

河床波を伴う流れの支配方程式

A system of equations governing an alluvial flow with sand waves

東京工業大学・工学部 ○ 福岡 捷 二
鹿島建設株式会社 奥 津 一 夫

まえがき 河床波を伴う移動床流れを 流砂, 河床波を含む流動層とその上の流れの2相に分ける。それぞれの相についてたてられた運動方程式, 連続方程式からなる4個の支配方程式と流れと河床面の境界条件(波速の式)を用い, 流動層, 流動層上の流れを解く。これより砂堆, 上流に移動する反砂堆, 下流に移動する反砂堆について河床波と水面波の相互の関係を求め, 実測値と比較する。

1. 基礎方程式ならびに河床波と流動層界面を規定する条件式

流動層を伴う移動床上の流れの諸量を図-1に定義する。流動層は, 河床波の一部を構成し, 流砂はすべて流動層内で輸送されるものとする。流動層には砂粒子が詰っており, 内部に空隙, 水粒子は存在しないものとする。流動層の運動方程式, 流砂の連続式, 流れの運動方程式, 流れの連続式はそれぞれ次式で与えられる。

$$\frac{\partial q_B}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_B}{\alpha} \right)^2 - \left(\frac{q_B}{\alpha} \right)^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = g \sin \theta \cdot \alpha + \frac{\tau_0 - \tau}{\rho_s} - \frac{g}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_w h \alpha + \frac{\rho_s}{2} \alpha^2 \right) \cos \theta \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(z + \frac{\alpha}{1-\lambda} \right) + \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial q_B}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u^2}{2g} \right) + \frac{d}{dx} \left(z + \frac{\alpha}{1-\lambda} + h \cos \theta \right) + \frac{dh_e}{dx} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dq}{dx} = 0 \quad (4)$$

ここに ρ_s , A_w はそれぞれ砂粒と水の密度であり, λ は空隙率である。

次に流動層と河床面の境界を記述する条件式を求める。

図-2に示すように, 流動層と河床面の境界を構成する一連の砂粒子は, 侵食され流動層内を半波長だけ下流後に下流側の河床面に堆積し, その結果河床面は波形を変えずに一定速度で移動するものとする。上流側で侵食された一連の砂粒子が下流側の河床面上に堆積すると, 河床波は近似的に砂粒子径(d_s)だけ移動する。一方, 砂粒子が移動するに要する時間(Δt)は砂粒子の速度(u_b)と波長(L)を用いて $\Delta t = L/2/u_b$ となる。

$u_b = q_B/\alpha$ であるので, 河床波の波速(C)は

$$C \div \frac{d_s}{\Delta t} = \frac{2d_s}{L} \frac{q_{B0}}{\alpha_0} \left(1 + \frac{q'_B}{q_{B0}} - \frac{\alpha'}{\alpha_0} \right)$$

となる。ここに q_{B0} , α_0 は流砂量, 流動層厚の平均値, q'_B , α' はその変動量である。河床波は一定速度で移動するので, 上式中の~~~~~項は, 0または定数でなければならない。いまこの値を0とすると境界面の条件式は

