

均質な2次元開水路漸拡流の水理学的特性について

Characteristics of two-dimensional flow with large depth-gradient

徳島大学工学部 正会員 ○岡 部 健 士
徳島大学工学部 正会員 杉 尾 捨三郎

1. ま え が き

著者らは、貯水池における浮流砂の堆砂現象を移流拡散式に基づいて解析する研究を継続してきた。その過程において、堆砂デルタより下流側の、流れ方向への断面増加率がかなり大きい不等流の流動特性に関する知見¹⁾が不十分であると感じ、これに関する基礎的な研究を行なうことにした。²⁾³⁾ 本論文においては、幅が一定で水深のみが急増する定常で均質な不等流を2次元開水路漸拡流（以下においては単に漸拡流と書く）を対象にして、その流速分布則を考究するとともに、浮流砂問題との関連で、渦動粘性係数の特性についても若干の考察を加える。

2. 流速分布の相似則⁴⁾⁵⁾

図－1は、滑らかな固体壁面に沿う乱流中の流速分布則を図示したものであり、表－1は従来の諸研究により、その普遍性が十分に確認されている相似則である⁶⁾。これらによると、図－1の i), ii) および iii) の領域の流速分布は壁面上の剪断応力と粘性のみに規定され、普遍関数表示も容易であるが、領域 iv) の流速分布には、圧力勾配、付加的乱れ強さ、乱流層の厚さなど流況を代表する種々の物理量が複雑に関係していることがわかる。しかし、周知のとおり、この領域における流速分布則を普遍表示する試みはほとんど成功していない。

流体力学的見地に立てば、本論文で考察の対象とする漸拡流も固体壁面に沿う乱流の範ちゅうに属する。したがって、その流動特性は上述したのとほぼ同様なものであると考えてよからう。すなわち、漸拡流においても、壁面付近の完全乱流域内では、表－1の相似則を積分して得られる、下記の(1)式および(2)式がそれぞれ滑面床と粗面床に対して適用し得るが、路床面からある程度離れた領域においては、図－1の領域 iv) の流速分布図のように対数則に従わない分布形が生じるものと推察される。

(滑面の場合)

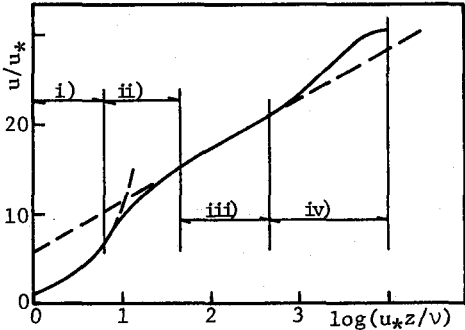
$$u / u_* = 5.75 \log_{10} (u_* z / \nu) + 5.5 \tag{1}$$

(粗面の場合)

$$u / u_* = 5.75 \log_{10} (z / k_s) + 8.5 \tag{2}$$

k_s ; 相当砂粒粗度, ν ; 動粘性係数。

流れが等流状態にある場合、上記の2式は全断面において成立し、あたかも等流が壁面乱流と本質的に異なったものであるといった印象を受けがちであるが、それは自由表面が乱れエネルギーの拡散を完全に押える役割を演じた結果現われた特例であると解釈できる。



図－1 滑らかな壁面上の流速分布図

表－1 壁面に沿う乱流層内の流速の相似則

range in flow	similarity law
i) viscous sublayer	$(\mu / \tau_w) u / z = 1$
ii) buffer layer	$u / u_* = \text{fct.} (u_* z / \nu)$
iii) equilibrium layer	$(z / u_*) du / dz = 1 / \kappa$
iv) outer layer	$\Delta u / u_* = \text{fct.} (z / \delta, \text{other physical quantities})$

; 流速, τ_w ; 壁面上の剪断応力,
; 流体中の剪断応力, u_* ; 摩擦速度,
; 粘性係数, ρ ; 流体密度,
; 壁面からの距離,
 u ; 欠速度, κ ; カルマン定数。

