第25回水理講演会論文集　1981年２月

Marked Point Process モデルによる降水量時系列の解析

Stochastic Analysis of Precipitation Series by Means of Marked Point Process Model

近畿大学理工学部　正員　○西村　克己
近畿大学理工学部　正員　　江藤　剛治

1. はじめに

本研究では marked point process (compound stochastic process)モデルによる、日～月単位の降水量の確率分布と日降水量の時系列特性の解析を行った。marked point process については、水理・水文学の分野でも、降水量時系列の解析や移動床問題における砂粒子の移動に関する確率モデルなどにおいてしばしば用いられているが、適当な訳語が見当らなかったのでアルファベットのままで記すことにした。

降水量分布には種々の確率分布関数形があてはめられてきた。１時間、１日、半旬、…、年降水量と、降水量観測の時間単位 Δt の取り方によっても、そのつど分布式を変えてきた。これは、対象とする降水資料系列は同一でありながら、区切りとなる時間単位 Δt によってその分布形状が変わってしまうことになり、理論的に統一性を欠く取り扱いとなっている。もし降水事象の生起が純ランダムであり、１降水事象当りの降水量もランダムに分布すると仮定すれば、marked point processによる降水量時系列のモデル化が可能になり、時間単位によらず同一の確率分布関数による降水量の確率分布の表示が可能となる。しかしながら降水事象あるいは降水の生起しやすい気象状況には数時間～数１０時間の持続性があり、上記のランダム性の仮定は厳密には成り立たない。時間単位 Δt がこの持続性に比べて十分大きいときは、ランダム仮定が近似的に成立し、したがって各時間単位の降水量の確率分布は統一的に表現されると予想される。次章ではまず marked point processを仮定したときの、降水量の確率分布関数の最尤推定法を示す。この分布関数形の実測降水資料への適合度を調べるとともに、他の分布関数形との適合度の比較を行った。次に種々の時間単位の降水量資料に対して、この分布関数をあてはめ、数日以上の時間単位の降水量の確率分布の各母数は、時間単位にかかわらずほぼ一定になることを示した。

降水量の時系列特性については、たとえば日降水量は時系列的に独立な系列をなし、ホワイト・ノイズ的であるとみなしうる、などの報告例がある。著者らはこのような解釈には懐疑的である。単純に積率相関係数（通常の相関係数）を用いるならば、日降水量の自己相関係数は、時差１日の場合でもほぼ０となる。これは降水量時系列のごとく、間欠的な時系列をなし、強く歪んだ確率分布を持つ変動に対して、連続な正規過程に基礎を置く通常の相関係数を適用したことにより得られた結果にすぎない。著者らは、このような時系列に対して、降水事象（乱れている）か無降水事象かという点のみに着目し、降水時における乱れや分布の歪の効果を取り除いて時系列特性を解析する方法を採用してきた（室田・江藤１９７８）。後に示すように、この方法によれば、日降水量時系列にかなり強い持続性が認められる場合がある（夏期）のみならず、春秋期には周期数日程度の周期性らしきものも検出される。このような性質を説明するために、marked point process に次のような考え方を導入した。降水あるいは降水事象の生起のしやすさは、marked point process における降水事象生起時刻のまわりに分布する。その継続時間は互いに独立でかつ降水生起時刻とも独立に確率分布する。このときの降水量時系列の自己相関係数の理論値と、実測日降水量時系列のそれとを比較検討した。

2. 降水量の確率分布

降水量時系列は、近似的には降水事象の生起がランダムであり、かつ１降水事象当りの降水量がランダムに分布するというmarked point processをなすとみなせる。このような確率モデルはEinstein によって移動床上の砂粒子の移動の解析において用いられた。その後、水文量や移動床問題の確率統計的解析に用いられたが、Todorovic（1969)によってかなり一般的な場合に対する理論づけがなされた。Todorovic の理

