

二次流に関する加速度項の横断水面勾配に対する影響について
Effect of Inertia Factor related to Secondary Flow on Transverse Slope of Free Surface

立命館大学 理工学部 正会員 小沢功一

1. まえがき

河道は一般に曲がりくねった蛇行形状となることが知られている。その彎曲の程度が著しい位置においては土砂が内岸側に堆積し、外岸側では洗掘される傾向が現われるためにますます彎曲の程度が進行することになる。それを抑制するのに護岸や根固めを施す必要が出てくる。このような場合に彎曲部における水流の性状を定性的に知るだけでなくさらにそれを量的に把握できることが望ましい。

彎曲部における主流の横断方向についての分布に関しては従来から二、三の考え方がある。一つには摩擦を無視して完全流体として扱う自由渦型の分布とする見方である。¹⁾ もう一つには彎曲部を充分流下して流れが主流方向に一樣になっていると考えられる位置においては強制渦型の分布をするという考え方である。²⁾ さらに曲率半径の平方根に逆比例するという仮定も行われている。³⁾ あるいはまた境界層の考え方を導入して上層部の主流速度の分布として検討されている研究もある。⁴⁾

これらの考え方に関連して彎曲角が180度でその前後に直線部が接続しているような水路での実験結果を検討してみると、彎曲部へ入った当初の位置では内岸側が速い分布をし流下するに従い速度が速い位置は水路の中央部から外岸の方へと移動するようである。彎曲部の末端部に近い位置での分布を検討してみると外岸側の方へ速度が大きくなっていっているが必ずしも曲率半径に比例するという事でもないようである。

本研究においては、主流の横断方向への分布については主流方向の運動方程式から得られたものを使う。また横断方向の運動方程式としては二次流に関する加速度項も考慮する。彎曲部末端部に近い位置のように河床が内岸側で上昇し外岸側で下降するような変化をすると、その影響が主流速度や二次流にも及ぶことが考えられる。したがって主流については前述の誘導から曲率半径と水深の関数とし、また二次流による加速度項を二次流の近似式を用いて評価し、それによる横断水面勾配への影響を算定する。そして実験値と比較し検討を行なった。

2. 主流速度の横断方向への分布

主流方向の運動方程式としては流れが定常でしかも水深が曲率半径に比較して小さいとすることが出来る場合、円筒座標系を用いて

$$gI_\theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_\theta}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

と表わされる。ここに I_θ は主流方向の水面勾配、 τ_θ は主流方向のせん断力である。

ここで I_θ に関してつぎのように仮定する。

$$rI_\theta = r_c I_c \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

ここに r は曲率半径、 r_c 、 I_c はそれぞれ水路中央における曲率半径と縦断水面勾配である。因みに式(2.2)に関連して、実験値を検討してみると表-1のようになる。ばらつきがあるがほぼ式(2.2)は満足されるようである。

表-1 各位置における水位と縦断水位差

$\theta \backslash r$	80	90	100	110	120
0	18.8	19.2	19.1	19.4	19.2
$5\pi/6$	18.3	18.6	18.5	19.1	18.7
dz_h	0.5	0.6	0.6	0.3	0.5

(cm)

式(2.1)・(2.2)を連立させ、自由表面においてせん断力は0であるという境界条件のもとに積分するとつぎのようになる。

$$\tau_\theta / \rho = g(r_c I_c / r)(z_h - z) \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

ここに z_b は鉛直上方にとった z 座標における自由表面の高さである。

さらに、河床面のせん断力は τ_o に等しいとすると

$$\tau_o / \rho = g (r_c I_c / r) h \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

となる。ここに h は水深を表わしている。

ここで式 (2.4) の左辺の τ_o / ρ については Chezy 係数 C を用いてつぎのように表わすことができる。

$$\tau_o / \rho = u_*^2 = U_m^2 (g / C^2) \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

ここに U_m は主流流速 U_0 の鉛直方向についての平均値である。

したがって式 (2.4), (2.5) から U_m について示すとつぎのようになる。

$$U_m = C \sqrt{r_c I_c} \sqrt{h / r} \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

主流方向の流れが一様になり、横断方向の河床形も平衡に達した後の河床形を水深 h と曲率半径 r とで

$$h = \alpha r^\beta \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

と表わすとすると式 (2.6) はつぎのようになる。

$$U_m = C \sqrt{\alpha r_c I_c} r^{(\beta-1)/2} \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