3. 水理実験とその結果

3-1 実験概要

実験には、幅 0.6 m、深さ 0.4 m、長さ 14 m の長方形断面勾配可変水路を使用した。本水路の下流端に近い位置に木製の全幅ゼキを取りつけて堤体モデルとし、これより上流側の約 9 m の区間に図-2 に示したような河床モデルを設置した。河床モデルは、ほぼ水平な流入河道区間と急勾配の貯水池区間からなっており、両者は勾配が滑らかに変化する約 1 m の緩和区間で結ばれている。

モデル河床上に定常流量を通水しつつ、貯水池区間に 0.5 m 間隔で選定した測定断面において水路中心線上の流速分布をピトー管により詳細に測定し、あわせてポイントゲージとレベルを用いて水面形を測定した。

実験は、表-2 に示したような 8 種の条件のもとで行なわれた。表中で粗面と記したものは、元来滑面仕上げをほどこした河床モデルの表面に、直径 12 mm のガラス球を密に敷き詰めて作った球状粗面である。等流条件で行なった抵抗特性の検討実験の結果、この粗面に関しては、水深基面を球の頂点より直径の 1/4 だけ下方に下げるのが適切であり、その場合、 k_s

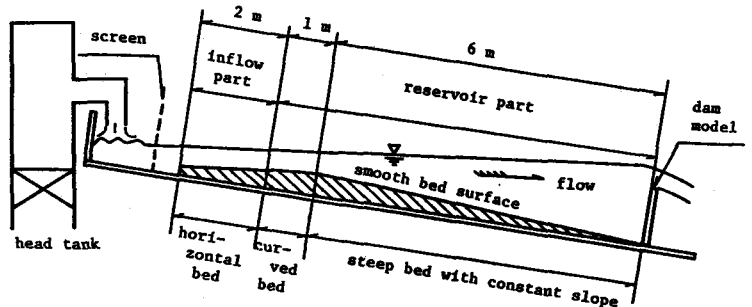


図-2 水路および河床モデルの概要図

表-2 実験条件の一覧表

3-2 実験結果

流れの縦断形状と各測定断面における流速分布形状の代表例として、Exp. 3 の実験結果を示したのが図-3 である。流速測定点は、路床面近傍では 1 mm 間隔、水面近傍でも 2~3 mm 間隔で設定したが、作図においてはそれらの一部を除去している。

さて、水面形はいわゆる S1-curve になっているが、その曲率はきわめて小さい。したがって、流速分布形に及ぼす水面の曲りの効果は十分小さく無視し得ると思われる。各断面の流速分布形は、本図を見る限り、等流または擬等流 (pseudo-uniform flow) におけるものと比較して特に変わったものではない。

つぎに、流速分布形を片対数紙上で無次元表示した例を示す。図-4 は、Exp. 1, 3, 4, 6 の流れの堤体モデルから一律に 4.0 m 上流の測定断面において得られた資料に基づいて描いたものである。路床面は全て滑面であるので z は粘性を考慮した特性長 ν/u_* で無次元化している。また、図-5 は、粗面上の流速分布図の例として、Exp. 7 および 8 の資料を整理した結果を k_s を特性長として描いたものである。ところで両図の作図には、 u_* が用いられている。 u_* は本来であれば何らかの方法で路床剪断応力 τ_0 を実測し、 $u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$

	bed slope	discharge (l/s)	bed condition
Exp. 1	1/ 34.08	11.90	smooth
Exp. 2	1/ 45.24	14.80	smooth
Exp. 3	1/ 56.82	13.93	smooth
Exp. 4	1/ 70.42	12.06	smooth
Exp. 5	1/ 82.33	12.40	smooth
Exp. 6	1/ 119.3	12.55	smooth
Exp. 7	1/ 50.00	10.80	rough
Exp. 8	1/ 76.05	9.50	rough