$$\frac{q'_B}{q_{B0}} = \frac{\alpha'}{\alpha_0} \quad (5)$$

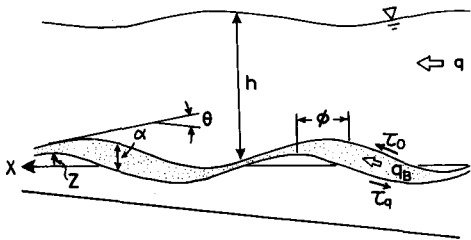


図-1 物理量の定義

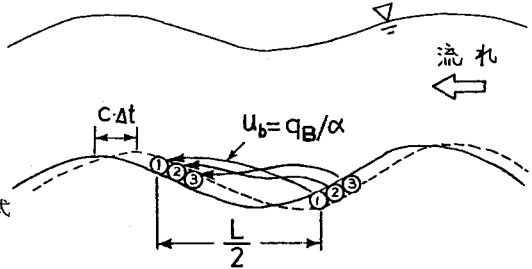


図-2 河床波の伝播のメカニズム

となる。式(1)～(4)および(5)を平均量と変動量に分け、線形化しかつ次式で無次元化する。

$$q_B^* = \frac{q_B'}{(1-\lambda)U_0\alpha_0}, \quad t^* = \frac{U_0}{\alpha_0} t, \quad x^* = \frac{x}{\alpha_0}, \quad \alpha^* = \frac{\alpha'}{(1-\lambda)\alpha_0}, \quad z^* = \frac{z'}{\alpha_0}, \quad u^* = \frac{u'}{U_0}$$

いま、*印をとって無次元量を示すと、各方程式は次のように表現される。

$$E \left\{ \frac{\partial q_B'}{\partial t} + 2N \frac{\partial q_B'}{\partial x} - 2N^2 \frac{\partial \alpha'}{\partial x} + \frac{1}{(1-\lambda)G} \left(\frac{\partial z'}{\partial x} + \rho' \frac{\partial h'}{\partial x} \right) + \left(\frac{\rho'}{F_0} + \frac{1}{G} \right) \frac{\partial \alpha'}{\partial x} \right\} = 6\eta u' - \left(1 + \frac{2\rho'}{J} \right) q_B' \quad (6)$$

$$\frac{\partial(z' + \alpha')}{\partial t} + \frac{\partial q_B'}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

$$(F_0 - 1) \frac{dh'}{dx} + \frac{d(z' + \alpha')}{dx} - Mh' + \frac{d^2(z' + \alpha')}{dx^2} \sin \theta_0 = 0 \quad (8)$$

$$u' = -h' \quad (9), \quad q_B' = Na' \quad (10)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= \frac{\alpha_0 q_0^2}{gh_0^3 \cos \theta_0}, \quad M = \frac{q_0^2}{2gh_0^3 \cos \theta_0} \left(3f_b' + 4 \frac{h_0}{B} f_w' \right) \\ E &= 6 \frac{\rho_s}{\rho_w} (1-\lambda) \frac{\eta}{f'}, \quad \eta = \frac{1}{1-\lambda} \frac{q_0}{U_0 h_0}, \quad N = \frac{q_0}{U_0 \alpha_0} \\ G &= \frac{U_0^2}{g \alpha_0 \cos \theta_0}, \quad J = \frac{f' U_0^2}{g \alpha_0 \sin \theta_0}, \quad \rho' = \frac{\rho_w}{\rho_s} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式(6)～(10)の未知数は h' , u' , q_B' , z' , α' の5個である。