ここで式 (2.7) における α , β はつぎのように決めることができる。すなわち河床上の砂粒子に作用する横断方向の力は近似的に二次流によるせん断力と砂粒子に作用する重力の成分であり、横断河床形が平衡に達した後は内岸方向へ斜面を遡るように動くせん断力と砂粒子に働く重力の斜面を下る方向への成分とがつり合っているとす。河床の傾きに比較して水面の横断方向への傾きは小さいとして、横断河床形を無次元化した水深の形で示すとつぎのようになる⁵⁾

$$h / h_m = (r / r_c)^B \quad \dots\dots\dots (2.9)$$

ここに h_m は平均水深、 B は

$$B = - \frac{3}{2} \frac{g}{\lambda C^2} \frac{\bar{U}_m^2}{(\rho_s / \rho - 1) g D} (\tau_{r*})_{\eta \rightarrow 0} \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

λ は遮蔽係数、 D , ρ_s はそれぞれ砂粒子の粒径および密度、 $\bar{U}_m$ は主流の平均流速、 $(\tau_{r*})_{\eta \rightarrow 0}$ は河床面に近い位置における二次流による無次元せん断力を表わしている。また η は無次元 z 座標で $\eta = (z - z_b) / h$, z_b は河床面の z 座標である。

式 (2.7), (2.9), (2.10) を対応させることによって α , β はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{h_m}{r_c^B} \\ \beta &= B = - \frac{3}{2} \frac{g}{\lambda C^2} \frac{\bar{U}_m^2}{(\rho_s / \rho - 1) g D} (\tau_{r*})_{\eta \rightarrow 0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.11)$$

τ_{r*} について無次元 Chezy 係数 $C / \sqrt{g}$ をパラメーターとして示すと図 - 1 のようである。

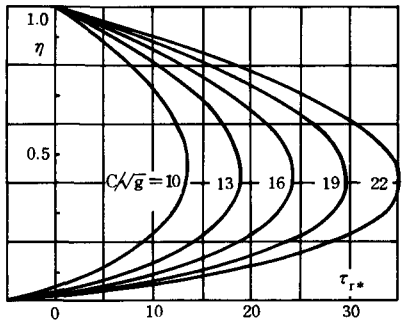


図 - 1 横断方向のせん断力の鉛直分布

3. 二次流に関する加速度項の横断水面勾配に対する影響

横断方向の運動方程式については、流れが主流方向に一様でしかも水深が曲率半径に比較して小さいとすることができる場合、円筒座標を用いて

$$- \frac{U_0^2}{r} = - g I_{r1} + \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon \frac{\partial U_{r1}}{\partial z}) \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

と表わされる⁶⁾。ここに U_0 は主流流速、 U_{r1} は二次流の流速、 I_{r1} は横断方向の水面勾配、 ϵ は渦動粘性係数であ

る。 U_0 の鉛直分布については対数則を用いると式(3.1)における I_{r1} 、 U_{r1} はつぎようになる。

$$I_{r1} = \left(1 + \frac{1.8g}{\kappa^2 C^2}\right) \frac{U_m^2}{gr} \dots\dots\dots (3.2)$$

$$U_{r1} = \frac{1}{\kappa^2} U_m \frac{h}{r} \{F_1(\eta) - \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} F_4(\eta)\} \dots\dots\dots (3.3)$$

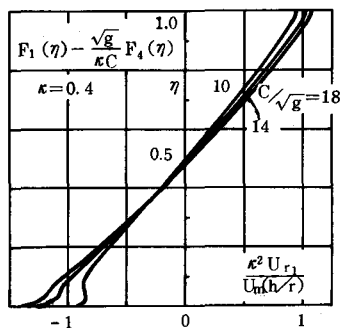


図-2 二次流 U_{r1} の鉛直分布

ここに κ はKarman定数である。 $F_1(\eta) - (\sqrt{g}/\kappa C)F_4(\eta)$ に関して、無次元Chezy係数 $C/\sqrt{g}$ をパラメーターにして示すと図-2のようになる。

つぎに、二次流に関する加速度項を考慮する場合における横断方向の運動方程式は近似的に

$$U_{r1} \frac{\partial U_{r1}}{\partial r} + U_{z1} \frac{\partial U_{r1}}{\partial z} - \frac{U_0^2}{r} = -gI_r + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (3.4)$$