なる定義式に従って算定すべきであるが、ここでは、路床近傍の $z = 1 \sim 2$ cm の領域において(1)および(2)式が成立するものと仮定したときの u_* の最適値を採用している。前節で述べたとおり、(1)、(2)式は普遍的な壁面則とみてよいであろうから、 u_* の推定法は十分な妥当性を有しているとみてよからう。

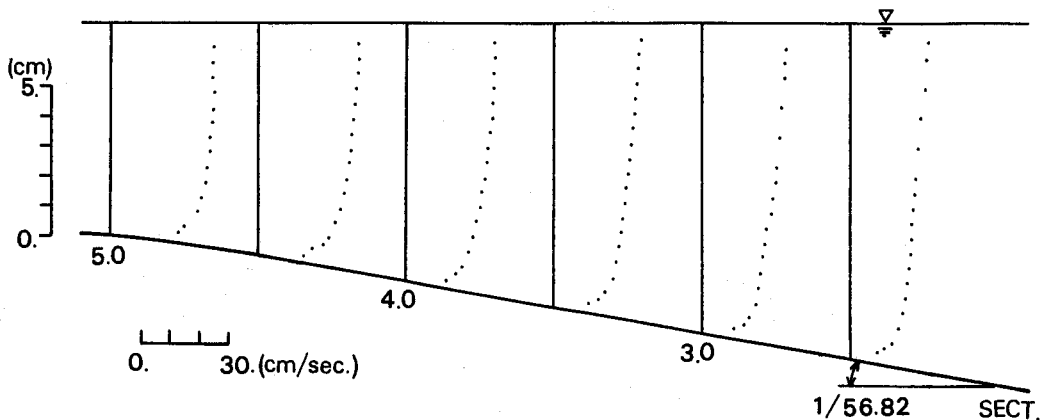


図-3 Exp. 3における水面形と流速分布形

図-4 および 5 を見れば、漸拡流の流速分布形状は、等流や擬等流におけるものとは異なり、図-1 に示されたものに類似したものとなっていることがわかる。すなわち、 z の小さい領域では対数直線性を示すが、 z が水深 h の 2 ～ 3 割より大きくなると z 方向の速度勾配 du/dz が対数則により算定されるものより大きくなるために、描点群は z の増加につれて対数則の直線から（図上で上方に）はずれてゆくという傾向が明瞭に現われている。

しかし、 z が $0.8 \sim 0.9 h$ 以上になると、 du/dz が再び対数則によるものに近付き、全体としては S 字状の分布曲線となっている。

片対数紙上における流速分布曲線がもつ以上のような特徴は、実測資料の全てに共通して見出せるが、路床勾配が大きい実験におけるものほど顕著である。より細かく検討すると、路床勾配が小さいほど、水深が小さいほど対数則の直線からはずれ始める位置の z/h が大きくなるという傾向も見出せる。

4. 流速分布則の定式化

4-1 流速分布式の基本形

2. において述べたように、iv) outer layer 内の流れの運動機構については解明されていない点が多く、Reynolds 応力と速度勾配を結びつける整理モデルに完成されたものがないために、その流速分布則を理論的に誘導することは極めて困難である。これには Reynolds 方程式自体が非線形であることも大いに関係してい

