

せん断流モデルによる2次元河床波発生の理論的研究

THEORETICAL STUDY ON THE FORMATION OF RIPPLES, DUNES AND ANTIDUNES
BY MEANS OF A SHEAR FLOW MODEL

中央大学理工学部 正会員 林 泰造
㈱I.N.A.新土木研究所 正会員 ○大西光陽

1. はじめに

小規模河床形態に属する河床波には、砂漣、砂堆および反砂堆があり、これらの河床波は、河床材料と水理条件によって発生領域が異なる。河床波の発生機構および発生領域については数多くの研究がなされてきた。^{1) 2) 3) 4) 5)}しかし、従来の研究では反砂堆を中心としたフルード数の大きい領域での解析が主であり、砂漣、砂堆ならびに反砂堆を統一的に取り扱える理論はなかった。

著者らは前報⁶⁾において、水理量としては従来の解析と同様に、フルード数 F_r を用い、低フルード数で発生する砂漣と砂堆を対象とする解析を行なった。しかし、移動床の立場からいえば、水理条件を表わすパラメータとして、フルード数を用いるよりも無次元掃流力 τ_* を用いる場合が一般的であり、また、適応範囲も広がる。本研究では、前報と同様に2次元せん断流モデルを用い、水理量に無次元掃流力を導入して、砂漣、砂堆ならびに反砂堆を統一的に取り扱い、それら河床形態の発生条件ならびに卓越波数を明らかにするため以下の解析を行った。また、解析結果と実験値の比較検討も行なった。

2. 水流に関する基礎式および境界条件

(1) 基礎式

Fig.1に示すような河床波上の2次元なせん断流れを考える。河床波の移動速度は小さいことから、河床波上を流れる水流は準定常とすると、水流に関する連続方程式と x および y 方向の運動方程式は次式のように書ける。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = gS - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $u = U + u'$: x 方向の流速成分、 $v = v'$: y 方向の流速成分、 U : 主流の流速分布で $(U_s - U(y)) / U_* = (U_s - U_b) (1 - y/D_0)^2 / U_*$ 、 U_* : 主流によるせん断速度、 U_s : 水表面における平均流速、 U_b : 河床面におけるスリップ流速、 $p = P + p'$: 圧力、 $P = \rho g (D_0 - y)$ 、 D_0 : 平均水深、 S : 河床勾配、 $\varepsilon = \kappa U_* D_0 / 6$: 渦動粘性係数、 κ : カルマン定数、である。

(2) 境界条件

水表面および河床面における境界条件には次式を用いる。

水表面 ($y = D_0 + \xi'$) :

$$p = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

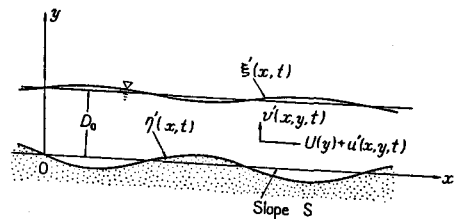


Fig.1 Notations

$$u \frac{\partial \xi'}{\partial x} = v \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{1}{\rho} \tau_{xy} = s \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

河床面 ($y = \eta'$) :

$$u \frac{\partial \eta'}{\partial x} = v \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$u_*^2 = \left(\frac{U_*}{U_b} \right)^2 u_b^2 \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに, ξ' : 水面波の波形, η' : 河床波の波形, $u_* = U_* + u'_*$: 河床に微小擾乱を有するときのせん断速度, $u_b = U_b + u'_b$: 河床擾乱を有するときの河床面上における流速, である。

3. 流砂に関する基礎式

(1) 掃流砂量の連続方程式

河床面上における掃流砂量式は次式で表わされる。

$$\frac{\partial q_B}{\partial t} + \frac{\partial q_B}{\partial x} = 0 \quad \text{at } y = \eta' \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに, q_B : 単位幅単位時間当りの掃流砂量, である。