と表わされる。このときの I_r 、 U_r を $I_r = I_{r1} + I_{r2}$ 、 $U_r = U_{r1} + U_{r2}$ とすると I_{r2} 、 U_{r2} はそれぞれ、二次流に関する加速度項を考慮するための補正值である。これらの補正值を求めるには式(3.1)、(3.4)を連立させ、 U_{r1} としては式(3.3)に近似的な

$$U_{r1} = \frac{1}{\kappa^2} U_m \frac{h}{r} (2\eta - 1) \dots\dots\dots (3.5)$$

を仮定する。二次流についての補正值 U_{r2} によるせん断力は近似的に河床面および水面で0になる等の境界条件のもとに計算すると、横断水面勾配に対する補正值 I_{r2} はつぎのようになる。

$$I_{r2} = - \frac{3\beta - 2}{3\kappa^4} \left(\frac{h}{r}\right)^2 \frac{U_m^2}{gr} \dots\dots\dots (3.6)$$

したがって二次流に関する加速度項を考慮する場合における横断方向の水面勾配は式(3.2)、(3.6)を連立させて得られる。すなわち

$$I_r = \left\{ 1 + \frac{1.8g}{\kappa^2 C^2} - \frac{3\beta - 2}{3\kappa^4} \left(\frac{h}{r}\right)^2 \right\} \frac{U_m^2}{gr} \dots\dots\dots (3.7)$$

となる。

横断方向の水位差 Δh については曲率半径 r に関して内岸から外岸まで積分して求めることができる。 r_i 、 r_o をそれぞれ内岸、外岸の曲率半径とするとつぎのようになる。

$$\Delta h = \frac{U_m^2}{g(\beta - 1)r_c^{\beta - 1}} \left[\left(1 + \frac{1.8g}{\kappa^2 C^2}\right) (r_o^{\beta - 1} - r_i^{\beta - 1}) - \frac{\alpha^2(3\beta - 2)}{9\kappa^4} \{r_o^{3(\beta - 1)} - r_i^{3(\beta - 1)}\} \right] \dots\dots (3.8)$$

ここに添字Cは水路中心における値を示している。

内岸側と外岸側との水位差の概略値を得るには水路中心の曲率半径 r_c における水深、主流流速は平均値に等しいとして式(3.7)の勾配から

$$\Delta h = \left\{ 1 + \frac{1.8g}{\kappa^2 C^2} - \frac{3\beta - 2}{3\kappa^4} \left(\frac{h_m}{r_c}\right)^2 \right\} \frac{\bar{U}_m^2}{gr_c} b \dots\dots\dots (3.9)$$

となる。ここに b は水路幅である。

この場合、二次流に関する加速度項の影響を表わす括弧中の第3項を省略するとつぎのようになる。

$$\Delta h = \left(1 + \frac{1.8g}{\kappa^2 C^2}\right) \frac{\bar{U}_m^2}{gr_c} b \dots\dots\dots (3.10)$$

さらに式(3.10)において、鉛直方向に流速分布がある影響を表わす括弧中の第2項を省略すると式(3.11)のようになる。

$$\Delta h = \frac{\bar{U}_m^2}{g r_c} \quad b \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

4. 彎曲水路における実験と考察

4.1 実験の概要

実験に用いた水路は180度の彎曲角でその前後にそれぞれ5m、2.5mの直線部が接続している鋼製水路である。彎曲部の曲率半径は水路中心について1mで、彎曲部の長さは中心線に沿って3.14mである。水路の幅は50cm、深さは35cmで、全長に渡って水平である。

移動床実験の場合、河床材料として用いた砂の50%粒径は0.72mmである。始めに砂を水路底に約8cmの厚さに水平に敷きならし、20.5 l/sの流量を流す。河床がほぼ平衡に達したと見られる時点で、水を流している状態のもとで水面と河床の高さを砂面測定器で測った。測定位置については直線部では1m間隔、彎曲部では彎曲角で30度間隔の断面とした。それらの断面で横断方向に中央部では10cm間隔の位置、側壁間隙の位置、側壁から5cm離れた位置の計7点での測定を行なった。流速の測定位置については直線部では彎曲部との境界から1m離れた断面、彎曲部では30度間隔の断面とした。それぞれの断面において横断方向に10cm間隔の位置とし、水深方向には水面から2.5cmの点、それより下方では1.3cm間隔に河床を乱さない位置まで6、7点で測定した。その測定は水平方向についての速度ベクトルの大きさとその方向とを流速流向計を用いて測った。実験条件をまとめると表-2のようである。