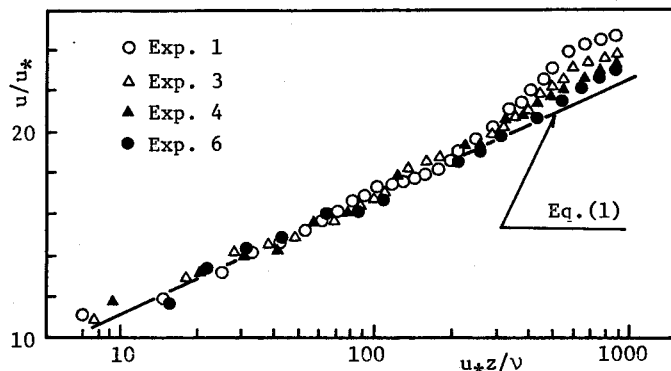


図-4 滑面路床上の流速分布の片対数表示

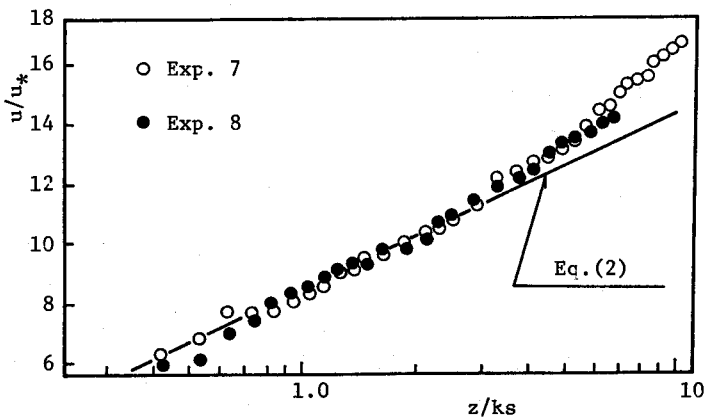


図-5 粗面上の流速分布の片対数表示

るので、流体力学の分野においても研究の進展がほとんどないようである。これに対し、従来の数多くの実測事例に基づいて経験的に得られた流速分布則がいくつか提案され、実際問題の処理にはそれらが利用されている。

経験式の一つとして、次式のような Coles の表示法⁵⁾が最も適切で有用なものと考えられている。

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u_* z}{\nu} \right) + \text{const.} + \frac{2}{\kappa} \Pi(x) \sin^2 \left(\frac{\pi z}{2\delta} \right) \quad (3)$$

ここに、 δ は流れの層の厚さであり、 $\Pi(x)$ は Amplitude Factor と呼ばれる断面特性量である。上式は、outer layer における実際の流速と対数型分布則を適用して計算される流速との差を、三角関数を用いて補正しただけのもので、理論性に乏しいとの批判もあるが、 $\Pi(x)$ が与えられた場合には極めて良好な適合性をもつので、その価値はかなり高く評価されている。

図-4 および 5 と (3) 式を対比すれば、開水路漸拡流の流速分布の表示式としても (3) 式が十分利用し得ることが期待されよう。そこで、(3) 式を開水路の問題に適するよう下記のように書き直し、その適合性の検討を行なってみることにした。

(滑面の場合)
$$\frac{u}{u_*} = 5.75 \log_{10} \left(\frac{u_* z}{\nu} \right) + 5.5 + 5 \Pi(x) \sin^2 \left(\frac{\pi z}{2h} \right) \quad (4)$$

(粗面の場合)
$$\frac{u}{u_*} = 5.75 \log_{10} \left(\frac{z}{k_s} \right) + 8.5 + 5 \Pi(x) \sin^2 \left(\frac{\pi z}{2h} \right) \quad (5)$$

検討の主眼は上記の 2 式の右辺第 3 項にある。したがって、両式を次式のように表面流速からの defect velocity を表現する形式に書き直しておく。すなわち、表面流速を u_s として、

$$\frac{u - u_s}{u_*} = 5.75 \log_{10} \left(\frac{z}{h} \right) - 5 \Pi(x) \{ 1 - \sin^2 \left(\frac{\pi z}{2h} \right) \} \quad (6)$$

上式の意義を図示したのが図-6 である。本図より流速の実測資料から $\Pi(x)$ を定める方法も理解されるが(破線と一点鎖線の縦距の差が $5 \Pi(x)$ となる)、このようにして決定された $\Pi(x)$ の値を用いて (6) 式により算定される欠速度曲線と実測値を比較したのが図-7 である。

