

海中に係留された球形浮体の運動と係留力

Motion and Mooring Force of a Submerged Sphere due to Waves

建設省土木研究所 正員 ○ 山口 修

同 正員 橋本 宏

1. 緒言

海中に1点緊張係留された球形浮体の規則波による運動と係留力についてはこれまでも多くの研究が行われてきたが¹⁾、不規則波中における解析はほとんど行われていない。本研究では水面に浮んだ浮体の運動の計算に対して船舶流体力学で一般に用いられる近似解法²⁾を用いて海中に係留された球形浮体の規則波及び不規則波中の運動特性と係留力を推定する。この方法では付加質量や減衰定数を実験的に求めて運動方程式に代入するという煩雑さはあるが、複雑な計算を行うことなく、運動の大略の推定が可能である。ここでは粘性力の効果を取入れた解析方法によって、規則波及び不規則波中の運動と係留力を計算し、模型実験及び現地実験によってその妥当性を検証したいと考える。

2. 規則波中の応答解析

2-1 運動方程式の構成

図-1に示すように座標軸を定め、球形浮体に作用する外力の計算が容易なように球座標系を併用する。波は(-x)方向に進行する規則波を考える。なお、ここで取扱う浮体の運動は二次元定常運動とし、運動は微小とする。さらに鉛直方向の波強制力が余裕浮力に比べて小さいとすれば、海中に係留された球形浮体重心の接線方向の運動方程式は、粘性力の効果を非線型抗力として水粒子と浮体運動の相対速度の2乗に比例する形で導入すると支点0を回転の中心として次のように構成される。

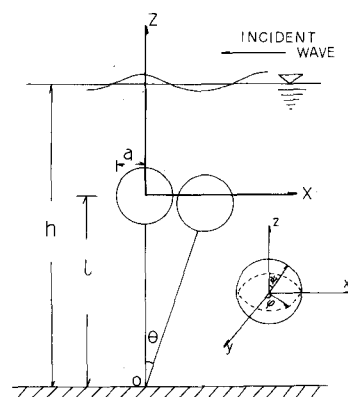


図-1 座標系

$$I \ddot{\theta} + (I' \ddot{\theta} + C_1 \dot{\theta}^2) + C_3 \ell \theta = F_x \ell + C_2 \ell (u - \dot{\theta} \ell) |u - \dot{\theta} \ell| \quad (1)$$

ここで、 $C_2 = C_D K_C$ 、 $C_3 = (\frac{4}{3} \rho \pi a^3 - m) g$ である。

(1)式において左辺第1項は慣性力によるモーメント、第2項は静水中で運動する物体に作用する力によるモーメント、第3項は静的復元力によるモーメントに対応し、右辺第1項は固定された物体に作用する力によるモーメント、第2項は粘性力によるモーメントに対応する。また I 、 I' はそれぞれ慣性モーメント、付加慣性モーメント、 C_1 は線型減衰係数、 m は浮体の質量、 C_D は抗力係数、 g は重力の加速度、 ℓ は0点から浮体重心までの距離、 a は浮体の半径、 F_x は水平方向の波強制力、 $K_C = \frac{1}{2} \rho \pi a^2$ 、 ρ は海水の密度である。

法線方向の運動方程式は次式で与えられる。

$$m \frac{v^2}{\ell} = T - F_z - C_3 \quad (2)$$

ここで、 V は0点を中心とする球形浮体重心の回転運動の接線速度で、 $V = \ell \dot{\theta}$ 、 T は係留索に作用する力、 F_z は浮体に作用する鉛直方向の波強制力である。(1)、(2)式を解くには運動方程式の係数及び波強制力の値を与える必要があるが、付加慣性モーメント、減衰定数の値は静水中での自由動揺試験によって得られたものを使用する。鉛直及び水平方向の波強制力は浮体の全表面に作用する圧力を積分することによって求まる力 (Froude-Kriloff's force) と進行してきた波が浮体のためにかく乱される結果浮体に作用する力 (Diffraction wave force) の和として近似する。Diffraction wave forceはさらに水粒子の加

速度と速度に比例する項に分割できるが、浮体の径が波長に比べて小さければ水粒子の速度に比例した力は無視できるため、ここでは水粒子加速度に比例する力のみで表現することとすれば、以下のようにして計算される。