表-2 実験条件

実験 番号	流量 Q (l/s)	平均 水深 $\bar{h}_m$ (cm)	平均 流速 $\bar{U}_m$ (cm/s)	フル- ード数 Fr	レイノル ズ数 Re ($\times 10^4$)	流速 係数 φ ($\bar{U}_m/U_*$)	シェン 係数 C (m/s)	摩擦 速度 U* (cm/s)
M-1	20.5	14.1	31.4	0.265	4.85	19.1	59.9	1.62
M-2	20.5	13.1	34.1	0.310	4.91	18.9	59.2	1.82
F-2	20.5	9.1	50.7	0.549	5.41	22.6	70.4	2.31

4.2 主流流速の横断方向への分布

測定においてはその位置での水平方向の速度ベクトルを測ったがその方向は主流方向に10度以内程度しかそれていなかったため、主流流速は速度ベクトルの大きさに等しいとした。

主流流速を鉛直方向に平均した値の横断方向への分布に関して表-2における実験番号M-1について無次元の形で示すと、図-3(a)~(c)のようである。図中には実験値の他に計算値も描かれていてその計算式は図(a)の場合は式(2.8)に基づいている。図(b)の場合は自由渦型の式

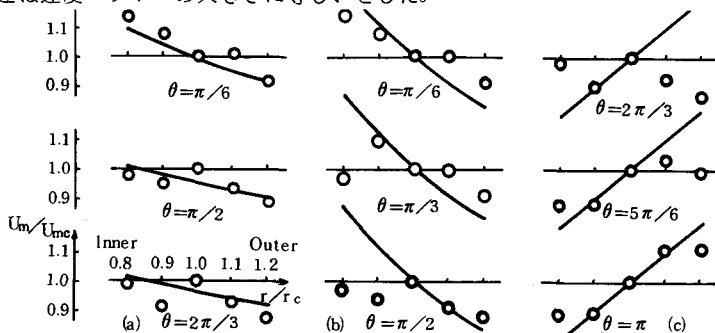


図-3 主流流速の横断方向への分布

$U_m \propto 1/r$ に依っている。また図(c)の場合は強制渦型の式 $U_m \propto r$ を用いている。実験値の傾向を検討してみると、彎曲部へ入った当初の断面においては内岸側で早く外岸側へ行くに従い遅くなる分布となっている。この傾向は彎曲部を流下するに従い緩和され、末端部の断面では逆に内岸側で遅く外岸側で早くなるような分布に変化してきている。これらの実験値を計算から得られる値と比較してみると、図(b)から彎曲部へ入った当初の断面では自由渦型に近い分布と見る事ができる。また図(c)から彎曲部末端部の断面では強制渦型に近い分布と見る事ができる。その他の断面では自由渦型とも強制渦型とも一致していないようである。図(a)からは、彎曲部へ入った当初の断面から充分流下して行った断面まで、実験値と計算から得られた値とは傾向としてはよく一致していると見る事ができる。この場合の流速式(2.8)におけるパラメーター α 、 β については式(2.11)から得られる。1例として $\theta = 2\pi/3$ の断面における値を示すと $\alpha = 1.75$ 、 $\beta = 0.46$ となる。この場合遮蔽係数 λ としては $\lambda = 0.35$ を用いている。また横断方向に10cm間隔の5点で

測定した水深に基づいて、 $y = 1_n h$, $x = 1_n r$ として最小二乗法により同じ断面 $\theta = 2\pi/3$ における値を求めると $\alpha = 1.59$, $\beta = 0.48$ となる。この場合の計算式はつぎのようである。

$$1_n \alpha = \bar{y} - r_{xy} \frac{s_y}{s_x} \bar{x}, \quad \beta = r_{xy} \frac{s_y}{s_x} \dots\dots\dots (4.1)$$

ここに r_{xy} は相関係数, s_x, s_y はそれぞれ x, y についての標準偏差, $\bar{x}, \bar{y}$ はそれぞれ x, y の平均値である。