論は，事象生起確率が非定常に変動する場合にまで拡張されたが，量の確率分布関数は時間に関して変化しないという条件のもとに展開されている。最近では量の確率分布が周期的に変化する場合に対しても，理論の拡張が試みられている（ North 1980 ）。実用的には，極値分布の理論と応用において大きな成果が見られたが （Zelenhasic 1970，North 1980など），ある時間単位内の総降水量の確率分布等については限られた成果しか示されていない（ Eagleson 1978等）。一方時系列特性については，marked point process に線形フィルターをかけて得られる系列の特性等が理論的に研究されている。よって本章では，ある時間単位 Δt 内の降水量の確率分布について，marked point process の立場から検討を加える。

（１）理論

降水事象の生起は純ランダムであるとすれば，単位期間内の降水事象生起回数はポアソン分布に従う。

$$P(\nu) = e^{-\Lambda} \cdot \Lambda^{\nu} / \nu! \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots, \infty) \qquad (2.1)$$

ここに ν は単位時間内の降水事象生起回数，Λ は同平均生起回数。

各降水事象に対する総降水量分布はガンマ分布で近似できるものと仮定する。すなわち，

$$g(x) = \beta^{\alpha} / \Gamma(\alpha) \cdot \chi^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x} \qquad (x \geqq 0) \qquad (2.2)$$

ここに x は一雨降水量，$g(x)$ は x の確率密度関数，α，β は $g(x)$ の母数。

単位時間内に ν 回降水事象が生起すると，その間の総降水量は ν 個の x の和分布となる。ガンマ分布の再生性より，ν 個の x の和分布の尺度母数は β，形状母数は $\nu\alpha$ となる。すなわち，その確率密度関数は，式（２．２）で α を $\alpha\nu$ で置きかえたものとなる。これに式（２．１）を重みとして乗じ，$\nu = 1 \sim \infty$ で加えれば単位時間内の総降水量の確率密度関数となる。これを降水確率 $P(\nu \geqq 1) = 1 - e^{-\Lambda}$ で割って，

$$f(x) = \frac{1}{e^{\Lambda} - 1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Lambda^{\nu}}{\nu!} \cdot \frac{\beta^{\alpha\nu}}{\Gamma(\alpha\nu)} \cdot \chi^{\alpha\nu-1} \cdot e^{-\beta x} \qquad (2.3)$$

よって，式（２．３）は降水条件付確率密度関数となっている。この尤度方程式を求めると，

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{f} \sum_{\nu=1}^{\infty} (h \cdot a_{\alpha}) = \sum_{i}^{N} \frac{1}{f} \sum_{\nu=1}^{\infty} (h \cdot a_{\beta}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{f} \sum_{\nu=1}^{\infty} (h \cdot a_{\Lambda}) = 0 \qquad (2.4)$$

ここに，$h = \frac{1}{e^{\Lambda}-1} \cdot \frac{\Lambda^{\nu}}{\nu!} \cdot \frac{\beta^{\alpha\nu}}{\Gamma(\alpha\nu)} \cdot \chi^{\alpha\nu-1} \cdot e^{-\beta x}$，

$$a_{\alpha} = \nu \{ \log \beta x - \Psi(\alpha\nu) \}, \qquad a_{\beta} = \frac{1}{\beta} (\alpha\nu - \beta x), \qquad a_{\Lambda} = \frac{\nu/\Lambda(e^{\Lambda}-1) - e^{\Lambda}}{(e^{\Lambda} - 1)}$$

以上は降水事象の生起確率が非定常的に変化する場合についても成立する。ここに Ψ はディ・ガンマ関数である。

比較のために，同じ３母数の確率密度関数である超ガンマ分布，および実用上良く用いられるガンマ分布と比較して実測資料に対する適合度の検討を行う。超ガンマ分布の確率密度関数は，

$$f_H(x) = \frac{\beta^{\alpha/\gamma} \cdot \gamma}{\Gamma(\alpha/\gamma)} \cdot \chi^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x^{\gamma}} \qquad (2.5)$$

尤度方程式は，$\alpha G - \Psi(\alpha/\gamma) + \log \beta = \beta\gamma H - \alpha = \beta\gamma I - \alpha G - 1 = 0$ （２．６）

