

有限幅の開水路の側壁におかれた垂直平板背後のはく離領域の形状について

Shape of Separation Region Formed Behind Vertical Plate on Side Wall of Open Channel with Finite Width

秋田大学 土木工学科 正会員 石井 千万太郎

1. はじめに

河川の流水中に河川工作物、あるいは障害物があると、流れは局所的に加速・減速され、構造物の背後にはく離領域が形成されるなど、複雑な流れとなるが、河床・河岸の安定を考える上で、その流況の把握が不可欠である。本研究は、その最も単純なケースとして、有限幅の開水路の側壁に垂直平板をおいた場合で、流れのFroude数が小さく、水深変化が比較的小さい常流遷移の場合を取扱っている。この流れの場を既存の境界層理論を用いて解析しようとするとき、平板背後のはく離領域の形状、つまり、主流域とはく離領域を区分する境界流線の決定が特に重要である。

本研究では、このはく離領域の形状を求めるために、二次元ポテンシャル流れの解析手法のひとつである、自由流線理論の応用を試みている。自由流線理論の適用にあたっては、その流れの境界の形状や条件に制限があるため、実際の流れを二次元ポテンシャル流としてモデル化するとき、その境界の形状や条件の設定には工夫を必要とした。

2. 流れの二次元モデル

有限幅の開水路の側壁におかれた垂直平板周辺の流れは、自由表面を持ち、厳密にはかなり三次元性の強い流れである。しかし、Froude数が小さく、平板長さ l に比し水路幅 B が比較的大きい場合に限定すると、水深変化が小さく、水深方向

(z -方向)に平均した流れは、水路方向(x -方向)と水路横断方向(y -方向)の二次元流れとすることができる。このとき、この流れと類似した、流体力学的に実現性のある二次元流れは、Fig.1 に示したものとなるであろう。しかしながら、実際には三次元である流れを水深方向に平均して得られる二次元流れは、Fig.1 の流れとは次に述べる点で異なることを留意する必要がある。第一に、Fig.1 の平板の上流の原境界層(original boundary layer)は、実際には水路床による境界層と側壁による境界層の相互干渉によって決まる、ある一定の幅 δ をもつ非一様流部であることである。

(Fig.2(a),(b)) したがって、非一様流部内の流速分布は、一般に乱流境界層内の流速分布と異なり、さらに、たとえ非一様流部の厚さ δ が同じであっても、水路床と側壁の粗度の組合せが異なることにより、その流速分布形状が異なることが予想される。(この事は、非一様流部の流速分布の特性が δ だけで表わされない事を意味している。) 第二に、Fig.1 の水路の主流部の大部分を占める非乱流ポテンシャル流領域(non-turbulent potential flow)は、実際には水路床による乱流境界層領域であり、乱れを含むと同時に三次元の渦あり運動である。しかしながら、渦運動は乱れの変動と同じようにランダムに起っており、時間的に平均した運動はしばしば渦なしと仮定することができる。¹⁾ ま

た本ケースのように、水深が他のスケールに比して小さい場合には、水路床に垂直な断面内だけで渦ありの運動であって、水路の水深方向に平均した二次元流れは渦なし運動と見ることが出来る。(Stokes のアナロジー、Shaw の経験)²⁾ このように、第二の点については、流れを時間平均し、さらに水深方向に平均

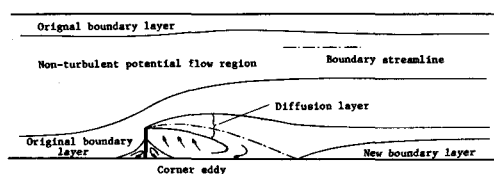


Fig.1 Two-dimensional flow model

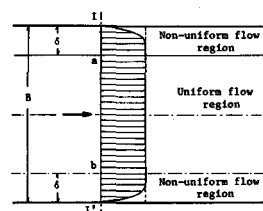


Fig.2

(a) Velocity profile at upper stream of flat plate

(b) Cross section of channel

1 Part influenced by side wall

2 Part influenced by channel bed

3. 渦なし流れの解析モデル

Fig.3 Physical plane

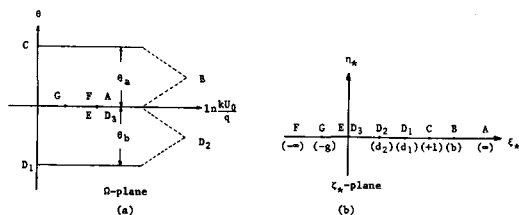


Fig.4 Mapping plane

そこで、自由流線理論を用いた解析から得られる、平板先端から出発する流線を下流側壁に reattach させ、実際の境界流線を近似させることを目的として、流れを Fig.3 のようにモデル化する。Fig.3 の解析モデルの要点は次のように説明される。

