級数解の第1項目は次式の様に表現される。

$$f(p) = \frac{1}{2}\frac{h_0}{h_1} \frac{\{1 - (1-r)\sqrt{\frac{h_0}{h_1}}\}}{\left(\frac{4}{r} - 4 + 6\sqrt{\frac{h_0}{h_1}} + \frac{4}{r}\sqrt{\frac{h_0}{h_1}}\right)(1 - \sqrt{\frac{h_0}{h_1}})^2} p^2 + \dots\dots\dots (23)$$

第2項以下も計算的には容易に求まるが、表現すると長くなるので省略する。6.で解の収束性を調べるが、本理論と実験を比較する際には第1項のみの近似でかなりの範囲まで十分であることが確認される。

5. r の値について

前章で基本式の解(23)式が求まったわけであるが、まだ r が未知数として残っている。以下、 r の値について考察を行う。

ゲート上流・下流側水深比 h_1/h_0 の値が小さい時、ダム破壊による波先端の移動速度は初期では Stoker 理論より小さく、時間を経るに従ってそれより大きくなると言われている^{6),7)}。これは、初期では衝撃波として扱うよりも波動として扱うべき性格が強いことを示しており、後には波の分散効果までが加わってくるためと思われる。

一方、 h_1/h_0 の値が大きい時、先端の移動速度は初期では Stoker 理論より大きく、次第にそれに一致すると言われている^{6),7)}。これは、初期では鉛直方向の加速度、すなわち流線の曲率効果が無視できないためと思われる。

図-3 にこれ等の事実の確認のための筆者の実験結果を示す。実験装置等の詳細は参考文献4)を参照されたい。図中の点線は Stoker 理論を示し、実線は(11)式で示される初期粒子速度を示す。本実験結果は従来の結果と同じ傾向を示している。また、本理論による初期粒子速度は定性的に従来の初期の先端移動速度の結果と同じ傾向を示しており、先端の移動速度と水粒子速度の強い相関性および本研究モデルの有効性がうかがわれる。

よって、Stoker 理論を用いて r の値を決めようとする、すなわち初期では

$$\dot{\alpha} = \frac{2}{r}(\sqrt{gh_1} - \sqrt{gh_0}) = \omega \quad \dots\dots\dots (24)$$

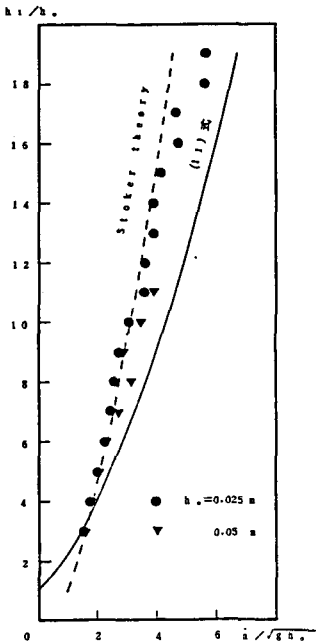


図-3 波先端の移動速度
($X=1.3m \sim 2.3m$ の平均)

の関係があるとして r の値を決めると自ずと問題を起す領域が生ずる。ここで、 ω は Stoker 理論による先端移動速度で h_0/h_1 のみの関数である。ただし、この問題は Stoker 理論を用いて r を決めたが故に生ずるものであって、本研究モデルそのものの不合理性によるものではない。しかしながら、一方では本研究モデルには物理的な面からの適用限界がある。すなわち、物理的に考えて初期には次式を満足せねばならない。

$$\ddot{a}-\ddot{\xi}=(\frac{2}{r}-2)\sqrt{gh_1}-(\frac{2}{r}-3)\sqrt{gh_0}\geq 0 \quad \cdots (25)$$

(25)式を解くと、

$$\left. \begin{aligned} r &\leq \frac{2-2\sqrt{\frac{h_0}{h_1}}}{2-3\sqrt{\frac{h_0}{h_1}}} \quad (\frac{h_0}{h_1}<\frac{4}{9}) \\ r &\geq \frac{2-2\sqrt{\frac{h_0}{h_1}}}{2-3\sqrt{\frac{h_0}{h_1}}} \quad (\frac{h_0}{h_1}>\frac{4}{9}) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (26)$$