ここに，$G = \sum_{i=1}^{N} \log x_i / N$，$H = \sum_{i=1}^{N} x_i^{\gamma} / N$，$I = \sum_{i=1}^{N} (x_i^{\gamma} \log x_i) / N$

ガンマ分布では $\gamma = 1$ とおき，上式の前２式より母数推定を行えばよい。超ガンマ分布を最尤法を用いてあてはめた例はほとんどない。これは尤度方程式を解くことが，通常めんどうであることによるものと思われるが，上の尤度方程式を良く観察すると α，β が簡単に消去でき，γ のみに関する１変数の方程式となる。よってディ・ガンマ関数表が手元にあれば，（２．５）の実測資料へのあてはめは，他の分布のあてはめ，あるいは積率法による超ガンマ分布のあてはめに比べて，特にめんどうにはならない。

（２）日降水量の確率分布

大阪の日降水量資料（1901年～1970年）に，ガンマ分布，超ガンマ分布，marked point process にもと

づく複合分布をあてはめ、適合度の検討を行った。日降水量資料中には数多くの0.0 mm／day降水量があるので、無降水以外の日の降水量には全て0.01 mm／dayを加えた。あてはめの例（3月）を表－1，図－1に示す。また適合度検定の結果を表－2に示す。これらの図表より次の結論が得られる。

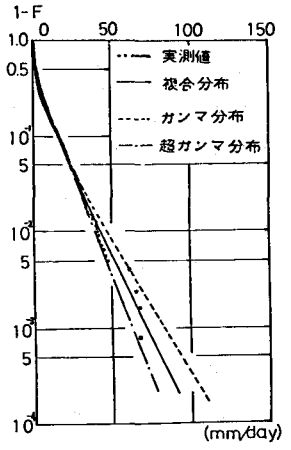
表－1　母数（3月 日降水量）

分布＼母数	α	β	Λ/γ
ガンマ分布	0.312	0.057	—
複合分布	0.113	0.072	3.386
超ガンマ分布	0.291	0.011	1.420

i．適合度は良い方から、超ガンマ分布，複合分布，ガンマ分布の順である。

ii．非常に小さい降水の生起確率の大きい冬期では、超ガンマ分布の母数は求まらない。これらの月に対しては、他の分布形の適合度もやや劣る。

以上より、marked point processより導かれる複合分布は、適合度という点からは日降水量の確率分布形として適当なものであることがわかる。



図－1　W(x)＝1－F(x)（3月）

（3）独立仮定の適用限界

降水事象、あるいは降水の生起しやすい気象状況には数時間～数10時間の持続性がある。よって日降水量を、完全な独立仮定に基礎を置くmarked point processでモデル化することには無理がある。時間単位が旬～月と、比較的大きいときには、1連続降水が2以上の期間にまたがって降る確率が小さくなるので、marked point process にもとづくモデルの近似度が高くなるものと予想される。この場合時間単位の取り方で変わるのは、単位時間内の平均降水事象生起回数Λのみである。1降水事象当りの降水量分布の形状母数α、尺度母数β等は変わらず、したがって、平均μ，標準偏差σ等も一定である。また

$$\Lambda = \lambda \Delta t \qquad (2.7)$$

とおけばλもΔtにかかわらず一定となる。生起確率が非定常に変化するときは　$\Lambda = \int_0^t \lambda(s)\,ds$　。

表－2　適合度検定（危険率α＝5％）

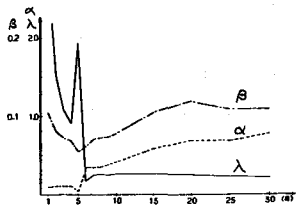
○----適合　△----棄却

月＼分布	ガンマ分布	複合分布	超ガンマ分布
1	△	△	X
2	△	△	X
3	△	○	□
4	△	(△)	□
5	○	○	□
6	○	○	□
7	○	○	□
8	○	○	X
9	○	○	□
10	○	○	□
11	△	○	□
12	△	△	X