- 134—

4. 自由流線の方程式と定数計算式^{7),8)}

Fig. 8 で示されているモデル化された物理平面に対して、次式で定義される Ω - 平面が Fig. 4(a) で示される。

$$\Omega = \left| n \frac{KU_0}{q} + i\theta \right| \dots\dots\dots (1)$$

Schwart・Christoffel の変換式を用いると、 Ω - 平面の多角形の内部を ζ_* - 平面の上半面に写像する Ω と ζ_* の関係式は、

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\zeta_*} &= \frac{A(\zeta_* + g)}{(\zeta_* - b)(\zeta_* - d_2)\sqrt{(\zeta_* - 1)(\zeta_* - d_1)}} \\ &= \frac{A_1}{(\zeta_* - b)\sqrt{(\zeta_* - 1)(\zeta_* - d_1)}} + \frac{A_2}{(\zeta_* - d_2)\sqrt{(\zeta_* - 1)(\zeta_* - d_1)}} \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

となる。ここで、 A, A_1, A_2 は定数である。

そこで、 Ω - 平面における点 B と D_2 の外角はそれぞれ θ_a と θ_b なので、

$$A_1 = \pm \frac{\theta_a}{\pi} \sqrt{(b-1)(b-d_1)} \quad A_2 = \pm \frac{\theta_b}{\pi} \sqrt{(1-d_2)(d_1-d_2)} \dots\dots\dots (3)$$

を得る。ここで、(2) 式を積分し、(3) 式を代入すると、

$$\Omega = \pm \frac{2\theta_a}{\pi} \left| n \frac{\sqrt{(b-1)(\zeta_* - d_1)} + \sqrt{(b-d_1)(\zeta_* - 1)}}{\sqrt{(1-d_1)(\zeta_* - b)}} \right| \pm \frac{2\theta_b}{\pi} \left| n \frac{\sqrt{(1-d_2)(\zeta_* - d_1)} + \sqrt{(d_1-d_2)(\zeta_* - 1)}}{\sqrt{(1-d_1)(\zeta_* - d_2)}} \right| + B \dots\dots\dots (4)$$

となる。ここで、 B は積分定数である。

次に、 ζ_* - 平面の実軸 ξ_* 上の区間、 $(A, B), (B, C), (C, D_1), (D_1, D_2), (D_2, D_3)$ のそれぞれに対する(4)式中の符号と積分定数 B の値は、点 A, B, C, D_1, D_2, D_3 の Ω - 平面と δ_* - 平面の対応から決められるが、区間 (C, D_1) と (B, C) に対する Ω と ζ_* の写像関数は次式となる。

$$(C, D_1) : \Omega = -\frac{2\theta_a}{\pi} \left| n \frac{\sqrt{(b-1)(\zeta_* - d_1)} + \sqrt{(b-d_1)(\zeta_* - 1)}}{\sqrt{(1-d_1)(\zeta_* - b)}} \right| + \frac{2\theta_b}{\pi} \left| n \frac{\sqrt{(d_2-1)(\zeta_* - d_1)} + \sqrt{(d_2-d_1)(\zeta_* - 1)}}{\sqrt{(1-d_1)(\zeta_* - d_2)}} \right| - i\theta_b \dots (5)$$

$$(B, C) : \Omega = \frac{2\theta_a}{\pi} \left| n \frac{\sqrt{(b-1)(\zeta_* - d_1)} + \sqrt{(b-d_1)(\zeta_* - 1)}}{\sqrt{(1-d_1)(\zeta_* - d_2)}} \right| - \frac{2\theta_b}{\pi} \left| n \frac{\sqrt{(1-d_2)(\zeta_* - d_1)} + \sqrt{(d_1-d_2)(\zeta_* - 1)}}{\sqrt{(1-d_1)(\zeta_* - d_2)}} \right| + i\theta_a \dots (6)$$

