

砂れき面の抵抗則 Flow Resistance on Sediment Surface

立命館大学理工学部 正員 ○大同淳之
立命館大学大学院 学生員 松井 弘

I. はしがき

河床の抵抗則については、数多くの研究が行なわれ、成果があげられている。しかしながら、こう配が大きく水深に比して、粗度要素の高さが相対的に大きい流れについては、従来の考察が必ずしも妥当でなく、また粗度要素の特性長になにを採用するのが妥当かといった点についても問題が多い。一般に、こう配が急な流れは、抵抗が増すとされている。この理由を明らかにするためには、抵抗の要因を分析して、抵抗則に及ぼすそれぞれの寄与を明確にする必要がある。

本文は、抵抗の要因を分離して、それぞれの貢献度を明らかにするために、抵抗の線形性が成立つと考えて、考察を行なった。この考え方で抵抗を解析するためには、河床の形状の領域を予め分類し、それぞれの領域ごとに抵抗の釣合い式をたてて、考察をする必要がある。

流砂が全面的に移動している場合については、既往の研究があるので、本文では、土砂の移動がない場合および部分的に移動が行なわれている場合について考察する。

II. 抵抗則の区分

流砂のある河床は、砂面を構成する砂の大きさと、河床面上を流れる水のせん断力の相対的の大きさで、河床面の状況にしたがって抵抗則が変化する。1) $U_* < U_{*c,dmin}$ の場合、混合砂れきからなる固定床上の流れとなる。河床面の凹凸形状は、堆積物の粒径分布に支配される。2) $U_* < U_{*c,dmax}$ の場合は、いわゆる parallel degradation と呼ばれる領域で、河床砂れきの粗粒化が生じ、この場合は顕著な河床砂は生ぜず、さきの混合砂れき上の流れの抵抗に、砂れきの流動に伴う抵抗が加わったものと考えられる。3) $U_* \gg U_{*c,dmax}$ では、砂れきが全面的に移動し、そこでは砂堆が発生し、波形を有する河床上の抵抗となる。

抵抗則が、河床の粒径と水理量のみ関数であるから、抵抗則はあらゆる領域を通じてこれらの関数として一義的に表されるべきであるが、多くの研究にみられるように、全領域を通じてこれらの一義的に表現することは、現在では難かしい。本論文は、これらを上記の3つに分けて考察する。

III. $U_* < U_{*c,dmin}$ の場合

固定床粗度の抵抗則は対数則によって表され、一般には相当粗度の評価をいかに合理的にするかという問題に帰着される。しかし、急流河川に抵抗則を適用するときは、混合粒径の代表径あるいは粗度要素の平面的な不規則配列が、抵抗則に及ぼす影響などで不明な点が多い。本文は河床のところどころにれきが突出する河床を対象として考察する。

(1) 固定砂面の抵抗則

図1に示すような、砂面のところどころに、れきが突起する河床面を考える。河床面のせん断抵抗 τ_r は、突起した、れきの抗力 τ_1 、れき頂面のまさつ抵抗 τ_2 、および砂面のまさつ抵抗 τ_s の和である。このうち、 τ_2 は τ_1 に比して小さいので、 τ_1 に含ませて考えると、つぎのように表せる。

$$\tau_r = \tau_s (1 - \beta) + \tau_K \beta \quad (1)$$

ここに、 β は、単位面積中で、突起物が支配する面積比で、突起物とその背後の後流で被覆される面積を含めたものである。添字 r は不規則河床面、 s



図1 河床のモデル

は一様砂面, K は突起物を意味する。

突起物の抗力 F は, その頂部前面の流速 U_K を代表流速とすると, つぎのように表される。

$$F = \rho g C_D A_1 (U_K^2 / 2g) \quad (2)$$

ここに, C_D は抗力係数, A_1 は突起物の流れに直角な向きの投影面積で $a_0 K^2$ と表わすことにする。粗度の高さ付近の流れは, 後流の影響で対数則からはなれる。流速分布の測定は, τ と du/dz の関係が渦動粘性係数を用いた

$$\tau = \epsilon (du/dz) \quad (3)$$

で表されることを示唆する。 ϵ は, 齊藤¹⁾の測定によると, 壁面付近では, $\epsilon/U_* k_s$ が, 一定値 E を示す, としている。 E は, こう配 1 と, k_s/h の関数である。この関係を用いると(3)式は, 壁面から δ の高さまでは, 粘性底層があるとする,

$$U/U_* = (\rho/EK) \{ z \{ 1 - (\delta/h) \} - z^2 (1 - \delta^2/z^2)/2h \} \quad (4)$$