□---母数が求まる　X---求まらない

図－2に大阪1月の資料について、Δt ＝1日～30日に対するα，β，λの値をプロットしている。λはΔt ＝6日以下では、Δt 増加とともに急減するが、それ以上ではほぼ一定となり、上記の予想が正しいことを示している。Δt≧15日ではα，βもほぼ一定となる。

各月に対して、λがほぼ一定となるときの時間単位Δt*、ほぼ一定値になったときのα，β，μ，σの値を整理して、表－3に示した。Δt*に対しては λ＝0.15～0.63 程度となるが、これは降水事象の発生しやすい気象状況は10日に2　～6度程度となることを意味しており、常識的に予想される値にほぼ一致しているものと考えられる。αは1よりやや小さい値となるので、1降水事象あたりの降水量の確率分布形は、指数分布（α＝1）よりもさらに若干左に歪んだ分布形となることがわかる。



図－2　時間単位と母数の関係

Todorovicは米国のいくつかの観測点の降水量資料を解析し、次の結論を得ている。1降水事象当りの降水量の確率分布は、季節に関してそれほど大きく変化しない場合が多い。降水量の季節変化は主として、季節により降水生起確率が大きく変化することによる。大洪水の生起がある季節に集中するのもこのような理由による。大阪の降水量について

表－3　Δtが大の時の母数の値

月	α	β	μ	σ
1	0.685	0.119	5.76	6.96
4	1.033	0.124	8.30	8.17
7	0.208	0.013	15.76	34.52
11	0.460	0.084	5.50	8.12

は、夏期（６～８月）において他の月と異なった傾向が見られる。

3. 日降水量の時系列的特性

（1）テトラコリック相関係数

前章で述べたように、降水事象の生起しやすい気象状況は、数時間～数10時間継続する。このとき当然日降水量時系列にも何らかの持続性が見られるはずであるが、日降水量時系列について単純に自己相関係数を計算すると、時差１日の場合でもほぼ０となる。これは日降水量の確率分布形が、指数分布よりもさらに歪の大きい逆Ｊ字型分布になること、および降水の生起しやすい気象状況下、あるいは降水条件下では新たな乱れが付加され、時系列相関が小さくなるためであると思われる。よって降水事象か無降水事象かのみに着目して解析することにすれば、上記の分布の歪や、降水条件下での付加的乱れの影響を除いて、気象状況に対応する比較的大きな変動のみの時系列的特性を抽出して解析することができる。降水事象・無降水事象のごとく２値の変数からなる系列の相関の強さを測る指標として、数種の指標が提案されているが、著者らはこれまでテトラコリック相関係数を用いてきた。その考え方は以下のごとくである。現実に現われた属性の裏には正規分布的な変動をする潜在的な変動成分があり、これがある閾値以上か、以下かで２つの属性のうちのいずれかが現われると仮定する。２次元の関連表からこの値を近似的に求める式（安田他１９７７）も与えられているし、より正確な値を計算するためのプログラム（ＩＢＭ１９７０）も用意されている。

大阪の日降水量資料について、テトラコリック相関係数を求めたものを図－３に示している。相関係数の時差に関する関数形は季節によって３タイプに分類できる。

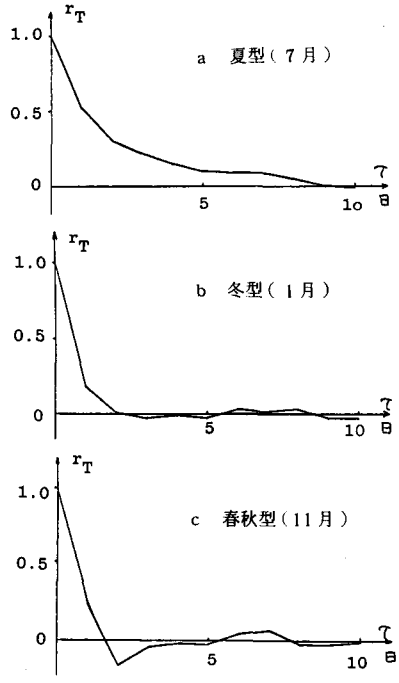
ⅰ．夏型（７，８月）：時差１日の自己相関係数（ただしテトラコリック相関係数，以下同じ）が0.4～0.5程度と比較的大きく、時差が大きくなるとき０に漸近する。