Z - 平面 (物理平面) の内部が ζ_* - 平面の上半面に写像されたとなると、 Z - 平面での境界内部の x - 方向に向かう流れは、 ζ_* - 平面では原点に sink をもつ流れとなる。したがって、複素ポテンシャル W は、

$$W = \frac{U_0 B}{\pi} \left| n \frac{1}{\zeta_*} \right| \dots\dots\dots (7)$$

となる。ここで、 B は水路幅である。

自由流線 CD_1 上では、 $q = |dW/dZ| = KU_0$ なので、

$$KU_0 \left| \frac{dZ}{dW} \right|_{CD_1} = KU_0 \left| \frac{dZ}{d\zeta_*} \right|_{CD_1} / \left| \frac{dW}{d\zeta_*} \right|_{CD_1} = 1 \dots\dots\dots (8)$$

となり、そこで、

$$\left| \frac{dZ}{d\zeta_*} \right|_{CD_1} = \left| \frac{dZ_f}{d\xi_*} \right| = \left| \frac{dS_{fe} i\theta}{d\xi_*} \right| = -\frac{dS_f}{d\xi_*} \dots\dots\dots (9)$$

である。ここで、 $Z_f = x_f + iy_f$ で、 (x_f, y_f) は Z - 平面での自由流線の座標、 dS_f は自由流線に沿ってとられた線素である。

(8) 式に(7)式、(9)式を代入すると、

$$dS_f = -\frac{B}{K\pi} \cdot \frac{d\zeta_*}{\zeta_*} \dots\dots\dots (10)$$

を得る。このとき、自由流線 CD_1 に対して(5)式は次式のようにになる。

$$e^{i\theta} = \left\{ \sqrt{\frac{(b-d_1)(1-\xi_*)}{(1-d_1)(b-\xi_*)}} - i \sqrt{\frac{(b-1)(\xi_*-d_1)}{(1-d_1)(b-\xi_*)}} \right\}^{-\frac{2\theta_a}{\pi}} \times \left\{ \sqrt{\frac{(d_1-d_2)(1-\xi_*)}{(1-d_1)(\xi_*-d_2)}} + i \sqrt{\frac{(1-d_2)(\xi_*-d_1)}{(1-d_1)(\xi_*-d_2)}} \right\}^{\frac{2\theta_b}{\pi}}$$

ここで、

$$\beta_1 = \tan^{-1} \sqrt{\frac{(b-1)(\xi_*-d_1)}{(b-d_1)(1-\xi_*)}} \quad \beta_2 = \tan^{-1} \sqrt{\frac{(1-d_2)(\xi_*-d_1)}{(d_1-d_2)(1-\xi_*)}} \quad \dots\dots\dots (11)$$

とおくと、

$$\theta = \frac{2}{\pi} (\beta_1 \theta_a + \beta_2 \theta_b) - \theta_b \quad \dots\dots\dots (12)$$

さらに、

$$dx_f = \cos \theta dS_f \quad dy_f = \sin \theta dS_f \quad \dots\dots\dots (13)$$

なので、(10)式と(12)式を(13)式に代入すると、自由流線を与える式として、

$$dx_f = -\frac{B}{K\pi} \frac{\cos\{2/\pi(\beta_1 \theta_a + \beta_2 \theta_b) - \theta_b\}}{\xi_*} d\xi_* \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$dy_f = -\frac{B}{K\pi} \frac{\sin\{2/\pi(\beta_1 \theta_a + \beta_2 \theta_b) - \theta_b\}}{\xi_*} d\xi_*$$

を得る。

次に、(14)式と(12)式において、 b, d_1, d_2, θ_b の4個が未知の定数であるから、4個の定数計算式を必要とする。まず、 ζ_* -平面の実軸 ξ_* 上の区間 (A, B) での A 点、区間 (D_2, D_3) での D_3 点の Ω -平面と ζ_* -平面との対応から、

$$|nK = \frac{2\theta_a}{\pi} \Big|_n \frac{\sqrt{(b-1)+\sqrt{b-d_1}}}{\sqrt{(1-d_1)}} - \frac{2\theta_b}{\pi} \Big|_n \frac{\sqrt{1-d_2} + \sqrt{d_1-d_2}}{\sqrt{1-d_1}} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$|nK = -\frac{2\theta_a}{\pi} \Big|_n \frac{\sqrt{d_1(b-1)+\sqrt{b-d_1}}}{\sqrt{b(1-d_1)}} + \frac{2\theta_b}{\pi} \Big|_n \frac{\sqrt{d_1(1-d_2)+\sqrt{d_1-d_2}}}{\sqrt{d_2(1-d_1)}} \quad \dots\dots\dots (16)$$