図において、両者はきわめてよい一致を示しており、漸拡流の流速分布式の基本形として (4) および (5) 式を利用できることが明らかとなった。

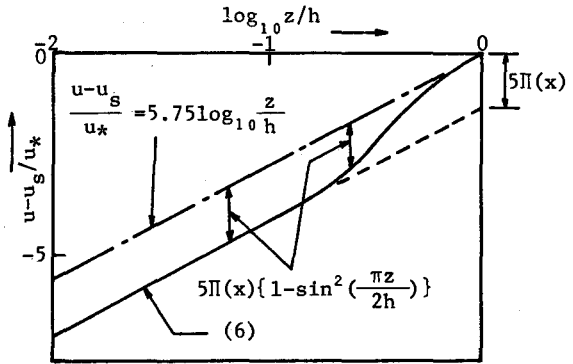


図-6 (6) 式の概念図

4-2 $\Pi(x)$ の実験式

以上のようにして漸拡流の outer layer 内の流速分布の定性的特性が定式化されたわけであるが、(4) および (5) 式に実用的な価値をもたせるためには $\Pi(x)$ を断面代表水理量によって表現せねばならない。ただし、すでに述べたように Coles の式自体が便宜上考案されたものであるので、 $\Pi(x)$ の性質を運動力学的に考察することは困難である。以下においては $\Pi(x)$ の定式化の過程を述べるが、その義論が主観な色合いの強いものになっているのはいたしかたのない所であるので、前もって断っておきたい。

さて、 $\Pi(x)$ は実際の流速と対数則によって算定されるものとの差の大きさを代表する無次元量である。また、対数則は等流状態にある乱流層内では普遍的に成立すると言ってよい。以上のことからつぎのような推論を行なうことが可能になる。すなわち、 $\Pi(x)$ の値は、着目する断面において流れの状態が等流状態から遠ざかっている程度を表わす何らかの指標により規定されるに相違ない。

ここで2次元開水路のエネルギー方程式を引用してみよう。それは次式のように書かれる。

$$\frac{dh}{dx} / i = \text{fct.} (h/h_0, Fr) \quad (7)$$

ここに、 x ; 路床に沿う距離、 i ; 路床勾配、

h_0 ; 等流水深、 Fr ; Froude 数。

(7)式中の3個の無次元量のうち、等流状態からの隔たりを示すのは $\frac{dh}{dx} / i$ と h/h_0 であるが両者は Fr をパラミターとした一つの関数を満たさねばならぬから、 Fr を考慮すればいずれか一方を除外することができる。取り扱い上 $\frac{dh}{dx} / i$ を除外するのが好都合であるのでこれを除外したとき、 $\Pi(x)$ は次式のように表現し得るのではないかと期待がもてる。

$$\Pi(x) = \text{fct.} (h/h_0, Fr) \quad (8)$$

図-8は $\Pi(x) \sim h/h_0$ 関係を図示したものであり、図中の描点に添えた数字は Fr である。本図における Fr がほぼ等しい描点群の分布状態と等流状態 ($h = h_0$) では $\Pi(x) = 0$ となる経験的事実からつぎのような関数関係が推察される。

$$\Pi(x) = \text{fct.} (Fr) \cdot \log_{10} \left(\frac{h}{h_0} \right) \quad (9)$$

そこで $\Pi(x) / \log_{10} (h/h_0)$ と Fr の関係を調べたところ、両者は双曲線によって代表されるような関係にあることが見出されたので、 $\Pi(x) / \log_{10} (h/h_0) \sim (Fr^{-1} - 1)$ 関係を調べたのが図-9である。幸運なことに両者の間には本図のような強い相関関係が見出され、結果として $\Pi(x)$ は h/h_0 と Fr により次式のように表示されることが明らかとなった。

$$\Pi(x) = 0.215 (Fr^{-1} - 1) \log_{10} \left(\frac{h}{h_0} \right) \quad (10)$$

なお、著者らは文献2), 3)において、 $\Pi(x) = 0.922 \log_{10} (gh/u_*^2) - 3.044$ 、 g ; 重力の加速度、なる実験式を示したが、このような表示式によるならば等流においても $\Pi(x) \neq 0$ となり実測事実と反するので、(10)式のように修正するものである。