$\delta/z \approx 0$, のときは,

$$U_K/U_* = (\rho/E) \{ 1 - (K/2h) \} \quad (5)$$

したがって,

$$\frac{U_K}{U_m} = \frac{(\rho/E)(1-K/2h)}{(2.3/\kappa) \log(\epsilon_1 h/\alpha_1 K)} \quad (6)$$

ここに, κ は universal const. ϵ_1 は平均流速 U_m を対数則で表したときにこれを満足させる定数, h は水深, α_1 は粗度高さ K を相当粗度 k_s に変換させる係数である。(6)式の関係を用いて(2)式を書直すと,

$$F = \frac{\rho g}{(2.3/\kappa)^2 (\log \epsilon_1 h/\alpha_1 K)^2} \frac{U_m^2}{2g} \left\{ \frac{\rho}{E} \left(1 - \frac{K}{2h} \right) \right\}^2 C_D a_0 K^2 \quad (7)$$

と表される。単位面積中に種々の大きさのれきが n 個あって, もしこれらが独立で抗力を働かせると

$$\tau_K \beta = \frac{\rho g}{\left(\frac{2.3}{\kappa} \right)^2 (\log \epsilon_1 h/\alpha_1 K)^2} \frac{U_m^2}{2g} \left\{ \frac{\rho}{E} \left(1 - \frac{K}{2h} \right) \right\}^2 \cdot \sum_{i=1}^n C_D a_0 K_i^2 \quad (8)$$

一様, 砂面の, 砂面上の流れで表わすと, 砂の大きさを k として,

$$\tau_s = \frac{2\rho g}{\left\{ \left(\frac{2.3}{\kappa} \right) \log \epsilon_1 h/\alpha_2 k \right\}^2} \frac{U_m^2}{2g} \quad (9)$$

その結果, 1箇の粗度の占める被覆面積を A_K とすると

$$\frac{\tau_t}{\tau_s} = (1 - \sum A_K) + \frac{1}{2} \frac{\{ \log(\epsilon_1 h/\alpha_2 k) \}^2}{\{ \log(\epsilon_1 h/\alpha_1 K) \}^2} \left\{ \frac{\rho}{E} \left(1 - \frac{K}{2h} \right) \right\}^2 \sum_{i=1}^n C_D a_0 K_i^2 \quad (10)$$

と表される。同じ大きさの突起物が, 単位面積に n 個あるとき, 粗度の間隔を ℓ とすると, $n = 1/\ell^2$ となり,

$$\frac{\tau_t}{\tau_s} = (1 - nA_K) + \frac{1}{2} \frac{(\log \epsilon_1 h/\alpha_2 k)^2}{(\log \epsilon_1 h/\alpha_1 K)^2} \cdot \left\{ \frac{\rho}{E} \left(1 - \frac{K}{2h} \right) \right\}^2 C_D a_0 \left(\frac{K}{\ell} \right)^2 \quad (11)$$

となる。

(2) 境界面におかれた半球の抗力 C_D

上述の解析より, 砂面の抵抗を求めるためには, 突起したれきの抗力係数 C_D を知る必要がある。この場合の抗力係数 C_D は, 突起粗度の粗密度により, 前面粗度の後流に入ったときの抗力の変化あるいは境界面が C_D におよぼす影響については不確定な点が多い。そこで, 抗力を測定することを試みた。