(2) 掃流砂量式

掃流砂量式には, 林・尾崎 (1979)⁷⁾ の掃流砂量式を用い, 河床せん断力と流砂量との間の遅れ距離を考慮すれば, 次式のように書ける。

$$\phi = \alpha [\tau_* (x - \delta) - \tau_{*c}]^{3/2} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに, $\phi = q_B / \sqrt{(s-1)gd^3}$: 無次元掃流砂量, s : 砂の比重, g : 重力加速度, d : 砂の粒径, $\tau_* = u_*^2 / (s-1)gd$: 無次元掃流力, $\tau_{*c} = u_{*c}^2 / (s-1)gd$: 無次元限界掃流力, u_{*c} : 限界せん断速度, δ : 河床せん断力と流砂量との間に存在する遅れ距離, α : 定数 ($= 1.4$), である。この(10)式を用いることにより, 本解析では限界掃流力の影響が考慮できたことになる。

4. 河床波の卓越波数

(1) 河床波の増幅率

河床に与える微小擾乱 η' を

$$\eta'(x, t) = \eta_0 e^{ik(x-ct)} \quad \dots\dots\dots (11)$$

としたとき, それに伴って生ずるその他の変動成分を次式のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} u'(x, y, t) &= \hat{u}(y) e^{ik(x-ct)} \\ v'(x, y, t) &= \hat{v}(y) e^{ik(x-ct)} \\ p'(x, y, t) &= \hat{p}(y) e^{ik(x-ct)} \\ \xi'(x, t) &= \xi_0 e^{ik(x-ct) - i\theta w} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに, η_0 および ξ_0 : $t=0$ における河床波と水面波の振幅, $\hat{u}$, $\hat{v}$ および $\hat{p}$: y の複素関数, $k=2\pi D_0/L$: 河床波の無次元波数, L : 河床波の波長, $c=c_R+ic_I$: 河床擾乱の無次元複素伝播速度, c_R : 河床波の無次元移動速度, c_I : 河床擾乱の対数的増幅率, θ_w : 水面波の河床波に対する位相差, $i=\sqrt{-1}$: 虚数単位, をそれぞれ表わす。

流水に関する基礎式(1)~(3)と境界条件(4)~(8)式を, プライムのついた微少量について線型化したものを無次元化して, (1)と(2)式を代入することにより, 河床擾乱 η' を与えた際, それに伴って生ずるその他の変動成分は全て求められる。⁸⁾ なお, 基礎式ならびに境界条件の線型化と無次元化の方法は前報と同様なので省略する。

河床波の複素伝播速度 c は, (10)式を(9)式に代入したのち, η' を微少量として $y=0$ のまわりに展開し線型化を行なうと次式を得る。

$$c = \phi_0 \left\{ \frac{1}{2} \frac{\beta}{U_b \phi_0} + \frac{6}{U_b} \frac{u(y=0)}{\eta_0} \right\} e^{-ik\delta r} \quad \dots\dots\dots (13)$$

河床波の増幅率 c_I は(13)式の虚数部を取ることににより得られ,

$$c_I = \phi_0 \left[- \left\{ \frac{1}{2} \frac{\beta}{U_0 \phi_0} + \frac{6}{U_b} \left(\frac{\hat{u}(y=0)}{\eta_0} \right)_I \right\} \sin k\delta r + \frac{6}{U_b} \left(\frac{\hat{u}(y=0)}{\eta_0} \right)_R \cos k\delta r \right] \dots\dots\dots (14)$$

となる。ここに,

$$\left. \begin{aligned} \phi_0 &= 3\alpha \left(\frac{d}{D_0} \right) \tau_{*0} (\tau_{*0} - \tau_{*c})^{1/2}, \quad \tau_{*0} = \frac{U_*^2}{(s-1)gd}, \quad \alpha = 1.4 \\ U_b &= 1 - \frac{2\beta}{3\phi_0}, \quad \beta = \frac{3}{\kappa} \\ \frac{\hat{u}(y=0)}{\eta_0} &= \frac{i}{k} \left\{ \lambda_1 \left(\frac{C_1}{\eta_0} - \frac{C_2}{\eta_0} \right) + \lambda_2 \left(\frac{C_3}{\eta_0} - \frac{C_4}{\eta_0} \right) \right\} \\ \left(\frac{\hat{u}(y=0)}{\eta_0} \right)_I &= \text{Im} \left[\frac{\hat{u}(y=0)}{\eta_0} \right], \quad \left(\frac{\hat{u}(y=0)}{\eta_0} \right)_R = \text{Re} \left[\frac{\hat{u}(y=0)}{\eta_0} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