2. 理論解

解の形式を次のようにおく。

$$z' = a(t) \sin k(x - ct) \quad (12)$$

$$\alpha' = b(t) \sin \{k(x - ct) + \phi\} \quad (13)$$

$$h' = h(t) \sin \{k(x - ct) + \kappa\} \quad (14)$$

$$u' = u(t) \sin \{k(x - ct) + \lambda\} \quad (15)$$

$$q_B' = q_B(t) \sin \{k(x - ct) + \psi\} \quad (16)$$

(9)式に(14), (15)式を代入すると(17)式の関係を得る

$$u(t) = -h(t), \quad \kappa = \lambda \quad (17)$$

さらに(8)式に(12), (13), (14), (17)式を代入する。恒等的に満たされなければならない条件より、(18)式を得る。

$$\left. \begin{aligned} h(t) &= k \sqrt{\frac{1+k^2 \sin^2 \theta_0}{M^2 + k^2 (F_0 - 1)^2}} \cdot \sqrt{a^2(t) + b^2(t) + 2a(t)b(t) \cos \phi} \\ \sin \kappa &= \frac{(a + b \cos \phi) \{k^2 (F_0 - 1) \sin \theta_0 + M\} + b k \sin \phi (F_0 - 1 - M \sin \theta_0)}{\sqrt{\{M^2 + k^2 (F_0 - 1)^2\} \{1 + (k \sin \theta_0)^2\} (a^2 + b^2 + 2ab \cos \phi)}} \\ \cos \kappa &= \frac{k(a + b \cos \phi) (F_0 - 1 - M \sin \theta_0) - b \sin \phi \{k^2 (F_0 - 1) \sin \theta_0 + M\}}{\sqrt{\{M^2 + k^2 (F_0 - 1)^2\} \{1 + (k \sin \theta_0)^2\} (a^2 + b^2 + 2ab \cos \phi)}} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

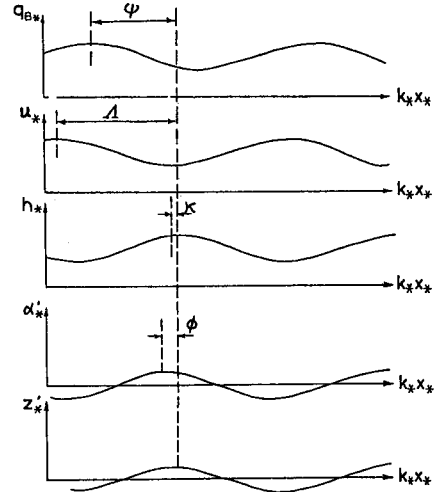


図-3 位相差の相互関係

(10) 式に (13), (16) 式を代入し, 恒等的に満たすべき条件より次式を得る。

$$q_B(t) = N_b(t), \quad \phi = \psi \quad (19)$$

(6) 式に (17), (18), (19) 式を代入し, 恒等条件より $a(t)/b(t)$, ϕ について次式が求まる。

$$\left\{ \frac{b(t)}{a(t)} \right\}^2 = \frac{M_1^2 + M_2^2}{F_1^2 + F_2^2} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin\phi &= - \frac{M_1 F_2 + M_2 F_1}{\sqrt{(M_1^2 + M_2^2)(F_1^2 + F_2^2)}} \cdot \frac{a(t)}{b(t)} \\ \cos\phi &= \frac{M_1 F_1 - M_2 F_2}{\sqrt{(M_1^2 + M_2^2)(F_1^2 + F_2^2)}} \cdot \frac{a(t)}{b(t)} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= ENkC - E\left(\frac{\rho'}{G} + \frac{\rho'}{F_0}\right)k - \frac{k}{G(1-\lambda)} f_2 - 6\eta f_1 \\ M_2 &= EN\left(\frac{\dot{b}}{b}\right) + \left(1 + \frac{2\rho'}{J}\right)N + 6\eta f_2 - \frac{k}{G(1-\lambda)} f_2 \\ F_1 &= -6\eta f_2 + \frac{k}{G(1-\lambda)} f_1 \\ F_2 &= -\frac{k}{G(1-\lambda)} - 6\eta f_1 - \frac{k}{G(1-\lambda)} f_2 \\ f_1 &= k \frac{k^2(F_0-1)\sin\theta_0 + M}{M^2 + k^2(F_0-1)^2} \\ f_2 &= k^2 \frac{F_0 - 1 - M\sin\theta_0}{1 + k^2\sin^2\theta_0} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

(22) 式の M_2 の中に 流動層厚さの時間微分 $\dot{b}$ が含まれている。 $\dot{b}/b \ll 1$ なる関係が一般に成立するので $\dot{b}/b$ の項は他の項に比して無視でき (22) 式は簡単になる。 E, N, C, k が既知であるときには式 (17), (18), (19), (20), (21), (22) より, (12) ~ (16) 式中の $h(t), u(t), q_B(t), \phi, \kappa, A, \psi$ はすべて $a(t), b(t)$ の関数として表現することができる。