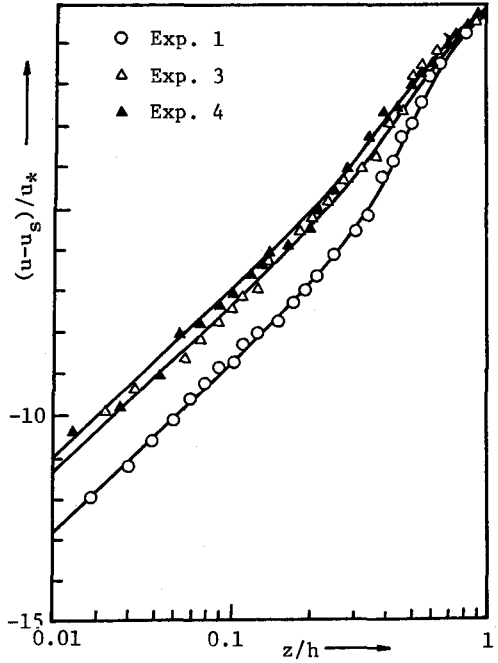


図-7 (6)式と実測値の比較図

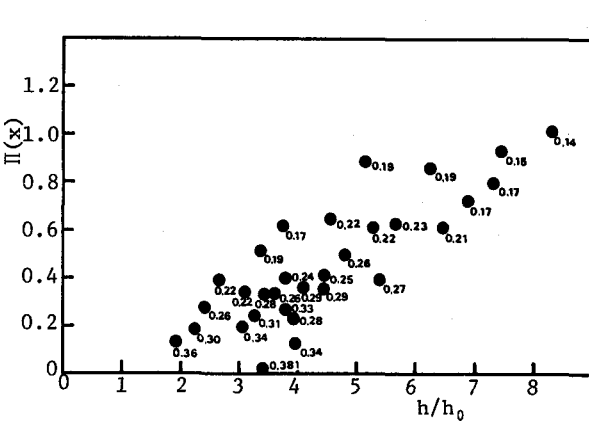


図-8 $\Pi(x) \sim h/h_0$ 関係図

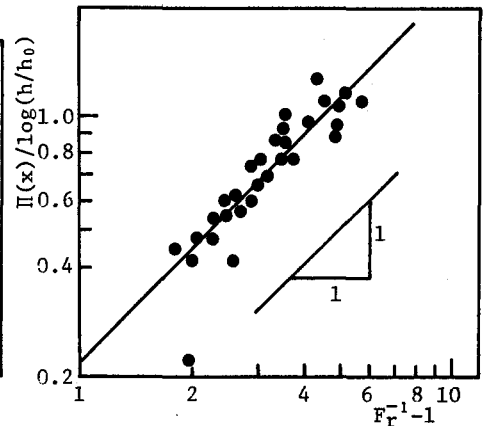


図-9 $\Pi(x) / \log_{10} (h/h_0) \sim (Fr^{-1} - 1)$ 関係図

5. 抵抗則および渦動粘性係数

(4)および(5)式を全水深にわたって積分すれば、平均流速 v_m に対する流速係数 ϕ が得られる。

$$(\text{滑面の場合}) \quad \phi = 5.75 \log_{10} \frac{u_* h}{\nu} + 3.0 + 2.5 \Pi(x) \quad (11)$$

$$(\text{粗面の場合}) \quad \phi = 5.75 \log_{10} \frac{h}{k_s} + 6.0 + 2.5 \Pi(x) \quad (12)$$

結局、漸拡流の ϕ は等流を仮定して算定される流速係数 ϕ_0 より $2.5 \Pi(x)$ だけ大きくなるという結果である。ところで、通常 ϕ_0 は 10～30 程度の値となるが、とくに粗面の場合には k_s の評価を正確に行なうことが困難なために、 ϕ_0 には 20～30 % の誤差が含まれていると考えておかねばならない。これに対し、 $\Pi(x)$ の値は Fr がかなり小さく、 h/h_0 がかなり大きい場合でも 1～2 程度の値であるから、ほとんどの場合、 $2.5 \Pi(x)$ という補正量の ϕ に対する比はさほど小さくなく、しかも ϕ_0 の不確かさに含み込まれてしまうと思われる。したがって、現状では、工学的な実際問題の処理において等流と漸拡流の抵抗則の相違をことさら重視する必要性は認められない。