である。ただし, $\text{Im}[\cdot]$ および $\text{Re}[\cdot]$ はそれぞれ $[\cdot]$ の実数部と虚数部を求める演算記号である。また, (15)式中に含まれる積分定数 $C_1/\eta_0 \sim C_4/\eta_0$ は, 境界条件によって求まり, それを整理すると次式のようになる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1/\eta_0 \\ C_2/\eta_0 \\ C_3/\eta_0 \\ C_4/\eta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここに,

$$\begin{aligned} a_{11} &= (D_1 - EB_1) e^{\lambda_1}, \quad a_{12} = (D_1 + EB_1) e^{-\lambda_1}, \quad a_{13} = (D_2 - EB_2) e^{\lambda_2}, \quad a_{14} = (D_2 + EB_2) e^{-\lambda_2} \\ a_{21} &= (1 - FB_1) e^{\lambda_1}, \quad a_{22} = (1 + FB_1) e^{-\lambda_1}, \quad a_{23} = (1 - FB_2) e^{\lambda_2}, \quad a_{24} = (1 + FB_2) e^{-\lambda_2} \\ a_{31} &= G(\lambda_1^2 + k^2) - \lambda_1, \quad a_{32} = G(\lambda_1^2 + k^2) + \lambda_1, \quad a_{33} = G(\lambda_2^2 + k^2) - \lambda_2, \quad a_{34} = G(\lambda_2^2 + k^2) + \lambda_2 \\ a_{41} &= a_{42} = a_{43} = a_{44} = 1 \end{aligned}$$

$$b_1 = b_2 = 0, \quad b_3 = -ik \left(\frac{U_b}{2} + E \right), \quad b_4 = ik U_b \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= (s-1) \varphi_0^2 \frac{d}{D_0} \tau_{*0} \lambda_1 \left\{ \frac{1}{2\beta \varphi_0} \left(\frac{\lambda_1^2}{k^2} - 1 \right) - \frac{i}{k} U_s \right\}, \quad B_2 = (s-1) \varphi_0^2 \frac{d}{D_0} \tau_{*0} \lambda_2 \left\{ \frac{1}{2\beta \varphi_0} \left(\frac{\lambda_2^2}{k^2} - 1 \right) - \frac{i}{k} U_s \right\} \\
D_1 &= i k \left(\frac{\lambda_1^2}{k^2} + 1 \right), \quad D_2 = i k \left(\frac{\lambda_2^2}{k^2} + 1 \right), \quad E = \frac{2\beta}{\varphi_0}, \quad F = i k U_s, \quad G = \frac{U_b}{4\beta} \varphi_0, \quad U_s = 1 + \frac{\beta}{3\varphi_0} \\
\lambda_1 &= \left[\frac{1}{2} \{ A_1 + (A_1^2 - 4A_2)^{1/2} \} \right]^{1/2}, \quad \lambda_2 = \left[\frac{1}{2} \{ A_1 - (A_1^2 - 4A_2)^{1/2} \} \right]^{1/2} \\
A_1 &= 2k^2 + i 2\beta \varphi_0 k, \quad A_2 = k^4 - i 4\beta^2 k + i 2\beta \varphi_0 k^3
\end{aligned}$$