最後に, 式 (7) に式 (12), (13), (19) を代入すると恒等的に満たすべき条件より, 次の連立微分方程式が求まる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{a}(t) + \dot{b}(t)\cos\phi + b(t)Ck\sin\phi - kN_b(t)\sin\phi &= 0 \\ -Cka(t) + \dot{b}(t)\sin\phi - Ckb(t)\cos\phi + kN_b(t)\cos\phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

式 (23) を解くと $a(t), b(t)$ に関する常微分方程式が求まる。

$$\left. \begin{aligned} \sin\phi\ddot{a}(t) + kC\cos\phi\dot{a}(t) - k(N-C)\sin\phi b(t) &= 0 \\ \sin\phi\ddot{b}(t) + kN\cos\phi\dot{b}(t) - k^2C(N-C)\sin\phi b(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式 (24) は, $a(t), b(t)$ に関する 2 階の振動型方程式である。 $b(t)$ については簡単に解け, 次の 3 つの異なる一般解が得られる。

$$(1) \quad (kN\cos\phi)^2 > 4Ck^2(C - N)\sin^2\phi$$

$$b(t) = A_1 e^{m_1 t} + A_2 e^{m_2 t}$$

$$m_{1,2} = \frac{-kN\cos\phi \pm \sqrt{(kN\cos\phi)^2 - 4Ck^2(C-N)\sin^2\phi}}{2\sin\phi} \quad (25)$$

$$(2) \quad (kN\cos\phi)^2 = 4Ck^2(C - N)\sin^2\phi$$

$$b(t) = A_1 e^{m_1 t} + A_2 t e^{m_1 t}$$

$$(26)$$

$$(3) \quad (kN\cos\phi)^2 < 4Ck^2(C - N)\sin^2\phi$$

$$b(t) = e^{pt}(B_1 \cos qt + B_2 \sin qt)$$

$$(27)$$

$$m_1 = p + qi, \quad m_2 = p - qi$$

式(25)～式(27)の $b(t)$ を式(24)の $a(t)$ に関する微分方程式に代入し解くと、それぞれの $b(t)$ に対応して $a(t)$ の一般解が求まる。かくして求まった $a(t)$ 、 $b(t)$ より、未知の値であった式(12)～式(16)の z' 、 α' 、 h' 、 u' 、 q'_B が E 、 N 、 C および k の関数として求まる。

式(11)中の E と N は流れと流砂量の関係を示す重要なパラメータである。二次元水路において、異なった二次元河床波が発生している状態で流砂量とそれに対応する水理量を測定し、 E 、 N を計算して両者の関係を整理したものが図-4である。パラメータ N の中にあらわれる流動層の平均厚さ α_0 については信頼し得る資料はないので、ここでは $\alpha_0 = 5 d_s$ と仮定して求めた。 E と N はほぼ一義的な関係にあり、また河床形態により値が明確に区分され、それぞれ固有の (E, N) 値をもつことがわかる²⁾。図-5は Guy らによる三次元河床波データ³⁾を同様に整理したものである。二次元データに比して各河床波の (E, N) の中央値のまわりのバラツキは大きいようであるが、 E 、 N の特性は二次元データと同様である。このように (E, N) 値は、河床形態がきまるとほぼ定まった値をとることから、 E 、 N には、それぞれの河床形態の中央値を採用することにする。

3. 理論値と実測値の比較

それぞれの河床形態に対応する E 、 N 、 k 、 C の実測値を用い、式(17)～式(22)および式(25)～式(27)より次の2つについて理論値と実測値を比較する。

(1) 水面波と砂面波 ($z' + \alpha'$) の位相差

(2) 水面波と砂面波の振巾関係

図-6は、上流に進む反砂堆の一例で、砂面と水面の相対的な大きさ関係を表わしている。砂面と水面の位相差はほとんどなく、同位相と考えることができる。また、砂面と水面の振巾の絶対値は特定できないが、水面波の振巾の方が砂面波の振巾より大きく、実際の上流に伝播する反砂堆と同様な関係を示していることがわかる。