とにかく、本研究では Stoker 理論により r を評価することにする。その結果を図-4に示す。図中には (26)式も示してある。

6. 理論計算例

(24)式の関係より求めた r を用いていくつかの理論計算例を示す。表-1は各ゲート下流・上流側水深比 h_0/h_1 に対する第7項までの係数の値を示す。図-5は上流側水深 $h_1=0.3\text{ m}$ 、下流側水深 $h_0=0.05\text{ m}$ 、そして抵抗係数 $K=0.02$ とした場合の級数解の収束性を調べたものである。第1項のみでかなりの範囲まで議論できそうである。しかし、以下の理論曲線は第7項までを用いて計算を行う。図-6と図-7は抵抗係数を種々と変化させた場合の先端の軌跡と先端の移動速度を示したものである。諸現象を予測するには正確な抵抗係数の評価が重要な問題となることがわかる。図-8は先端の軌跡に関する実験例を示す。図中の点線は実験値に最も良く合う様に抵抗係数を選んだ場合の理論曲線である。ドライ・ベッド上の実験結果に較べると、⁴⁾下流側に水深がある場合の抵抗係数は下流側水深の大きさにもよるが全体的にかなり小さな値を示すようである。

表-1 級数解の係数

h_0/h_1	第1項	第2項	第3項	第4項	第5項	第6項	第7項
0.20	0.614	-0.257	1.460	-2.704	8.756	-23.989	73.193
0.30	0.626	0.318	0.543	0.397	0.649	0.503	0.826
0.40	0.759	0.559	0.627	0.644	0.718	0.788	0.882
0.50	0.999	0.820	0.844	0.893	0.972	1.070	1.188
0.60	1.396	1.206	1.225	1.299	1.417	1.569	1.752
0.70	1.997	1.721	1.692	1.751	1.866	2.021	2.208
0.75	2.529	2.200	2.166	2.249	2.406	2.618	2.874
0.80	3.302	2.873	2.815	2.913	3.108	3.373	3.695
0.85	4.519	3.871	3.724	3.790	3.978	4.250	4.585
0.90	6.671	5.419	4.941	4.772	4.760	4.835	4.963