なお、上式は、前報の F_r を τ_{*k} に書き直したものである。 F_r と τ_{*k} の関係式には次式を用いた。

$$F_r^2 = (s-1) \varphi_0^2 \frac{d}{D_0} \tau_{*0} \quad (18)$$

また、流速係数 φ_0 と相対水深 D_0/d の関係には、

$$\varphi_0 = \frac{U_m}{U_*} = 6.0 + 5.75 \log_{10} \frac{D_0}{2d} \quad (19)$$

を用いた。ここに、 U_m ：断面平均流速，である。

(14)式で求められる河床波の増幅率 c_I のパラメータを整理すると、

$$c_I = c_I(\tau_*, k, D_0/d, \delta_r) \quad (20)$$

となる。いま、遅れ距離 δ_r は、後で述べるように、 $\delta_r = \delta_r(\tau_*, D_0/d)$ と表わされるから、結局 c_I 中に含まれるパラメータは

$$c_I = c_I(\tau_*, k, D_0/d) \quad (21)$$

となる。また、河床波の卓越波数 k_d は、 $k c_I$ を極大とする波数であるから、(21)式より k_d は τ_* と D_0/d の二つのパラメータによって

$$k_d = k_d(\tau_*, D_0/d) \quad (22)$$

と表わせる。従って、本解析では水理量ならびに河床材料の影響を無次元掃流力 τ_* と相対水深 D_0/d によって表わすことになる。なお、(14)式にもとずき計算される河床波の卓越波数については、後で述べる。

5. 遅れ距離

遅れ距離 δ が砂粒運動の 1 ステップの長さに対応していることは林・尾崎 (1978)⁹⁾ により明らかにされている。

中川・辻本 (1980)¹⁰⁾ は、掃流力が小さい領域で実験を行ない、掃流力が小さい場合の 1 ステップ長さ δ_s として、Einstein (1950)¹¹⁾ と同じ式形を用い、次式のように表わした。

$$\delta_s = \lambda_s d \quad (23)$$

中川・辻本によれば、 $\lambda_s = 5 \sim 7$ ，である。この(23)式は、限界掃流力付近において、ひとたび移動し始めた砂粒は、少なくとも粒径の数倍の距離だけ移動するということを表わしている。つまり、(23)式の δ_s は、砂粒移動の最小単位を表わしていると考えられる。

掃流力が大きい場合の 1 ステップ長さについては、林・尾崎 (1979)⁷⁾ は次式を理論的に導きだした。

$$\delta_s = \lambda_s \tau_* d \quad (24)$$

本解析では、掃流力が小さい領域から大きい領域までを統一して解析をすすめるために、(23)と(24)式より、

砂粒の1ステップの長さとして次式を用いた。

$$\delta_* = (\lambda_{s1} \tau_* + \lambda_{s2}) d \dots\dots\dots (25)$$

25式を水深 D_0 で無次元化すると、無次元遅れ距離 δ_r はつぎようになる。

$$\delta_r = (\lambda_{s1} \tau_* + \lambda_{s2}) \frac{d}{D_0} \dots\dots\dots (26)$$

ここで、 λ_{s1} および λ_{s2} については、篠原・椿¹²⁾、Yalin¹³⁾、林・尾崎⁷⁾ならびに中川・辻本¹⁰⁾の研究を参照して、 $\lambda_{s1} = 20$ 、 $\lambda_{s2} = 15$ とした。

6. 解析結果と実験値の比較

本解析から得られた小規模河床波の卓越波数を相対水深 D_0/d をパラメータとし、Guyら¹⁴⁾の実験値とともに図示したものがFig.2である。図中の実線が14式から与えられる河床波の卓越波数を表わしている。

まず、Fig.2から、本解析より得られた卓越波数曲線は、相対水深 D_0/d をパラメータとして、砂漣、砂堆ならびに反砂堆に対応する三つの曲線群からなっていることがわかる。そしてこれらの曲線群はそれぞれ、実験値の河床形態をよく説明している。

砂漣と砂堆に対応する卓越波数曲線について考察すると、相対水深 D_0/d が $200 < D_0/d \leq 500$ の卓越波数は、掃流力が大きくなるに従って、砂漣から砂堆へ連続的に変化する。相対水深が $D_0/d \geq 750$ の卓越波数曲線は、掃流力 τ_* が小さい領域では砂漣のみが発生し、 $\tau_* >$

0.15 の領域では、砂漣と砂堆の発生領域が完全に分かれ、同じ τ_* に対して砂漣と砂堆が共存しうる領域である。砂漣の発生する波数領域は $k D_0 > 2$ で D_0/d の値によって大きく変化するが、砂堆の発生する波数領域は、 $0.4 < k D_0 < 5$ に限られていることもわかる。