2-2 波強制力の計算

図-1において(-x)方向に進行する規則波を考えると、入射波の速度ポテンシャル ϕ は次のようである。

$$\phi = -\zeta_0 \frac{g}{\sigma} \frac{\cosh k(\ell + r \cos \phi)}{\cosh kh} \sin(kr \sin \phi \sin \varphi + \sigma t) \quad (3)$$

水平及び鉛直方向の水粒子速度及び加速度、 $(u, \dot{u})$, $(w, \dot{w})$, それに変動圧力、 p はそれぞれ次式で与えられる。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (4)$$

ここで、 ζ_0 は入射波の振幅、 σ は角周波数、 k は波数、 h は水深、その他の記号はこれまでと同様である。

(4)式の変動圧力から鉛直及び水平方向のFroude-Kriloff's force, $F_z(F.K)$, $F_x(F.K)$ はそれぞれ次式で計算される。

$$F_z(F.K) = -\int_0^{\varphi=2\pi} \int_0^{\phi=\pi} \{p\}_{r=a} a^2 \cos \phi \sin \phi \, d\phi \, d\varphi \cos \sigma t \quad (5)$$

$$F_x(F.K) = -\int_0^{\varphi=2\pi} \int_0^{\phi=\pi} \{p\}_{r=a} a^2 \sin^2 \phi \sin \varphi \, d\phi \, d\varphi \sin \sigma t \quad (6)$$

(5), (6)式は直接には積分できないため、実際の計算ではベッセル関数の展開公式を利用して ϕ に関する積分を行った後に、 $(0 \sim \pi)$ の間を1000等分して、シンプソンの公式により数値積分を行った。鉛直及び水平方向のDiffraction wave force, $F_z(D.F)$, $F_x(D.F)$ はそれぞれ次式のようになる。

$$F_z(D.F) = -mz \zeta_0 \sigma^2 \lambda_0 \cos \sigma t \quad (7)$$

$$F_x(D.F) = mx \zeta_0 \sigma^2 q_0 \sin \sigma t \quad (8)$$

ここで、 $\lambda_0 = \sinh k\ell / \sinh kh$, $q_0 = \cosh k\ell / \sinh kh$ である。

mz , mx は鉛直及び水平方向の付加質量で、静水中動揺実験から得られる値をすべての周期にわたって一定値として使用するが、浮体形状の対称性を考えると $mx = mz$ である。また水粒子加速度の平均値は浮体中心位置 $z = 0$ での値を用いる。したがって本解析では波強制力を水粒子加速度と同位相の力、即ち慣性力のみで近似していることになる。静止無限流体中で振動する球の付加質量としては、球体の排除する流体質量の $1/2$ を考えればよいとするポテンシャル理論の値を用いると、当然ながら(5)式と(7)式、あるいは(6)式と(8)式の和から計算される慣性力係数は1.5となることが確かめられる。

2-3 運動方程式の係数

本解析においては付加慣性モーメント、付加質量及び減衰定数は静水中動揺実験によって得られる自由動揺曲線から求める。この方法では固有周期の運動に関する情報しか得られないため、その他の周期の運動を推定する場合には厳密性にかけることになるが、大略の推定は可能である。まず、付加慣性モーメントは減衰項の影響を無視すると次式で与えられる。

$$I' = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \times C_d \ell - I \quad (9)$$

ここで、 T は固有周期であり、付加質量 mz , mx は近似的に $mx = mz = I'/\ell^2$ で計算される。

また線型減衰係数は以下のようにして求められる。本解析では(1)式に示したように浮体の運動に基づく抵抗モーメントが浮体の運動速度及び速度の2乗に比例する抵抗モーメントの和から成ると仮定している。前者は造波に基づくものであり、後者は摩擦や造渦に基づくものであるが、これらの成分は自由動揺試験の記録から得られる減減(減衰)曲線を用いて次のようにして分離できる³⁾。まず、(1). 2乗に比例する抵抗力による仕事量を球の抗力係数として $C_D = 0.5$ を採用して計算する。次に、(2). 減減曲線から抵抗力によってなされた

全仕事量を計算し、(1)で計算された仕事量を差引く。(3)、(2)で計算された残りの仕事量が速度に比例する抵抗
力によってなされたものとして線型減衰係数を求める。