が得られる。また、自由流線 CD_1 の長さが $\lambda \ell$ とあらかじめ与えられることから、(15)式から次式が得られる。

$$\lambda \ell = \frac{B}{\pi K} \Big|_n \left(\frac{1}{d_1} \right) \quad \dots\dots\dots (17)$$

つぎに、(6)式から、

$$\left| KU_0 \frac{dZ}{dW} \right|_{BC} = \left\{ \frac{\sqrt{(b-1)(\xi_*-d_1)} + \sqrt{(b-d_1)(\xi_*-1)}}{\sqrt{(1-d_1)(b-\xi_*)}} \right\}^{\frac{2\theta_a}{\pi}} \times \left\{ \frac{\sqrt{(1-d_2)(\xi_*-d_1)} + \sqrt{(d_1-d_2)(\xi_*-1)}}{\sqrt{(1-d_1)(\xi_*-d_2)}} \right\}^{\frac{2\theta_b}{\pi}}$$

が得られるが、上式の左辺は(7)式を用いると、

$$\left| KU_0 \frac{dZ}{dW} \right|_{BC} = KU_0 \left| \frac{dS}{d\zeta_*} \right| \Big/ \left| \frac{dW}{d\zeta_*} \right|_{BC} = -KU_0 \frac{ds}{d\xi_*} \Big/ \left(\frac{\pi}{U_0 B} \right) \xi_*$$

となる。これより、

$$\frac{dS}{\ell} = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{K} \right) \left(\frac{B}{\ell} \right) \frac{d\xi_*}{\xi_*} \left\{ \frac{\sqrt{(b-1)(\xi_*-d_1)} + \sqrt{(b-d_1)(\xi_*-1)}}{\sqrt{(1-d_1)(b-\xi_*)}} \right\}^{\frac{2\theta_a}{\pi}}$$

$$\times \left\{ \frac{\sqrt{(1-d_1)(\xi_*-d_1)} + \sqrt{(d_1-d_2)(\xi_*-1)}}{\sqrt{(1-d_1)(\xi_*-d_2)}} \right\}^{-\frac{2\theta_b}{\pi}}$$

が得られるが、上式を B 点から C 点まで積分すると、 Z -平面では $BC = \ell / \sin \theta$ であることから、

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{K} \right) \left(\frac{B}{\ell} \right) \int_1^b \left\{ \frac{\sqrt{(b-1)(\xi_*-d_1)} + \sqrt{(b-d_1)(\xi_*-1)}}{\sqrt{(1-d_1)(\xi_*-d_2)}} \right\}^{\frac{2\theta_a}{\pi}}$$

$$\times \left\{ \frac{\sqrt{(1-d_2)(\xi_*-d_1)} + \sqrt{(d_1-d_2)(\xi_*-1)}}{\sqrt{(1-d_1)(\xi_*-d_2)}} \right\}^{-\frac{2\theta_b}{\pi}} \cdot \frac{d\xi_*}{\xi_*} = \ell / \sin \theta \quad \dots\dots\dots (18)$$

を得る。

以上から、 b, d_1, d_2, θ_b は、(15)、(16)、(17)、(18)式の連立方程式の解として求められる。しかしながら、これらの連立方程式の解析解は得られないので、数値計算を行なわなければならない。

5. 解析モデルの特性

3.で示された解析モデルの特性は、解析モデルにあらかじめ与えられなければならない4つのパラメーター B/l 、 θ_a 、 λ 、 K の値によって、境界流線 CD_1D_2 がどのような変化を示すかによって知られる。計算例として、 $B/l=10$ 、 $\theta_a=60^\circ$ 、 $\lambda=7$ 、 $K=1.40$ を基準値として、4個のうち、特定の1個のパラメーターを変化させる場合、他の3個のパラメーターはこの基準値に固定した。 B/l 、 θ_a 、 λ 、 K の個々の変化に対する流線 CD_1D_2 の変化が、それぞれ、Fig. 5、6、7、8に示されている。