反砂堆については、相対水深 D_0/d が小さいとき ($D_0/d < 750$) のみ発生し、相対水深が大きくなると、反砂堆に相当する卓越波数はなくなる。このことは、実験値からもわかる。また、掃流力が大きく ($\tau_* > 1$) になると、反砂堆の卓越波数は τ_* よりも、 D_0/d の影響を受けやすくなる。

このように、本解析から得られた解析結果は、砂漣、砂堆および反砂堆の発生条件、発生領域ならびに卓越波数の変化について、実験値を十分に説明していることがわかる。

Fig.3には、無次元掃流力 τ_* をパラメータとして、相対水深 D_0/d に対する砂漣と砂堆の卓越波数を示した。 $\tau_* < 0.1$ の卓越波数曲線では、砂漣と砂堆の明瞭な区別はなく、 D_0/d が小さい領域から大きい領域に変化するに従って砂堆から砂漣に河床形態が変化すると考えられる。また、 $\tau_* > 0.1$ における卓越波数は、砂漣と砂堆に対応する波数領域が異なって来る。砂漣の卓越波数は τ_* の変化による影響は少なく、 D_0/d によって決まるのに対し、砂堆の卓越波数は τ_* と D_0/d が複雑にからみあって求まることになる。ただし、砂堆の発生する波数領域は、 $0.4 < k D_0 < 5$ である。

Fig.4には、Fig.3と同じGuyらの実験値とともにYalin¹⁵⁾、¹⁶⁾および日野¹⁷⁾(1964, 1971)および日野(1968)の

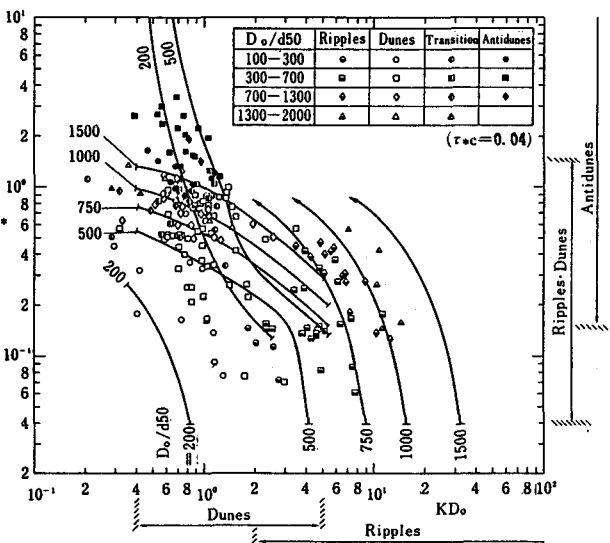


Fig.2 Comparison of Predicted and Observed Wave Lengths (Data from :Guy, Simons and Richardson (1966)¹⁴⁾)

式を示しておいた。Yalinおよび日野の式は次の通りである。

$$\text{砂 漣: Yalin (1964)}^{15)} L = 1000 d_{50} (k D_0 = 0.0063 D_0/d_{50}) \dots\dots\dots (27)$$