2-4 運動方程式の解

(1)式は2階の非線型微分方程式であるため、このままでは簡単に解を求めることができない。本解析では非
線型項を準線型化して解を求める方法と数値計算によって解を求める方法によって解を求めることとする。ま
ず、準線型化による方法の計算手順は以下の通りである。いま、水粒子と浮体運動の相対速度を $u-\dot{\theta}L=$
 $U_0 \sin(\sigma t+\delta)$ とし、非線型項をフーリエ級数に展開して第1項をとると次式ようになる。

$$(u-\dot{\theta}L)|u-\dot{\theta}L|=-\frac{8}{3\pi}U_0^2\sin(\sigma t+\delta) \tag{10}$$

ここで、回転運動の振幅を θ_0 、表面波形に対する位相差を ε として、 $\theta=\theta_0\cos(\sigma t-\varepsilon)$ とすれば、無次元
運動振幅 θ_0L/L_0 をAとおいて

$$U_0=\sigma L_0(A^2+2Aq_0\sin\varepsilon+q_0^2)^{1/2}, \quad \tan\delta=-(q_0+Asin\varepsilon)/(Acos\varepsilon) \tag{11}$$

となる。球形浮体の運動振幅と位相差(θ_0, ε)を求め運動を確定するには、(1)式に(10)、(11)式を代入して解け
ばよいが、これを実際に解くことは困難なので次のような方法によって解を求める²⁾。まず、(10)式を変形して
(1)式に代入すると次式が得られる。

$$(I+I')\ddot{\theta}+C_1\dot{\theta}+C_2L\theta=F_xL+\frac{8}{3\pi}C_2LU_0(u-\dot{\theta}L) \tag{12}$$

そこで U_0 を仮定して(12)式を解き、えられた(θ_0, ε)の値を用いて(11)式から再
び U_0 を計算する。この計算を U_0 の値が収束するまで繰返す。実際の計算では U_0
の値が1つ前の U_0 に比べて、 10^{-4} より小さくなるまで計算を行った。この計
算法では繰返し計算が含まれるため数値計算法に比べて利点は見当らない
が、線型減衰定数が小さく、共振点付近の運動のように浮体の運動速度が水粒
子速度に比べて非常に大きい場合、即ち $u-\dot{\theta}L=-\dot{\theta}L$ が成立するような条件
の下では(1)式は次式のように簡略化されるため、非線型項を準線型化すること
によって面倒な計算を行うことなく解は解析的に求まることになる。

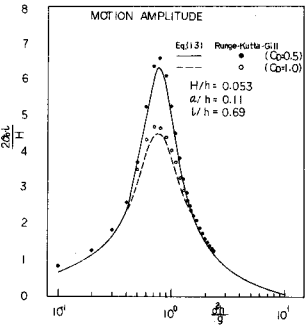


図-2 解析解と数値解
の比較

$$(I+I')\ddot{\theta}+C_2L^2\dot{\theta}+C_2L\theta=F_xL \tag{13}$$

一方、非線型微分方程式を数値計算によって解く方法には種々のものがあるが、ここではルンゲ・クッタ・ジ
ル法によって解を求める。例えば、(13)式は次式のように1階の連立方程式に置き換えられる。

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= \frac{1}{(I+I')} \{ -C_2L^2y_2 - C_2Ly_1 + F_xL \} \end{aligned} \tag{14}$$

ここで $y_1=\theta$ 、 $y_2=\dot{\theta}$ であるしたがって初期条件を適当に設定して数値計算を行えば、運動振幅の時間歴は
逐次計算できる。図-2には線型化法(13)式と数値計算法(14)式による計算結果の比較を示す。数値計算法におい
ては初期条件は $t=0$ で $y_1=y_2=0$ とした。ピーク付近で多少の差異はあるが、両者はほぼ一致することが
わかる。

3. 不規則波中の応答解析

不規則波中の非線型運動の解析法は既にいくつか提案されているが、ここでは合田ら⁴⁾と同様に規則波中の
応答解析に用いた数値計算法を適用する。この方法では所定のスペクトル形状をもつ入射波のスペクトルから
波強制力をシミュレートした後、規則波中の応答解析と同様にルンゲ・クッタ・ジル法によって運動の時間歴

を逐次計算するものである。不規則波中の応答解析では後に述べる規則波中の応答解析結果から、共振時の浮体の運動速度は水粒子速度に比べて大分大きいこと、また線型減衰係数も小さいことが確かめられたため、基本式として(4)式を使用した。