図-7は、下流に移動する反砂堆の理論と実測値の

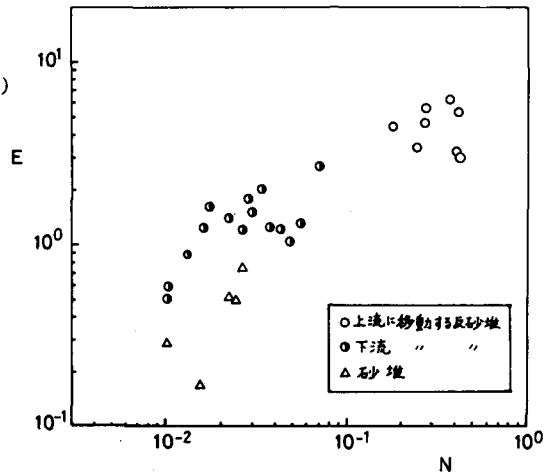


図-4 二次元河床波の (E, N) 値

比較を示す。結果は、上流に移動する反砂堆と同様に 水面波と砂面波は 同位相であり、水面波の振巾が砂面波のそれより大きいことがわかる。水深関係は 下流に移動する反砂堆の特徴である河床波頂部で水深小、谷部で水深大とはならない。しかし、すでに明らかにされたように、下流に移動する反砂堆は、河床波下流側で剝離を起こしており、剝離を死水域と考えれば、上流に移動する反砂堆と同じ水深関係になる。²⁾

図-8 は、砂堆上の流れの一例である。砂堆の特徴である砂面波と水面波が逆位相関係になること、および砂面の振巾が水面の振巾より大であることなど理論は実測結果を適切に説明しているといえる。

あとがき 河床波を含む流動層を単純なモデルで置きかえ、流動層を構成する砂粒子に関する運動量方程式を導いた。移動床流れを流動層とその上の清水流れの二相に分けることにより、両者の境界で成立すべき運動学的条件(境界の波速を規定する関係式)を導いた。流動層と流れに関する4個の支配方程式および上記境界条件式より得た理論は、流動層を伴う移動床流上の流れの大略を適切に説明しているといえる。

なお、白砂⁴⁾が 河床波を伴う移動床流れを流動層とその上の流れに分け、いずれの相の運動もポテンシャル流れで記述できると仮定し、発生領域を解析的に求めている。本研究では、移動床流れが“実在流体の二相流れ”であることに着目し、支配方程式、境界条件式を導き解析しているが、根本的には白砂の研究のライン上にある。本研究は、文部省科学研究費自然災害特別研究(1)(代表者、京大教授芦田和男)の援助を受けた。
記して謝意を表する。

参考文献 1) 岩佐義朗, 水理学, 森北出版, pp.148~149, 1967. 2) 福岡, 第17回自然災害シンポ, pp.183~186, 1980.
3) Guyら, U.S.Geol.Survey, 1966. 4) 白砂, 電力中研技術第二研究所報, 研究報告 70013, pp.1-15, 1971.