抗力の測定は, 図2に示すせん断力計を用いた。シアーテーブルに平行な力が作用し, 平衡点がずれるとサーボ増幅器と駆動部によって, ずれに比例した電気

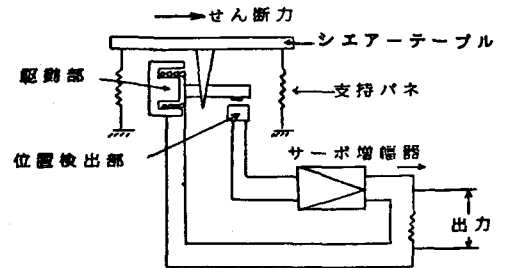


図2 抗力測定装置

測定に用いた物体は、半球 ($K=1.5\text{ cm}$, 3.5 cm) および棧型 ($K=1\text{ cm}$) で、いずれも開水路において測定した。

抗力の測定は、単独の物体の抗力と同時に、しゃへい効果を受けた物体の抗力を知るために、所定の間隔に粗度を配置して、測定を行った。

したがって、抗力係数 C_D は、 R_e 数のほかに、相対水深 h/K 、

$$C_D = f(R_e, h/K, \ell/K)$$

とみなされる。図 3 に、測定した C_D の値を示す。

境界面上におかれた物体の抗力は、流れが制限されているために、一様流れの中におかれた物体のそれとは異なることが予想される。測定された半球の抗力係数は、一様流れのそれよりも大きく、Grade²⁾らによって測定された粗斜面上を転動する球について測定された値の延長上にくる。Grade は、 $Re > 2 \times 10^3$ の領域では、 C_D の値が急激に低下することを認めているが、本実験結果もそれと同じ傾向を示している。

図3において、 C_D の値は、大きくちらばっているが注意してみると、 ℓ/K の値が小さくなるにしたがって孤立粗度の C_D よりずれていることが分る。

図 4 (a)~(c)は、相対間隔 ℓ/K の減少に伴う C_D の変化を示したものである。 C_D の値は、 ℓ/K の関数のほかに、 R_e 、 h/K の関数でもあるために、ちらばりが大きく、これから、任意の水理量に対する C_D をきめるのは難しい。