さらに簡単のために外岸側と内岸側の二点における水深 h_1, h_2 から

$$\alpha = \frac{h_1}{r_1^\beta}, \quad \beta = \frac{1_n(h_1/h_2)}{1_n(r_1/r_2)} \dots\dots\dots (4.2)$$

として $\theta = 2\pi/3$ の断面における値を計算すると $\alpha = 1.44$, $\beta = 0.49$ となる。式 (4.2) の r_1, r_2 はそれぞれ水深 h_1, h_2 の点の曲率半径であり, $r_1 = 120 \text{ cm}$, $r_2 = 80 \text{ cm}$ をとっている。

式 (2.11), (4.1), (4.2) から得られた α, β の値はほぼ等しいと見ることができる。

4.3 横断方向の水位差

横断方向の水面形と河床形についての一例として表-2における実験番号 M-1 の場合の彎曲角が $\theta = \pi/3, \pi/2, 2\pi/3$ の断面での実験値を示すと図-4 のようである。因みに $\theta = 2\pi/3$ の断面における外岸側と内岸側との水位差は 5mm である。実際の水路幅は 50 cm であるが水位差を検討する位置は測定の都合上、側壁から 5 cm 内側へ寄った所とした。したがって幅としては計算上 40 cm 分にとった。

横断方向の水位差を表わす計算式としては従来から Ippen と Drinker⁷⁾ がつぎのように仮定した条件式

$$\frac{1}{b} \int_{r_i}^{r_o} \left(\frac{U_m^2}{2g} + h \right) dr = \frac{\bar{U}_m^2}{2g} + h_m \dots\dots\dots (4.3)$$

を使って、横断方向の主流流速の分布が自由渦型である場合は

$$\Delta h = \frac{1}{\left\{ 1 - (1/4)(b/r_c)^2 \right\}} \frac{\bar{U}_m^2}{g r_c} b \dots\dots (4.4)$$

となり、強制渦型である場合は

$$\Delta h = \frac{1}{1 + (1/12)(b/r_c)^2} \frac{\bar{U}_m^2}{g r_c} b \dots\dots (4.5)$$

となるとしている。

横断方向の水位差についてこれまで掲げてきた計算式に関連する事項を纏めて示すと表-3(a)のようになる。計算については彎曲部を充分流下したと考えられる彎曲角が $\theta = 2\pi/3$ 程の断面を対象としている。

式 (3.10) における Karman 定数の κ については $\kappa = 0.4$ としている。また Chezy 係数の C については移動床の場合 $\bar{U}_m/U_* = 6.0 + 5.75 \log(h_m/k_s)$ において $k_s = D_{50} = 0.072 \text{ cm}$ とし、 $\bar{U}_m/U_* = C/\sqrt{g}$ から係数 C を求め実験番号 M-1, M-2 に対してそれぞれ $C = 60.2, 59.2$ を得ている。固定床の場合は $\bar{U}_m/U_* = 3.0 + 5.75 \log(U_* h_m/\nu)$ から同様に $C = 69.9$ が得られた。また式 (3.8), (3.9) における β については実験番号 M-1, M-2 に対しては式 (2.11) から求めた。このとき遮蔽係数は $\lambda = 0.35$ とした。固定床実験である実験番号 F-2 に対しては β の値を式 (4.2) から求めた。得られた β の値を α の値とともに纏めると表-4 のようである。なお表-3 の実験値としては彎曲角が $\theta = 2\pi/3$ と $5\pi/6$ とにお

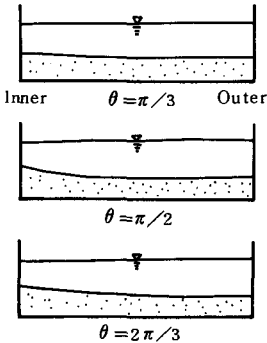


図-4 横断面図

表-3(a) 横断方向の水位差 Δh (cm)

主流流速の分布		二次流に関する 加速度項	計算式	実験番号		
鉛直方向	横断方向			M-1	M-2	F-2
計算値	一様	一様	省略 (3.11)	0.374	0.486	1.004
	一様	自由渦型 ω_1/r	省略 (4.4)	0.399	0.518	1.070
	一様	強制渦型 ωr	省略 (4.5)	0.366	0.476	0.984
	対数則	一様	省略 (3.10)	0.385	0.501	1.027
	対数則	一様	考慮 (3.9)	0.448	0.517	1.110
	対数則	水深関数 $\omega/\sqrt{h/r}$	考慮 (3.8)	0.499	0.566	1.294
実験値	彎曲角 $\theta = 2\pi/3, 5\pi/6$			0.50	0.55	1.25