ⅱ．冬型（１，２月）：時差１日の相関係数は0.2程度で、時差２日以上では０となる。

ⅲ．春秋型（３～５，９～12月）：時差１日の相関係数は、0.15～0.35で、時差２日では－0.05～－0.2と負値をとる。

ⅳ．６月：時差１日では0.437となるが、時差２日以上では０となる。

上記の月の分け方は、通常の季節割りとは若干異なったものとなっている。また６月については、夏型のごとく、時差２日の相関係数を正にする要因と、春秋型のごとく、負にする要因とが相殺しあって、時差２日の相関係数が０になっているものと推察される。この意味で、夏型と春秋型の中間型とみなすことができる。



図－３ テトラコリック自己相関係数

以上の結果のうち、夏型で日降水量時系列にある程度の持続性が見られること、春秋型で時差２日の相関係数が負になる点が注目に値する。この負の相関係数については、その算出のもとになった２次元関連表を用いて、χ^2検定により無関連とみなしうるかどうかの検定を行った。その結果春秋型に属するほとんどの月において、危険率$\alpha=1\%$で無関連とはみなしえないという結果を得た。このような負値が生ずる原因としては、次のようなものが考えられる。春秋期について、

ⅰ．日降水量時系列に周期数日程度の周期成分が含まれている。

ⅱ．降水事象は一度生起すると、数日間は生起しにくいという性質がある。

上記の２つの考え方は相互に関連している。たとえば後者は、前者の周期変動を引き起す要因となる。ただ数学モデルとしては、表面上異なったものとなる。

（２）事象の持続性を導入したmarked point processの１理論

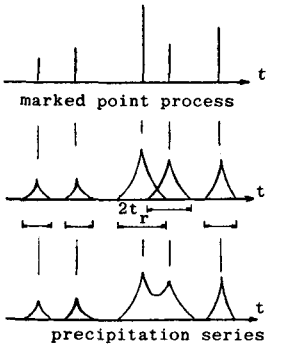
前章・前節で指摘した降水量時系列における持続性を再現しうるようなモデルを考える。これまで研究されてきたモデルは，marked point process に線形フィルターをかけるというモデルである（たとえばWeiss 1977）。このモデルは降水量時系列の解析には適さない。なぜならこのモデルによれば，たとえば降水継続時間はフィルター長と等しくなり，常に一定である。この性質は降水量時系列の特性としては不都合な性質である。流量時系列の解析・シミュレーションなどに適用するときは，流出機構によって付与される持続性（時定数，一定）が平均降水継続時間に対して十分大きいという条件のもとに，このような考え方が妥当であるとみなしうる。ここでは降水量時系列の解析を目的としているので，以下に述べるように降水継続時間が確率的に分布するという考え方を導入した。

モデルの概念的な説明を図－４に示している。次の基礎仮定を置く。

i. 降水事象の発生は純ランダムである。

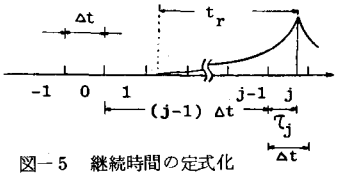
ii. 降水継続時間（降水の発生しやすい気象状況の継続時間）は互いに独立，かつ生起時刻にも独立に確率分布する。

ここでは降水量については取り扱わない。よっていまのところ，降水量と降水継続時間の相関関係などについても考慮する必要はない。また上記 i. の仮定より，降水・無降水事象時系列の自己相関係数において，前節で指摘したような負の値が出現する可能性は全くない。これらは次の段階の研究テーマである。