そこで、便宜的に、 C_D の値を次のように表わす。

$$1/\sqrt{C_D} = a_1 \log (h/K) + b_1 \quad (12)$$

これは図5のように示される。

図5から分るように、こう配がゆるいとき、 a の値

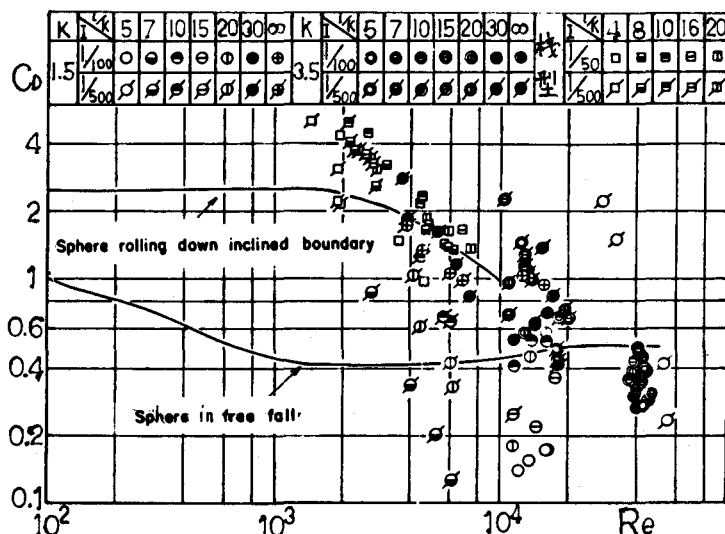


図 3 半球のおよび棧型の抗力係数 C_D の測定値

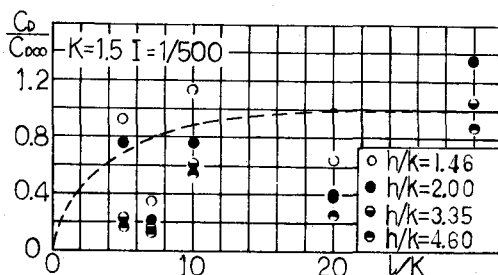


図 4 (a) シャへいを受ける半球の抗力係数

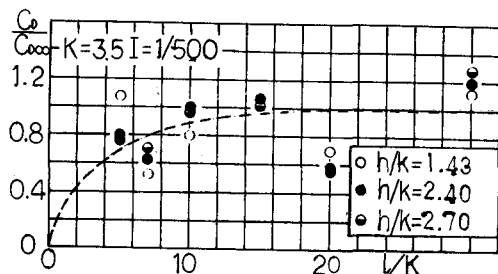


図 4 (b) シャへいを受ける半球の抗力係数

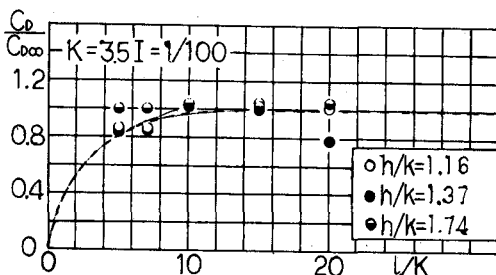


図 4(c) シャへいを受ける半球の抗力係数

は、測定の範囲でほぼ一定で、 b の値は、 ℓ/K の値に従って定めることができる。

一方、急こう配の領域では、 a の値は負をとり、 b の値の変化の値も大きい、いずれも C_D を、 h/K および ℓ/K と結びつけることができる。

- (3) 規則正しく粗度が配列した水路の抵抗

(11)式の C_D を(12)式でおき変えると、

$$\frac{\tau_r}{\tau_s} = (1 - \sum A_K) + \frac{1}{2} \frac{(\log \epsilon_1 h / a_2 k)^2}{(\log \epsilon_1 h / a_1 K)^2} \times \frac{\left\{ \frac{\ell}{E} \left(1 - \frac{K}{2h}\right) \right\}^2}{(a_1 \log \frac{h}{K} + b_1)^2} \cdot a_0 \left(\frac{K}{\ell}\right)^2 \quad (13)$$

となる。抗力を規制する流速 U_K の係数 E は、本実験における測定値から求めると、図6の関係から、例えば、 $1/400$ のとき、 $E = 0.21 \text{ g/cm}^3$ であって、これは、斉藤の値ともほぼ近い。そこでこの値を用い、 $K = 1.5 \text{ cm}$ の半球を格子状に規則正しく配列し、床面には $k = 1.44 \text{ mm}$ の砂粒をはりつけた固定床で測定された抵抗との比較を図7に示す。このケースでは、砂粒粗度の $k_s = a_2 k$ は K になると考え、 a_1 は 1.03 の値を用いて、(13)式を計算した。なお $(1 - \sum A_K)$ は 0 とした。

(4) 粗度が不規則に配列した水路の抵抗
突起する粗度が不規則なとき、しゃへい効果が変わるため、規則正しく配列した水路の抵抗とは異なることが予想される。不規則に配列した粗度が受ける抗力については、まだ測定が行なわれていない。そこで単位面積あたりに突起粗度の数が同じ、その間隔が平面的に正規分布にしたがって変化する分布状に粗度をおき、抵抗を測定した。この結果によると、細部についてのずれはあるとしても、平均値としての ℓ/K が