つぎに、渦動粘性係数 ϵ_t は、剪断応力分布が $\tau = \tau_0 (1 - z/h)$ のように表わせるものとすれば、次式のように書かれる。

$$\epsilon_t = \frac{0.4 u_* h (z/h) (1 - z/h)}{1 + \pi \Pi(x) (z/h) \sin(\pi z/h)} \quad (13)$$

τ の分布を上記のように相対水深の一次式で表現するには若干の問題があるが、それについては今後改めて検討することにして、ここでは (13) 式の ϵ_t の性質を述べる。

図-10 は ϵ_t の分布形が $\Pi(x)$ の値によってどのように変化するかを示したものである。 $\Pi(x) = 0$ に対する曲線は等流における分布形であるが、 $\Pi(x)$ を考慮した場合、 ϵ_t は等流状態を仮定して算定されるものより一様に小さくなる。また、 $\Pi(x)$ がさほど大きくない場合でも、分布形の相違はかなり著しい。Reynolds Analogy により拡散解析を行なう場合には、留意しておかねばならない。最後に、図-11 は ϵ_t の断面平均値 ϵ_{tm} と $\Pi(x)$ の関係を図示したものである。

6. あとがき

水深のみが変化する開水路漸拡流の流動特性を実験的に研究し、流速分布則を解明して抵抗則と渦動粘性係数の性質を調べた。今後は、幅が変化する流れについても同様な研究を行なってみたいと思う。

参考文献

- 1) 平野・金子・式：開水路漸拡流の流速分布について，西部支部研究発表会，1974，PP. 181～182.
- 2) Okabe, T.・Sugio, S.: Velocity Profile in Steady Backwater Region with Large Depth-Gradient, Bull. Faculty of Eng., Tokushima Univ., Vol. 16, 1979, PP. 1～11.
- 3) 岡部・杉尾：2次元開水路漸拡流の流速分布に関する実験的研究，第34回年講，1979，PP. 93～94.
- 4) Tennekes, H.・Lumley, J. L.: A First Course in Turbulence, Stn. 5, 4, 1972, PP. 171～195.
- 5) Reynolds, A. J.: Turbulent Flows in Engineering, Chpt. 4, 1974, PP. 181～240.
- 6) Samuel, A. E.・Joubert, P. N.: A Boundary Layer Developing in An Increasingly Adverse Pressure Gradient, JFM., Vol. 66, Part 3, 1974, PP. 481～505.

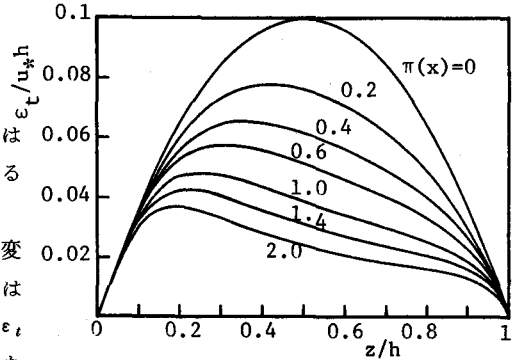


図-10 (13)式による ϵ_t の分布形

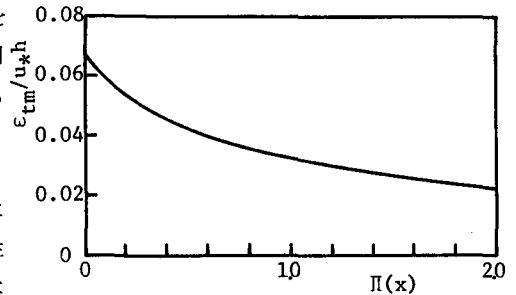


図-11 ϵ_t の断面平均値と $\Pi(x)$ の関係