図－４　継続時間の導入

まず単位期間内の無降水確率 P(D) を求める。降水継続期間を０とするときは（marked point process），ポアソン分布の式（２．１）で$\nu = 0$とおくことにより，$P(D) = e^{-\Lambda}$ となる。図に示すように降水継続時間の1/2を t_r とする。第 j 期間の，期間の始点から τ_j 後に降水事象がただ１つ生起するとき，この降水によって，第０期間が降水事象とならない確率 q'_j は，$f_t(t_r)$ を t_r の確率密度関数として，



図－５　継続時間の定式化

$$q'_j = \int_0^{\tau_j+(j-1)\Delta t} f_t(t_r)\,dt_r \qquad (3.1)$$

第 j 期間内に中心を持つ降水事象の，中心の生起時刻$\{(j-1)\Delta t + \tau_j\}$ は，$((j-1)\Delta t,\ j\Delta t)$ の間に一様に分布する。よって q'_j の期待値 q_j は，

$$q_j = \int_0^{\Delta t} (1/\Delta t)\cdot q'_j\,d\tau_j \qquad (3.2)$$

第 j 期間に中心を持つ降水事象生起回数が０～∞のとき，それらのいずれの降水によっても第０期間が降水事象とならない確率は$\{P(0)\cdot q_j^0 + P(1)\cdot q_j^1 + P(2)\cdot q_j^2 + \cdots\cdots\}$，ここに $P(\nu)$ は式（２．１）で表わされる。（－j）区間の降水による寄与も同一の式で表わされ，かつ第０期間に降水事象（の中心）が生起しない確率は$P(0)$になることを考慮すると，$p_j = 1 - q_j$ として，

$$P(D) = e^{-\Lambda}\prod_{j=1}^{\infty}\Big\{\sum_{\nu=0}^{\infty}P(\nu)q_j^{\nu}\Big\}^2 = e^{-\Lambda}\prod_{j=1}^{\infty}\Big\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{e^{-\Lambda}\Lambda^{\nu}}{\nu!}\cdot q_j^{\nu}\Big\}^2 = \exp\Big\{-\Lambda\Big(1+2\sum_{j=1}^{\infty}p_j\Big)\Big\} \qquad (3.3)$$

これ以上計算を進めるためには，t_r の確率密度関数 $f_t(t_r)$ について適当な関数形を仮定する必要がある。仮に t_r が指数分布に従う場合を考える。

$$f_t(t_r) = \beta_r e^{-\beta_r t_r} \qquad (3.4)$$

ここに $\beta_r = 1/\mu_r$ ，μ_r は t_r の期待値。

このとき式（３．３）は非常に簡単な形に整理できて，

$$P(D) = \exp\Big\{-\Lambda\Big(1+\frac{2}{\Delta t\cdot\beta_r}\Big)\Big\} = \exp\{-\Lambda(1+2\mu_r/\Delta t)\} \geqq \exp(-\Lambda) \qquad (3.5)$$

等号が成立するのは $\mu_r = 0$（marked point process）のとき。

j，j′ 期間（j > j′）について，ともに無降水事象となる確率 P(D, D)，j 期間が無降水事象で，j′

期間が降水事象である確率P（D，W）、同じくP（W，D）、P（W，W）等についても同様な考え方により、（Λ，μr，Δt）の式として表わすことができる。これらの確率は図－6に示す関連表を構成し、これより時差（$j-j'$）のテトラコリック自己相関係数を評価することができる。しかしながら式形はかなり複雑となるので、ここでは呈示しない。

P(D,D)	P(D,W)
P(W,D)	P(W,W)