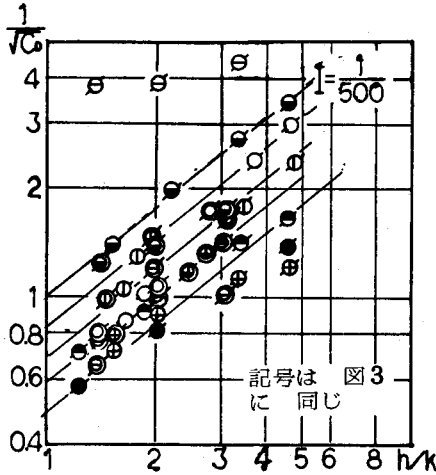


図5(a) C_D と h/K の関係

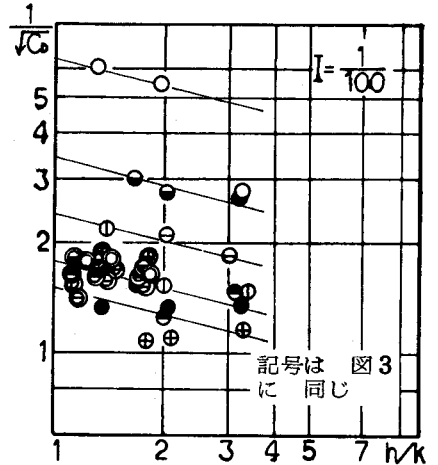
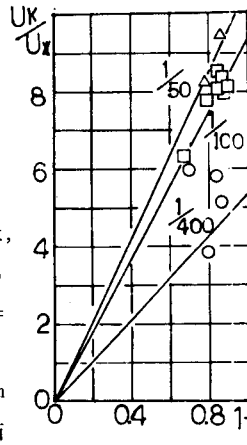
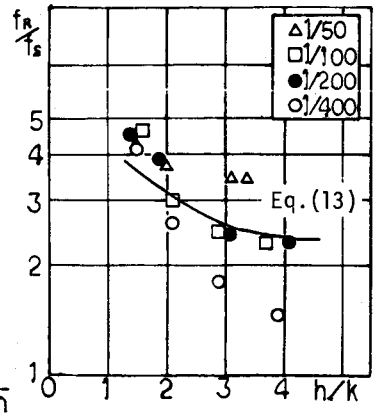


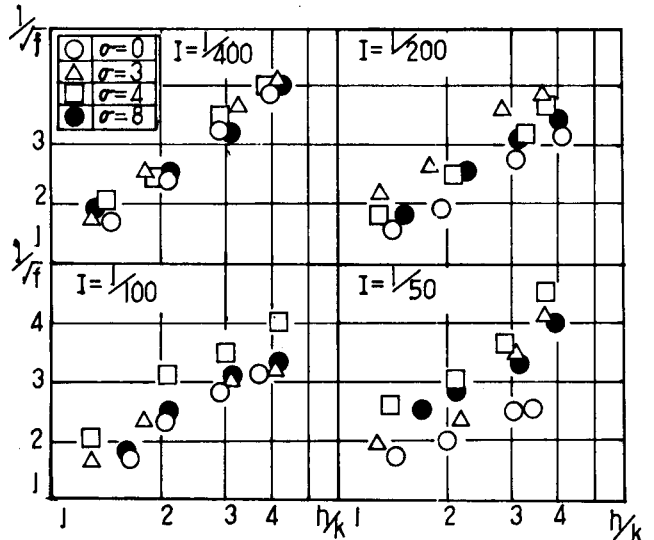
図5(b) C_D と h/k の関係



図(6) 渦動粘性係数 E の見積り



図(7) 実測値と計算値の比較



図(8) ℓ/K を一定にして、平面的標準偏差を変えた場合の比較

同じとき、粗度の平面的配列に変化があっても抵抗におよぼす影響は小さい。以上の考察を通じて、従来、固定床の抵抗が、 ℓ/K が 10 付近で k_s/k が最大とされているように、河床面の ℓ/K の算定が重要と考えられる。

IV. $U_{*c,d \min} < U_* < U_{*c,d \max}$ の場合

(1) 河床形の概略と、抵抗則評価上の問題点

この領域は、一部の砂れきが移動し、一部のれきが残存している状態である。河床に作用するまさつ速度 U_* に限界まさつ速度 U_{*c} が相当する粒径以下の砂は移動するので、いわゆる parallel regradation が生じ、表面が粗粒化する。この領域での抵抗は、粗粒化した面の抵抗と、移動中の砂れきによる抵抗の和である。粗粒化した面上の抵抗は、Ⅲ で考察したものと同じで、問題は、Ⅲ の場合と同じように、河床を構成する砂れきの粒径範囲が広く、一部の砂れきは頭部だけを出して埋没しているなど、河床のごく表層をとり出しても、河床層を容積的に構成する粒径分布と、河床面の粒径分布とが異なるように、不規則性が強い。この河床の粗度の代表値、とくに ℓ/K をいかに見積るかが問題である。