入射波のスペクトルが与えられた場合に表面波形や水粒子速度、加速度をシミュレートする方法はいくつかあるが、本解析では線型重ね合わせ法を用いる。いま、表面波を互いに位相関係のない成分波の線型重ね合わせとして定義すれば、時刻 t の表面波形は次式で表現できる。

$$\eta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi f_n t + \epsilon_n) \quad (15)$$

ここで、 A_n , f_n , ϵ_n はそれぞれ n 番目の成分波の振幅、周波数及び $(0 \sim 2\pi)$ の間で一様な確立で分布する位相である。このとき、水平方向の水粒子加速度は次式で与えられる。

$$\ddot{u}(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (2\pi f_n)^2 \frac{\cosh kn(\ell+z)}{\sinh knh} \sin(2\pi f_n t + \epsilon_n) \quad (16)$$

ここで、 $(2\pi f_n)^2 = kn g \tanh knh$ である。

したがって、不規則波中においても球体に作用する水平方向の波強制力は規則波中と同様に、水粒子加速度に比例する慣性力のみで表現できるから、次式のようになる。

$$F_x(0, t) = \frac{4}{3} \rho \pi a^3 C_M \sum_{n=1}^{\infty} A_n (2\pi f_n)^2 \frac{\cosh kn\ell}{\sinh knh} \sin(2\pi f_n t + \epsilon_n) \quad (17)$$

ここで C_M は慣性力係数であり、完全な球形浮体の場合には 2-2 で述べたように本解析においても $C_M = 1.5$ である。また、成分波の振幅 A_n は表面波スペクトルのエネルギー密度から計算できる。したがって、波強制力が(17)から計算されると、(14)式から不規則波中の運動は逐次計算できることになる。係留力に関しても鉛直方向の波強制力と運動から同様に計算できる。

表-1 模型諸元と静水中動揺実験結果

	MODEL		Submerged Buoy Wave Meter
	I	II	
WEIGHT (g)	1930	434	1 ton
NET BUOYANCY (g)	2260	384	1 ton
MOORING DEPTH (cm)	66	58	10 m
NATURAL PERIOD(sec)	2.10	2.55	10~12 sec
DAMPING CONSTANT	0.0478	0.0445	—

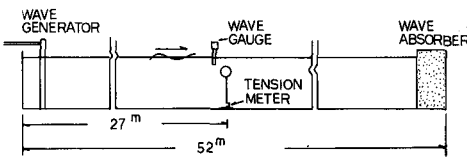


図-3 実験装置

4. 模型実験及び現地実験

規則波中の応答特性を調べ計算結果と比較するために2種の模型を用いた模型実験を実施した。実験に使用した模型の諸元は表-1に示す通りである。(I)型は径20cmのはほぼ完全な球形であるが、(II)型は不規則波中の応答解析結果の検証に使用する海中ブイ式波浪計⁵⁾の1/15縮尺の模型で径は約12cmである。実験に使用した係留索は(I)型が3mmの鋼線、(II)型が模型換算されたチェーンである。実験は主として図-3に示す水槽で実施し、水深は約1mで一定とした。浮体の運動は浮体内部に取付けた電球もしくは目印を8mmカメラで撮影した後、運動振幅を読みとることによって測定した。静水中動揺実験も同様な方法で実施した。また、係留力はヒズミゲージを張付けた張力計によって測定した。

不規則波による球形浮体の応答データは1977年3月から断続的に実施してきた海中ブイ式波浪計の現地実験によって得られたものを使用した。この波浪計は図-4に示すような構成となっているが、ブイ本体は完全な球形ではない。このブイ本体の中には水圧変動測定のための水圧センサー、動揺角測定のための2成分傾斜計、それに方位計が搭載された。張力計は係留索の中間に設置された。解析に使用したデータは2時間毎15分間に得られた観測記録である。