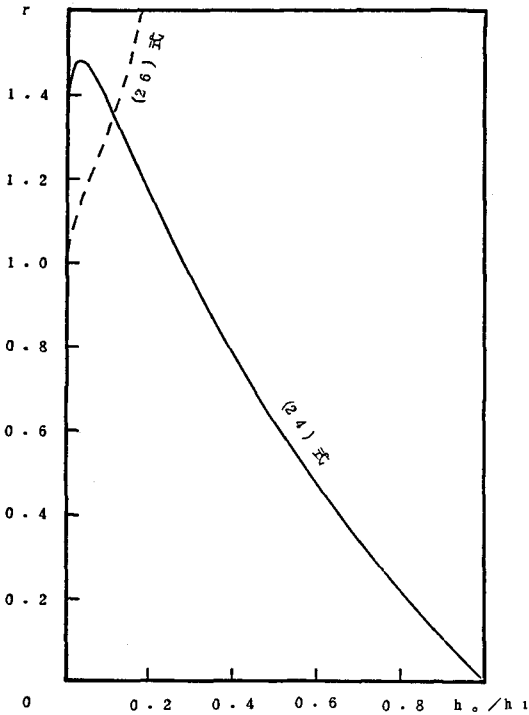


図-4 r の計算値

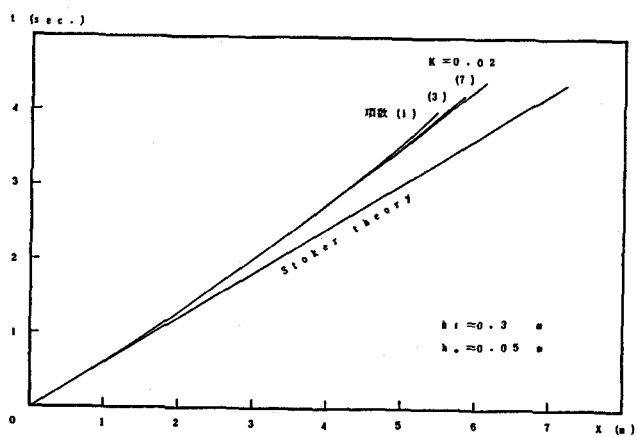


図-5 級数解の収束性

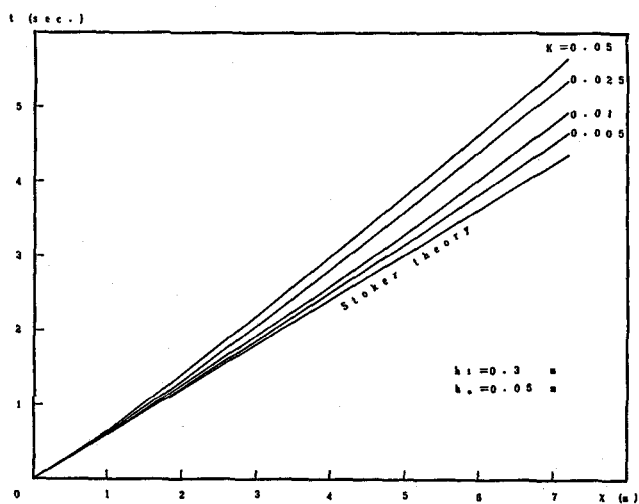


図-6 波先端の軌跡

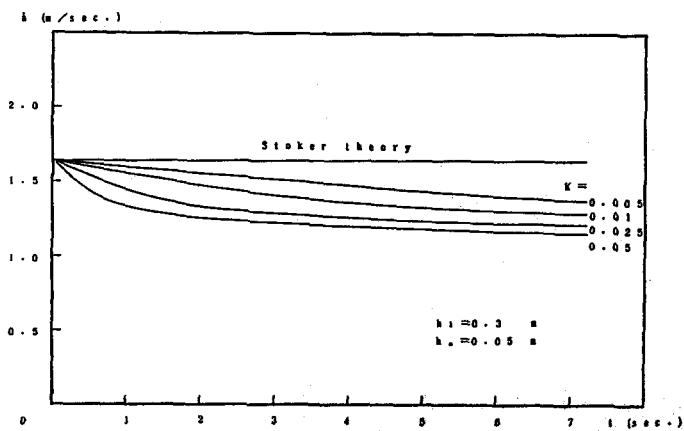


図-7 波先端の移動速度

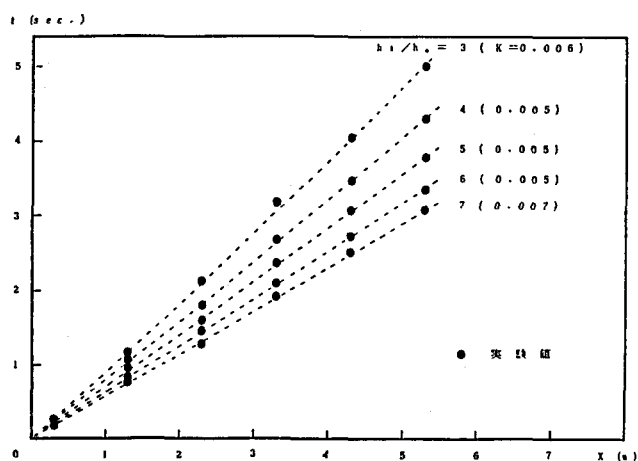


図-8 波先端の軌跡 (実験値との比較)

7. むすび

本研究はゲート下流側に水深がある場合のダム破壊による急変不定流への抵抗の影響をWhithamの方法にならって理論的に調べたものである。以下、主要な結論を箇条書きにする。ⅰ) ゲート下流側に水深がある場合にもWhithamの方法は有効な方法である。ⅱ) 水粒子速度が先端の波速 $\sqrt{gh_0}$ より大きい時不連続波頭をもつ移動跳水が生ずるとして、移動跳水発生条件が得られる。ⅲ) 正確な抵抗係数が評価できるならば、先端の軌跡と移動速度の予測は可能である。換言すれば、流れの諸量を予測するには抵抗係数の評価が重要な問題となる。

謝辞

本研究は東北大学首藤伸夫教授のもとで行ったもので、先生より多大なる御教示と励ましを賜わった。ここに記して深甚なる感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Ritter, A.: Die Fortpflanzung der Wasserwellen, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure (Berlin), Vol. 36, pt. 2, №38, pp. 947-954, 1892.
- 2) Dressler, R.F.: Hydraulic resistance effect upon the dam-break functions, Journal of Research of the National Bureau of Standards, Vol. 49, №3, pp. 217-225, 1952.
- 3) Whitham, G.B.: The effects of hydraulic resistance in the dam-break problem, Proceedings of Royal Society of London, series A, Vol. 227, pp. 399-407, 1955.
- 4) 松富英夫・首藤伸夫: ドライ・ベッド上の急変不定流に関する実験、第35回年次講演会、第2部、pp. 364-365, 1980.
- 5) Stoker, J.J.: Water Waves, Interscience Publishers, Inc., New York, pp. 333-341, 1957.
- 6) 中川博次・中村重久・市橋義臣: 段波の発生とその発達に関する研究、京大防災研究所年報第12号B、pp. 1-11, 1969.
- 7) Nakagawa, H., S. Nakamura and Y. Ichihashi: Generation and Development of Hydraulic Bore Due to the Breaking of a Dam (I), Bull. Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., Vol. 19, pt. 2, №154, pp. 1-17, 1969.