いかに不規則であるといえども、これらが計測できる場合は問題はないが、一般に計測が難しい。この場合、何らかの方法で、これらを抵抗効果が等価な粒径分布に変換することが考えられる。しかしながら、抵抗を等価にすることは、抵抗則が河床の幾何学的要素の他に、水理量など関係する要素が多いので、むしろ複雑さを増すと考えられる。そこで頭部を露出して河床を占めている石について河床で占める面積に等価な大きさを有するものに交換することが考えられる。ただこの場合、河床に占める面積が球の直径でないことに注意しなければならない。

parallel degradation の領域での河床の状態は、河床に作用するまさつ速度に限界まさつ速度 U_{*c} が相当する粒子が流出して、河床が低下し、 $U_* = U_{*c,d}$ の粒径以上の砂れきで覆われる。河床の低下量は残留粒径のせいぜい 2 倍程度である。この領域の河床形態は図 9 (b) に示す状態と考えられる。さて、この砂れ

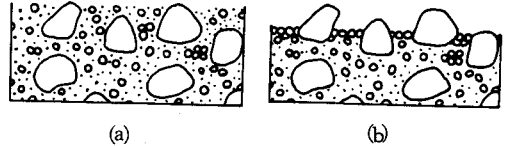


図 9 parallel degradation 後の河床

き面の抵抗を表わすにあたって、河床層の粒径は必ずしも抵抗を表す尺度に適切でない。そこで、河床面で切った試験平面に占める切り口の面積、または試験線で切った切り口の弦の長さに対応する球の大きさを求め、河床面がこの相当粒子によって覆われているものと考えことにする。

(2) 河床平面上の球の面積または弦と、球の直径の関係

単位体積の空間中に直径 D を異にする球の群があるとき、この空間を無作為な試験平面で切ったとき、そこにできる円の大きさと数についての考察は、諏訪³⁾によると次のようになる。

最大直径を $D_{\max}$ とし、 m を適当な正の整数とし、 $D_{\max} = m \Delta D$ により区間 ΔD を定める。 $1 \leq i \leq m$ である全ての i について、その直径が $D_{i-1} = (i-1) \Delta D$ と $D_i = i \Delta D$ の間にある球の数を $N_{v0}(i)$ とする。一方、試験平面の円の直径を δ とし、 δ についても $\delta_{\max} = m \Delta \delta$ であるように $\Delta \delta$ をきめる。 $1 \leq j \leq m$ である j について、 δ が、 δ_{j-1} と δ_j の間にある円の数を $N_{a0}(j)$ とする。 $N_{v0}(i)$ 、 $N_{a0}(j)$ を行ベクトルでそれぞれ $[N_{v0}]$ 、 $[N_{a0}]$ とし、 $[t]$ をその要素が以下のように定義される行列とする。

$$t_{ij} = \sqrt{i^2 - (j-1)^2} - \sqrt{i^2 - j^2}, \quad (i > j) \quad t_{ij} = 0, \quad (i < j)$$

$$\text{これら行列の間には,} \quad \Delta D = [N_{v0}] [t] = [N_{a0}] \quad (14)$$

$$\Delta \delta = \Delta D \text{ より,} \quad [N_{v0}] = [N_{a0}] [t]^{-1} / \Delta \delta \quad (15) \quad \text{の関係が成立する。}$$

これらの関係は、試験線が球の群と交わって作る弦と、球の直径の間にも適用される。弦の長さ λ が、 λ_{j-1} と λ_j の間にあるものの数を $N_{\lambda 0}(j)$ としたとき、

$$[N_{v0}] = [N_{\lambda 0}] [t]^{-1} / \{(\pi/4) (\Delta \lambda)^2\} \quad (16)$$

がなりたつ。ここで $[t]^{-1}$ は、次の t_{ij} を要素とする行列 $[t]$ の逆行列である。

$$t_{ij} = j^2 - (j-1)^2 \quad (i > j), \quad t_{ij} = 0 \quad (i < j)$$

以上の関係は、空間中の球の分布が、半径 r の確率分布 $p(r)$ として表されるとき、

$$\bar{N}_{a0} = 2\bar{r} N_{v0}, \quad (17) \quad \bar{N}_{a0} = \pi \bar{r}^2 Q_2 N_{v0} \quad (18)$$