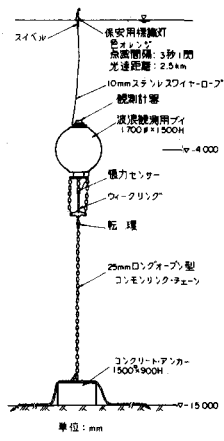


図-4 海中ブイ式波浪計

5. 計算結果と実験結果の比較

規則波中の結果 — 表 1 に示

した静水中動揺実験結果からわかるように 2-3 の方法で求められた(I), (II)型の線型減衰定数はかなり小さいことから、本解析で行ったような型式の球形浮体では抵抗モーメントは大部分粘性抵抗力に起因することがわかる。このことは図-5, 6 に示す(I), (II)型の運動に関する計算値と実験値の比較からも明らかである。なお、図-5, 6 では水平変位を波高 H で除した無次元値で表現している。図-5 は(I)型の場合であるが、 $C_D=0.5$ とすればここで示した解析法によって共振点付近の運動までうまく推定できることがわかる。また、式(1)と(3)の違いもそれほど大きなものでないことも確かめられる。図-5 においては固有周期の $\frac{1}{2}$ 周期のところでも明瞭なピークが認められるが、このときの運動は単純な振り子型の単振動ではなく、2 度揺れを生じるような運動であった。この原因は明らかでなく、現在検討中である。図-6 は(II)型の場合である。(II)型においては形状の関係から、(9) 式から計算される付加質量が球形の場合に比べて約 1.4 倍と大きくなっているが、波高の違いによる運動振幅の変化特性は計算値と実験値ではよく一致している。(II)型では、固有周期の $\frac{1}{2}$ 周期のところでは特にピークは認められない。位相差の計算結果も示しているが共振点付近を除けば $\pm \pi/2$ に近くなることがわかる。図-7 に示した係留力に関しても共振点付近を除き計算値と実験値はよく一致している。このことは共振点付近を除けば慣性力が支配的であることを示している。共振点付近では固有周期が短い場合ほどその差が大きくなっているが、振動流中の実験結果⁶⁾から判断しても、 C_D , C_M の値はそれほど大きな値になるとは考えにくく、また(2) 式において、左辺の項に付加質量まで加えた解析を行っても図-7 の結果と大きな差は認められないことから、実験方法も含めて今後さらに検討する必要がある。

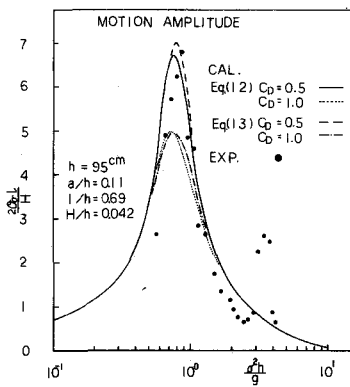


図-5 計算値と実験値の比較 (I 型)

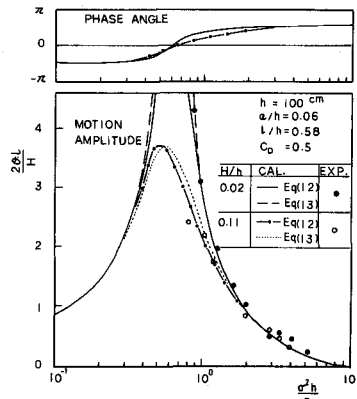


図-6 計算値と実験値の比較 (II 型)

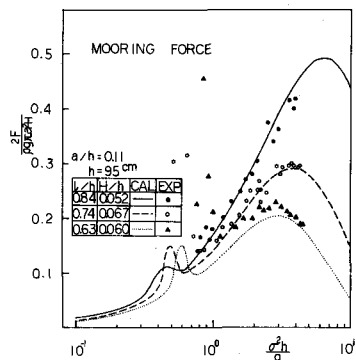


図-7 計算値と実験値の比較 (I 型)

不規則波中の結果 — 得られた観測記録の中で、波高が最も大きいケース (図-8, 9) と風波とともに固有周期に近い波が来襲していたケース (図-10, 11) について、 C_D は 0.5, C_M は運動の場合(9)式から得られた値 (1.906) を用いて計算した結果と実験値を比較した結果を以下に示す。この波浪計では表面波を水压センサーで測定する方式であるため、水压スペクトルを表面波スペクトルへ換算した後、4 で述べた計算を実施した。水压から表面波への換算には微小振幅理論を使用し、換算係数 n は 1 とした。また水压記録の高周波数側に含まれるノイズの影響を除くために、表面波スペクトルの高周波側を f^{-4} あるいは f^{-5} に比例する形で近似した。図-8, 10 からわかるように線型重ね合わせ法によってシミュレートされた表面波のスペクトルは設定スペクトルとよく一致している。この計算においてはスペクトルの分割個数は 55 個とした。4 で述べた数値計算法では波が一方から進入してくる場合を対象としているため、実際の海の波のように方向分散性もつ波を対象とする場合には、この仮定が成立しているかを確かめておく必要があるが、ここでは単純に計算結果と実験値を比較し、エネルギー密度のオーダ的な比較を行うこととする。参考までに図-12 に浮体の運動方向の頻度分布を示すが、これは傾斜計と方位計から計算されたものである。図-9, 10 から明らかなよう