$$\text{砂 堆: Yalin (1964)}^{15)} L = 5 D_0 (k D_0 = 1.26) \dots\dots\dots (28)$$

$$\text{日 野 (1968)}^{17)} L = 7 D_0 (k D_0 = 0.90) \dots\dots\dots (29)$$

$$\text{Yalin (1971)}^{16)} L = 6 D_0 (k D_0 = 1.00) \dots\dots\dots (30)$$

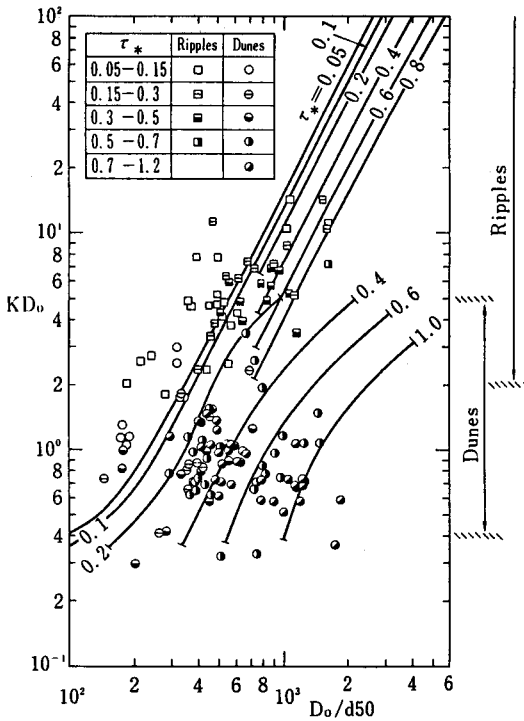


Fig.3 Comparison of Predicted and Observed Wave Lengths.

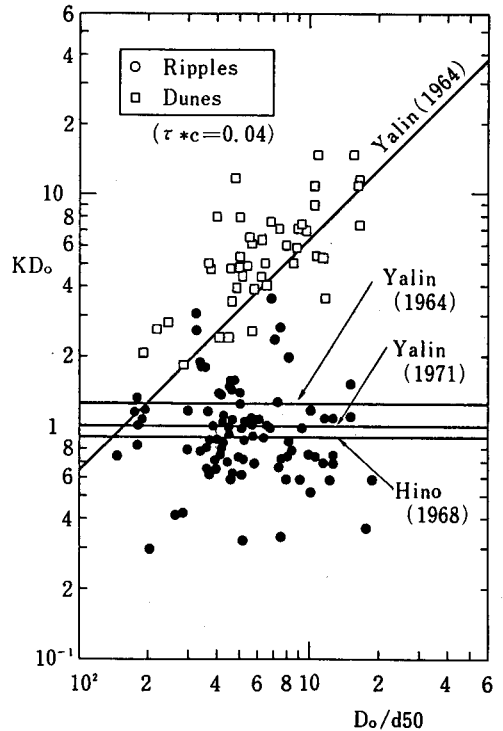


Fig.4 Illustration of Various Formulae Previously Published on Sand Wave Configurations.

(Data from: Guy, Simons and Richardson (1966))¹⁴⁾

砂漣に関するYalinの式(27)は、著者らの解析の $\tau_* \leq 0.1$ の卓越波数曲線に対応している。また、砂堆の卓越波数は、Fig.3で示すように、 τ_* と D_0/d に関係して変化するが、砂堆の発生する波数領域が $0.4 < k D_0 < 5$ と限られている。従って、Yalinおよび日野の式(28)~(30)は、その波数領域の平均波数を求めたことになる。

以上のように、河床波の発生領域ならびに卓越波数を見積るには、複雑にからみあった無次元掃流力 τ_* と相対水深 D_0/d の関係を明らかにする必要がある。本研究がこれらの関係を明らかにし、実験値ならびに従来の実験式を十分に説明づけていると考えられる。

7. むすび

本研究は、2次元せん断流モデルを用いて、小規模河床形態に属する砂漣、砂堆ならびに反砂堆に関する理論解析を行なった。本解析より導かれた主な結果を以下に示しておく。

1) 本解析では、移動床の立場に立って、無次元掃流力 τ_* と相対水深 D_0/d を用いて解析を行なった。

この結果、砂漣、砂堆ならびに反砂堆の発生条件および卓越波数を統一的に取り扱えるようになった。これらの関係は、Fig.2ならびにFig.3に示されている。

2) 砂漣の波長は、従来から¹⁸⁾言われてたように粒径のみに関係するのではなく、掃流力 τ_* にも関係している (Fig.3)。

3) 砂堆の卓越波数は、掃流力 τ_* と相対水深 D_o/d が複雑にからみあっており、 τ_* と D_o/d の組合せによって波長が決まる (Fig.3)。

Table.1

4) 砂堆の発生する波数領域は、 $0.4 < kD_o < 5$ に限られる。

5) 反砂堆は、相対水深 $D_o/d < 750$ でのみ発生する。また、卓越波数は、 $\tau_* > 1.5$ の領域では、 τ_* にはあまり関係せず、 D_o/d によって決まる (Fig.2)。