が成立する。 $p(r)$ が対数正規分布のとき、

$$N(r) = \frac{N_{v0}}{\sqrt{2\pi} m r} \exp \left\{ -\frac{(\log r - \log r_0)^2}{2m^2} \right\} \quad (19)$$

ここに、 $Q_n = e^{\frac{1}{2}n} (n-1)m^2$, $\bar{r} = r_0 e^{m/2}$ である。

この関係を用いて、不規則な河床面を、試験平面の面積または弦より、それに相当する球径を推定して、その特性長さで、 K あるいは ℓ/K を表現し、抵抗則と比較して、このようなパラメーターを用いたときどの特性長さをとるのが妥当か検討した。図10は、混合砂れき上の水路床に通水して、Armour coat を形成させ、中心線における河床の凹凸を読みとったもので、図に示すように粗粒分は完全に露出していない。この図から λ をよみとり、(16)式によって N_{v0} を求めた結果は、表1のとおりである。この結果は一様分布として表わされ平均値は0.725cmとなる。一方、この床面上に通水して抵抗係数を求めた結果は図11に示す。この流れの抵抗係数 f を対数則で表わしたときの K は、河床面上の相当粒度の平均を用いた

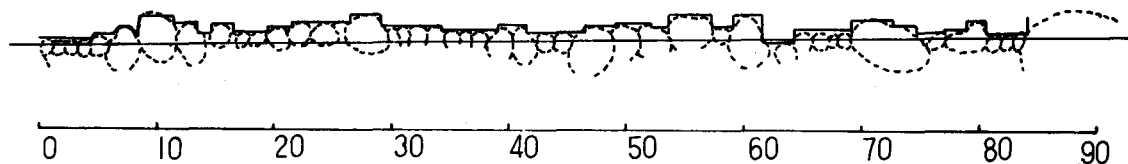


図10 Armour coat の一例

表1 河床面の粒径分布の計算例

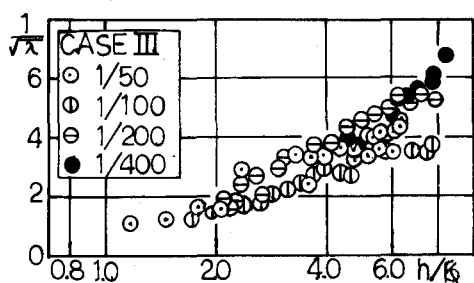


図11 Armour coat の抵抗係数

NO.	λ_i	$N_{a(i)}$	$H_{20(i)}$	$N_{v0(i)}$	$\bar{r}$	$N(r)$
1	1.45	68	0.17370	0.10710	0.725	87.42
2	2.35	14	0.02206	0.00910	1.175	7.42
3	3.25	8	0.00911	0.00266	1.625	2.17
4	4.15	6	0.00535	0.00192	2.075	1.57
5	5.05	(3.6)	0.00264	0.00081	2.525	0.66
6	5.95	(2.4)	0.00149	0.00029	2.475	0.23
7	6.85	(2.0)	0.00108	0.00022	3.425	0.18
8	7.75	(1.6)	0.00077	0.00018	3.875	0.14
9	8.65	(1.2)	0.00051	0.00014	4.325	0.12
10	9.55	(0.8)	0.00031	0.00011	4.775	0.08

V. むすび

全面的に河床砂の移動が生じていない場合の抵抗は、突起する粗度要素の高さと間隔によってきるという考え方に立ちこの影響を表面に現わした式を求めた。そして相対高さ ℓ/K の変化に対して、粗度要素の抗力係数 C_D を測定し、これを抵抗係数式に取入れて、抵抗を求めた。この考え方を自然河道に適用するとき河床の粗度要素の配列を評価することが必要であることから、parallel degradation の河床の粗度要素を取上げて、河床面上の相当粒度の算定を行ない、これを代表径として抵抗則の評価を行うことを試みた。

- 1) 斉藤、深田、岡田；粗面薄層流れの抵抗則についての一考察、第35回土木学会学術講演会概要 p. 368 昭55.9
- 2) Garge, R. J. et al; Variation of the drag coefficient of a sphere rolling along a boundary.
La Houille Blanche, No7 (1969)
- 3) 諏訪紀夫；定量形態学, p. 200 岩波 (1977)