に運動の計算値と実測値のスペクトルは形状的にはよく一致しているが単1方向の来襲波と考えられる図-9の場合においても計算値は実測値に比べて少し小さい。しかし固有周期($f=0.1$ Hz程度)付近の運動についてはよく一致している。0.2 Hz以上の高周波数側で一致の程度がよくない原因は、計算方法にも多少の問題はあるが、センサーの測定精度も影響していると考えられる。特に傾斜計は振り子型のものを使用したために測定精度はそれほど高いものではない。係留力については、図-11の共振点付近を除いて $C_M=1.5$ とした計算値でよく一致している。これは鉛直方向で考えるとブイはほぼ球形とみなせるためと考えられる。また図-9の水圧と係留力の位相差をみるとほとんどの周波数で

$-\pi$ だけずれており、慣性力が支配的であったことが明らかである。共振点付近では規則波中と同様に実測値が大きくなる傾向が認められる。

6. 結 言

これまで述べたように本論文で示した解析方法によって海中に1点緊張係留された球形浮体の規則波及び不規則波中の運動と係留力は大略推定できるが、共振時の挙動に関連していくつ

かの点で説明できない事柄が残されている。これらの点については検討中であり、別途報告する予定である。

参 考 文 献

- 1) たとえば, Harleman, Donald R.F. and Shapiro, William C.: The Dynamics of a Submerged Moored Sphere on Oscillatory Waves, Proc. of 7th Conf. on Coastal Eng., 1960, pp. 746~765
- 2) 田才福造: 浮遊構造物に働く流体力とその運動について, 九州大学応用力学研究所, 1971
- 3) 大串雅信: 理論船舶工学(下), 海文堂
- 4) 合田良実・鈴木康正・蜂須賀和吉: 直立式円筒浮体の波浪中の動揺振幅に関する研究, 港湾技術研究所報告, 第17巻第4号, 1978, pp. 89~120
- 5) 橋本宏・山口修: 海中ブイ式波浪計による波浪観測, 第25回海岸工学講演会論文集, 1978, pp. 60~64
- 6) Sarpkaya, T.: Forces on Cylinders and Spheres in a Sinusoidally Oscillating Fluid, Jour. of Applied Mech., 1975, pp. 32~37

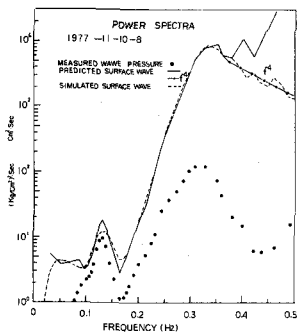


図-8 表面波のスペクトル(1)

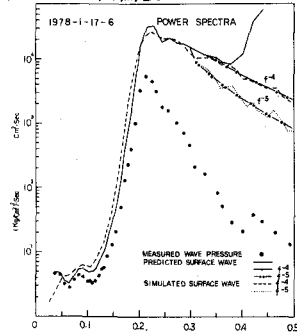


図-10 表面波のスペクトル(2)

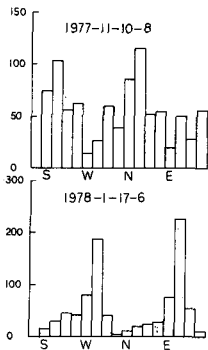


図-12 運動方向

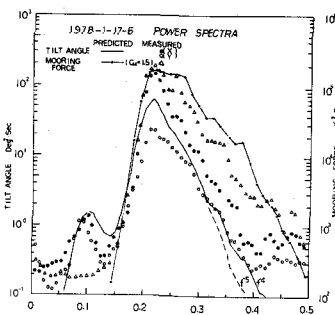


図-9 計算値と実測値の比較(1)

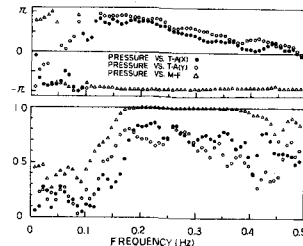


図-11 計算値と実測値の比較(2)