τ_*	$D_o/d_{50} < 750$	$D_o/d_{50} > 750$
≤ 0.1	Ripples · Dunes	Ripples
> 0.1	Dunes	Ripples · Dunes
> 1.5	Antidunes	—

6) 各河床形態と掃流力 τ_* ならびに相対水深 D_o/d の関係を整理すれば、Table.1のようになる。

なお、本解析より得られた各河床波の卓越波数を用いて、河床波の波形勾配が算定できれば、河床波を有する移動床の抵抗則をみいだすことができると考える。^{19) 20) 21)}

(謝辞) 本研究の遂行に当っては、(財)電力中央研究所河川環境研究室尾崎幸男氏から有益な討議を寄せられた。記して深く謝意を表する。

参考文献

- 1) Kennedy, J. F. : The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channel, Jour. Fluid Mech., vol.16, pp.521-544, 1963.
- 2) Hayashi, T. : Formation of dunes and antidunes in open channels, Proc. ASCE. vol.96, HY 2, pp.357-366, 1970.
- 3) Engelund, F. : Instability of erodible beds, Jour. Fluid Mech. vol.42, pp.225-244, 1970.
- 4) Fredsøe, J. : On the development of dunes in erodible channels, Jour. Fluid Mech., vol.64, pp.1-16, 1974.
- 5) 林 泰造・大西光陽：河床安定理論の立場からみた小規模河床波の発生について、第23回水理講演会論文集, pp.169-179, 1979.
- 6) 林 泰造・大西光陽：小規模河床波の卓越波数について、第24回水理講演会論文集, pp.313-321, 1980.
- 7) 林 泰造・尾崎幸男：掃流砂量に関する基礎的研究、第23回水理講演会論文集, pp.157-167, 1979.
- 8) 林 泰造・大西光陽：波上境界上の開水路流れについて、第34回年次学術講演会講演概要集, 第2部, pp.173-174, 1979.
- 9) Hayashi, T. and Ozaki, S. : Formation of alternating bars and braids, Proc. of U. S. Japan Binational Seminar on Erosion and Sedimentation, Hawaii, 1978.
- 10) 中川博次・辻本哲郎・細川泰広・村上正吾：平坦河床上の砂れきの運動機構解明における確率論的取り扱い、第24回水理講演会論文集, pp.27-34, 1980.
- 11) Einstein, H. A. : The bed load function for sediment transportation in open channel flows, U. S. Dept. Agr. Tech. Bull., 1026, 1950.

- 12) 篠原謹爾・椿 東一郎：河床砂礫の移動機構に関する一考察，九州大学応用力学研究所所報，第10号，pp.85-94，1957.
- 13) Yalin, M. S. : Mechanics of Sediment Transport, 2nd edition, Pergamon Press, p.135, 1977.
- 14) Guy, H. P., Simons, D. B. and Richardson, E. V. : Summary of alluvial channel data from flume experiments, 1956-61, U. S. Geol. Surv. Prof. Paper, 462-I, 1966.
- 15) Yalin, M. S. : Geometrical properties of sand waves, Proc. ASCE, HY5, pp.105-119, 1964.
- 16) Yalin, M. S. : On the formation of dunes and meanders, Proc. IAHR, vol.3, pp.101-108, Paris, 1971.
- 17) Hino, M. : Equilibrium-range spectra of sand waves formed by flowing water, Jour. Fluid Mech., vol.34, pp.565-573, 1968.
- 18) 土木学会水理委員会（移動床流れの抵抗と河床形状研究小委員会）：移動床流れにおける河床形態と粗度，土木学会論文報告集，第201号，pp.65-91，1973.
- 19) 林 泰造・矢内栄二：砂堆の波形勾配及び掃流砂量について，第24回水理講演会論文集，pp.323-328，1980.
- 20) 石川忠晴：河川の流砂に関する基礎的研究，東京工業大学土木工学科，研究報告，№24，June, 1978.
- 21) 岸 力・黒木幹男：移動移床流れにおけ河床形状と流体抵抗(1)，北海道大学工学部研究報告，1972.