ける値の平均値である。

横断方向の水位差については表-3 (a)から明らかなように式 (3.8) から計算される値は実験値とよく一致するようである。また最も簡単な式 (3.11) によって計算した値を基準にして各式による値を割合の形で示すと表-3 (b)のようになる。

5. あとがき

彎曲水路における主流流速が横断方向へどのように分布しているかについては H. A. Einstein と J. A. Harder¹⁾によって、非粘性流体を考えて、それは曲率半径に逆比例する自由渦型の分布をするとされた。また I. L. Rozovskii⁶⁾によっても流れが直線部から彎曲部へ入った当初においては、直線部での流れが横断方向に一樣であれば自由渦型の分布をすると導かれている。

彎曲角が 180 度の単一彎曲部の前後に直線部が接続している場合、彎曲部の入口近くにおいては自由渦型の分布をするが彎曲部を流下するにつれて二次流の影響等を受けて、主流の最大流速の位置は内岸側から徐々に水路中央部へ、あるいは中央部より外岸側へと移ってくる。

彎曲部における河床変動を取扱う場合、彎曲部の末端部に近い断面で最もその変動量が大きくなることが知られている。⁶⁾この河床変動が起る主要な原因として二次流が揚げられる。この断面の横断河床形は、二次流によって河床砂が内岸側に堆積し外岸側では洗掘される結果内岸側へ高くなっている斜面の形をとり、二次流による掃流力と河床砂の重量成分とが釣り合うようになって平衡河床形が得られるという考え方もできる。⁵⁾

また横断水面形については内岸側で低く外岸側で高い水位となる形をとり、その程度は彎曲部へ入った当初の断面と彎曲部を充分流下した位置における断面とでは異なるようである。河床変動を取扱う場合に対象とされるような後者の断面における横断水面形には、自由渦とは別の主流流速の分布あるいは二次流の影響等が現われてくるものと考えられる。

そこで横断方向の運動方程式における二次流に関する加速度項が横断水面勾配に影響する量を算出し実験値と比較した。すなわち主流の横断方向への分布については式 (2.6) を使い、横断方向の二次流としては近似式として式 (3.5) を使うと横断水面勾配に対する二次流に関する補正値としては式 (3.6) のようになるが、この式に基づいて計算した値を考慮して彎曲角が $2\pi/3$ の断面における内岸側と外岸側との水位差を求め実験値と比較したらよく一致する結果が得られた。

参考文献

- 1) Einstein, H. A. and Harder, J. A., : Velocity Distribution and the Boundary Layer at the Channel Bends, Trans., AGU, Vol. 35 (1954).
- 2) 須賀堯三 : 開水路彎曲部の河床の安定形状, 第 9 回水理講演会講演集 (1965).
- 3) Engelund, F., : Flow and Bed Topography in Channel Bends, Proc. ASCE, Vol. 100 (1974).
- 4) 村本嘉雄, 石田真一, : 彎曲部の流れに及ぼす二次流の効果について, 京都大学防災研究所年報第 7 号 (1969).
- 5) 小沢功一, : 彎曲水路における最大洗掘深, 立命館大学理工学研究所紀要第 38 号 (1980).
- 6) Rozovskii, I. L., : Flow of Water in Bends of Open Channels, Academy of Sciences of Ukrainian SSR, Kiev (1957).
- 7) Ippen, A. T. and Drinker, P. A., : Boundary Shear Stresses in Trapezoidal Channels, Proc. ASCE, Vol. 88 (1962).

表-4 α , β の値

h= αr^β	実験番号		
	M-1	M-2	F-2
α	1.751	0.755	1.369
β	0.456	0.613	0.415

表-3 (b) 各計算式間の割合

計算式	実験番号		
	M-1	M-2	F-2
(3.11)	1	1	1
(4.4)	1.067	1.066	1.066
(4.5)	0.979	0.979	0.980
(3.10)	1.029	1.031	1.023
(3.9)	1.198	1.064	1.106
(3.8)	1.334	1.165	1.289