しかしながら、他の3個のパラメーターを固定して、特定の1個のパラメーターの、自由流線が得られる範囲での変化させられる範囲は、どのパラメーターについてもかなり限られていることが図からわかる。したがって、パラメーター B/l 、 θ_a 、 λ 、 K が独立なパラメーターではなく、相互に関連したパラメーターである事が予想される。この事は、 $\lambda \rightarrow \infty$ のとき、 $d_1 \rightarrow 0$ 、 $d_2 \rightarrow 0$ 、さらに $\theta_b \rightarrow 0$ となり、本解析モデルは、石原・志方の解析モデル⁴⁾と一致し、このとき K は b とともに B/l と θ_a から求められる定数値となることから類推される。Fig. 8 中の下流無限遠点まで伸びている流線は、 $\lambda \rightarrow \infty$ のときの石原・志方の解析モデルから得られる自由流線である。

6. 実験

実験は、解析モデルから得られる境界流線 CD_1D_2 の形状が実際の流れの境界流線を近似できるかどうかを検討するために行なわれた。解析モデルにより実際の流れの境界流線に対応する流線 CD_1D_2 を計算するには、4個のパラメーター B/l 、 θ_a 、 λ 、 K の値の設定が必要である。そして、これらのパラメーターをどのような実際の流れの水利条件から決定すべきかを検討するために、流れの場の(i)流速分布、(ii)水深分布、(iii)流向分布について詳細な測定がなされた。実験は、 $B/l=10$ 、 $Fr=U_m/\sqrt{g\bar{h}}=0.89$ 、 $Re=U_m\bar{h}/\nu=7,500$ 、 $\delta/l=1.5$ の流れで行なわれた。(U_m 、 $\bar{h}$ ：平板上流部断面平均流速、平均水深)

解析モデルのパラメーター B/l については、流れのパターンを検討する限りにおいては、水路側壁近くの非一様流部の存在の影響は他の3個のパラメーターで考慮することとし、 $B/l=10$ の値を用いることとした。 θ_a については、平板先端部での流向測定の結果から $\theta_a \approx 60^\circ$ が得られているので、これを用い