図－6　降水・無降水確率の関連表

（3）実測資料への適用

前節の理論を大阪の日降水量資料に適用した。まず無降水確率と、降水事象の平均継続時間について検討する。たとえば図－2で、Δt≧6日に対して平均的な単位期間当りの平均降水回数λが求まる。日単位では、Δt＝1であるから　Λ＝λ。ここで次の点に注意すべきである。こうして求めたλの値は、降水条件つきの降水量確率分布形のみから求めたものであり、実測降水量時系列資料の持つ降水継続時間、自己相関特性．降水確率等とは全く独立に求められたものである。一方日降水量資料より無降水確率P（D）が求まる。このP（D）は、降水継続時間 tr ＝0と仮定したときの理論的な無降水確率 exp（−Λ）よりやや小さい値となるはずである（式（3．5））。この条件が満たされるとき式（3．5）よりP（D）と Λ から降水事象の平均継続時間2μ_rを求めることができる。

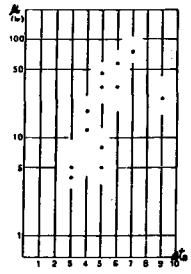
表－4　無降水確率・継続時間

月	Λ	exp(-Λ)	P(D)	2μr(hr)
1	0.248	0.780	0.498	43.5
2	0.257	0.773	0.439	52.9
3	0.475	0.622	0.430	18.6
4	0.617	0.540	0.477	4.8
5	0.551	0.576	0.522	4.3
6	0.576	0.562	0.422	11.9
7	0.372	0.689	0.465	25.4
8	0.146	0.864	0.547	75.2
9	0.369	0.691	0.419	32.6
10	0.519	0.595	0.538	4.7
11	0.428	0.652	0.568	7.7
12	0.244	0.783	0.561	32.9

表－4にこうして求められたΛ，exp（−Λ），P（D），2 μ_r を示している。上記の条件は全て満たされている。2μ_rについては4～75時間となっている。これは降水継続時間の期待値としては大きすぎる。降水の生起しやすい気象状況の継続時間の期待値と解釈すべきであろう。それでも2～3の月についてはやや大きすぎると思われる。

次に図－2で、λが急減してほぼ一定値となるときのΔt_*と μ_r を比較する。μ_r が大きいほどΔt_*は大きくなるものと考えられる。図－7に結果を示す。7月を除いてはこの予想がおおむね成り立っている。

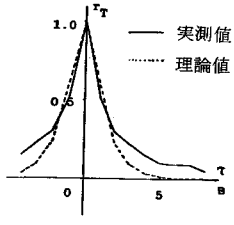
次に自己相関係数について（Λ，μ_r）から理論的に計算された関数形と、実測のそれとを比較した。結果は図－8に示されている。図－8には比較的うまくあっている例を示しているが、それでも理論値と実測値の適合度は全く不十分であると言わざるをえない。特に4月の時差2日における負値は全く再現されていない。日本の春秋期における天気は、北極から張り出した高気圧の、比較的低圧部が数日おきに日本上空を通過するために、周期1週間程度の周期成分を持つという説がある。図－8bには、北緯50度・東経90度の11月の500mb高度場について、傾向成分を取り除いたものの自己相関係数を並記している。これには周期約6.5日の周期成分が見られる。



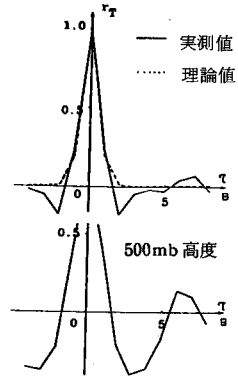
図－7　Δt_*と継続時間

謝辞　本研究を行うにあたり近畿大学大学院学生の林安宏氏の多大なる協力をいただいた。記して感謝の意を表する次第である。

［**参考文献**］　安田・海野；社会統計学改訂2版，丸善，1977
室田・江藤；土木学会論文報告集、第270号，1978年2月
IBM；SSP，5th ed.，Aug.，1970.
Todorovic，P. et al.；CSU Hydrol. Pap.35，1969.
Zelenhasic，E.；CSU Hydrol. Pap.42，1970.
Weiss，G.；WRR，Vol.13，No.1，Feb.，1977.
Eagleson，P.S.；WRR，Vol.14，No.5，Oct.，1978.
North，M.；Proc. ASCE，Vol. HY5，May，1980.



図－8a　自己相関係数の理論値と実測値（7月）



図－8b　同左（4月）