$$k = 1.40 \quad \lambda = 7.0 \quad \theta_a = 60^\circ$$

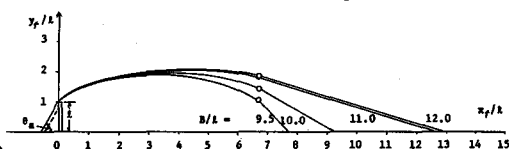


Fig.5 Influence of B/l on calculated streamline

$$B/l = 10.0 \quad \lambda = 7.0 \quad k = 1.40$$

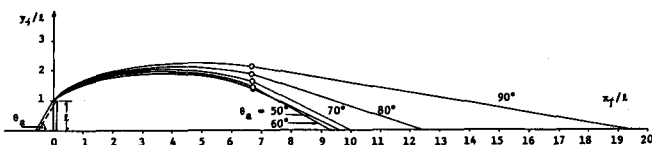


Fig.6 Influence of θ_a on calculated streamline

$$B/l = 10.0 \quad \theta_a = 60^\circ \quad k = 1.40$$

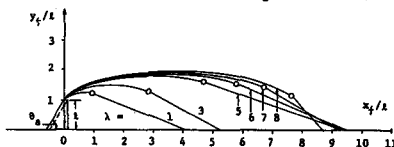


Fig.7 Influence of λ on calculated streamline

$$B/l = 10.0 \quad \theta_a = 60^\circ \quad \lambda = 7.0$$

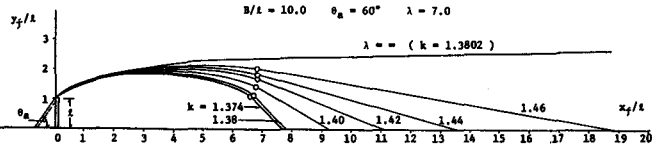


Fig.8 Influence of k on calculated streamline

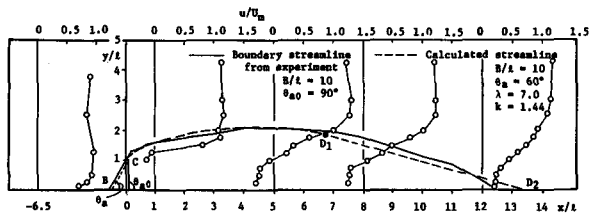


Fig.9 Velocity profiles and boundary streamline

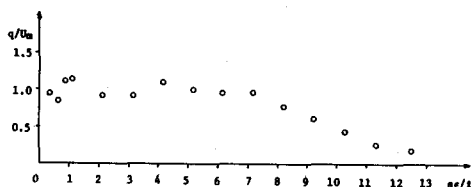


Fig.10 Velocity q on boundary streamline

た。Fig. 9 は、平板の上下流にとられたいくつかの横断面での水深方向に平均された x 一方向の速度 u の分布と、それらの分布と水深分布とから計算された境界流線が示されている。⁹⁾ そして Fig. 10 は、その境界流線上の速度 $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ の分布が示されている。その分布によると、境界流線の下流側壁への reattach が原因と思われる境界流線上の速度 q の減少が、 $S_f / \ell = 7$ から見られる。そこで、この流れに対する λ の値として、7.0 を与えた。一方、 K の値については、実際の流れと解析モデルとでは、流れのパターンと圧力分布、すなわち水深分布が等しいと仮定することにより、次式により求められる。

$$K = \sqrt{\frac{2g(h_0 - h_b)}{U_0^2} + 1}$$

ここで、 h_0 は、平板の上流部で平板の影響を受けない位置での水深、 h_b は平板背後の圧力一定領域の水深、 U_0 は解析モデルの仮想一様流の流速である。ところが、式中の U_0 としてどのような実際の流れの流速を用いるかが明確となっておらず、さらに水深測定の結果得られた水深変化は微小であり、水深測定の誤差のオーダーであるなどのため、 K の値の設定ができない状態にある。したがって、ここでは、実験から得られた境界流線との比較のために、 $B/\ell = 10$ 、 $\theta_a = 60^\circ$ 、 $\lambda = 7$ とし、流線が計算される範囲内で K の値を変えて流線 CD_1D_2 の計算が行なわれている。それが、4.ですでに示されている Fig. 8 の流線群である。図で $K = 1.374$ に対する流線の reattach 角 θ_b は境界流線の出発角 θ_a と一致し、これは Riabouchinsky¹⁰⁾ が提案した流れで、実平板の下流に鏡像平板がおかれた場合の流れに対応する。 $K < 1.374$ に対する境界流線も存在するが、本研究の興味の対象からはずれるので、図には示されていない。また、 $K \geq 1.47$ に対する流線は計算されない。Fig. 8 の流線群のうち、実験から得られた境界流線と形状が良く一致する計算流線は $K = 1.44$ に対するものであり、比較のために、その計算流線は Fig. 9 に示されている。

6. あとがき

本文で提案された渦なし流れの解析モデルに、4 個のパラメーター B/ℓ 、 θ_a 、 λ 、 K に適当な値を用いることにより、実際の平板の先端から出発する境界流線を十分に近似する流線が得られることがわかった。しかしながら、このモデルによって実際の境界流線を予測するためには、これらのパラメーターが水路の幅 B と平板長 ℓ との比、流れの水利条件とどのように結びつけられるかを明らかにしなければならない。

今後、詳細な実験を行ない、その関係を検討していくつもりである。

(謝辞) 本研究を行なうにあたっては、北海道大学工学部土木工学科 岸 力 教授より終始適切な御助言を頂いており、ここに深く感謝致します。

参考文献 — 1) Rotta, J.C.: Turbulente Strömungen, B.G. Teuber, 1972. (大路訳: 乱流、岩波書店、1975.) 2) Méhauté, B.: An Introduction Hydrodynamics and Water Waves, Springer Verlag, 1976. (堀川訳: 応用流体力学入門、東大出版会、1979.) 3) 吉川・杉木・芦田: 水制の水利に関する研究 (I)、土木研究所報告、第 90 号、(昭和 30. 3) 4) 石原・志方: 開水路急縮部の水利学的性状に関する研究、土木学会論文報告集、第 135 号、(昭和 41. 4) 5) 細井・杉山・小沢: 水制の水利に関する研究 (II)、土木学会第 23 回年講、第 2 部、1968. 6) Rosko, A.: "On the Wake and Drag of Bluff Bodies," J. Aero. Sci., 1975. 7) 岡本: 複素関数、ダイヤモンド社、1968. 8) 佐々木: 等角写像の応用、現代工学社. 9) 石井・渡辺・柴田: 有限幅の開水路の側壁から垂直に出された平板周辺の流れに関する研究、昭和 54 年度土木学会東北支部研究発表会講演概要. 10) Batchelor, G.K.: An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge Univ. Press, 1970.