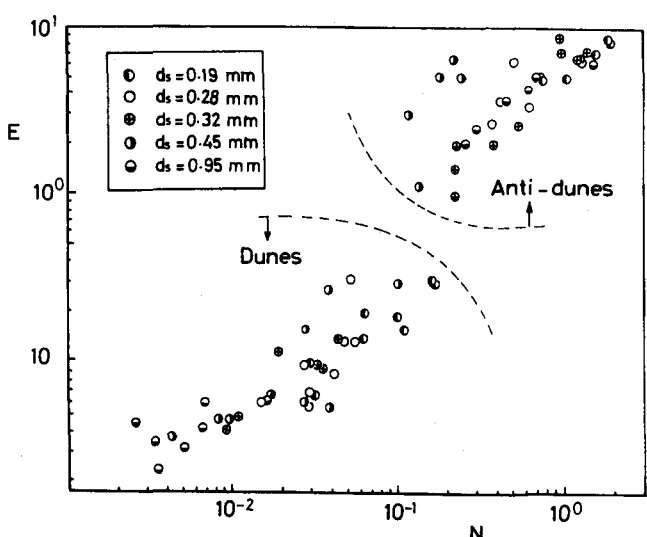


図-5 三次元河床波の (E , N) 値

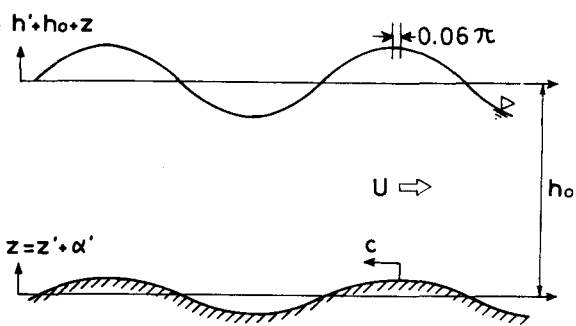


図-6 上流に進む反砂堆上の流れ

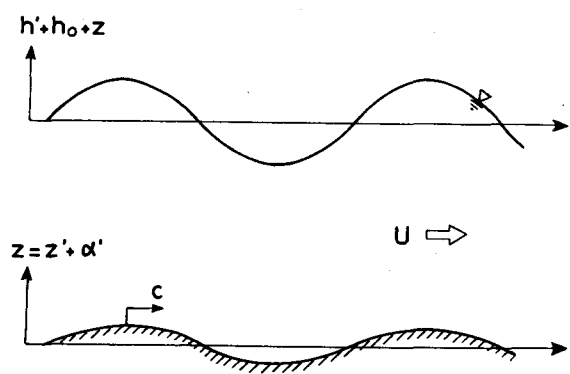


図-7 下流に進む反砂堆上の流れ

Appendix 流動層の運動方程式の誘導

流動層の曲率は小さいと考えると、流動層内を運動する粒子に対する運動方程式は、次式で与えられる。

$$\frac{\partial u_b}{\partial t} + u_b \frac{\partial u_b}{\partial x} + v_b \frac{\partial u_b}{\partial z} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (A-1)$$

流動層上の流れの水面の変化を考慮し、流動層の圧力分布が静水圧分布をすると仮定すると、流動層内の圧力勾配は

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_w g \frac{\partial h \cos \theta}{\partial x} + \rho_s \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_2 - z) \cos \theta \quad (A-2)$$

となる。運動方程式を一次元化するため (A-2) 式を (A-1) 式に代入し、流動層厚 (α_1, α_2) にわたって積分する。

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial u_b}{\partial t} dz + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} u_b \frac{\partial u_b}{\partial x} dz + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v_b \frac{\partial u_b}{\partial z} dz \\ = g \sin \theta \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dz - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \tau}{\partial z} dz - \frac{g}{\rho_s} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left\{ \rho_w \frac{\partial h \cos \theta}{\partial x} + \rho_s \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_2 - z) \cos \theta \right\} dz \end{aligned} \quad (A-3)$$

いま、流動層内の粒子の連続式より

$$v_b = - \int \frac{\partial u_b}{\partial x} dz \quad (A-4)$$

(A-4) を (A-3) の左辺第三項に代入し部分積分を実行する。このとき (A-3) は次式となる。

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial u_b}{\partial t} dt + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} 2u_b \frac{\partial u_b}{\partial x} dz - u_b \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial u_b}{\partial x} dz \\ = g \sin \theta \cdot \alpha + \frac{\tau_0 - \tau_q}{\rho_s} + \frac{g}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_w h \cdot \alpha + \frac{\rho_s}{2} \alpha^2 \right) \cos \theta \end{aligned} \quad (A-5)$$

(A-5) の左辺各項に Leibnitz rule を適用し、若干の計算を行うと最終的に一次元化された流動層の運動方程式(1)式を得る。

$$\underbrace{\frac{\partial q_B}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_B}{\alpha} \right)^2 - \left(\frac{q_B}{\alpha} \right)^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x}}_{\text{①}} = \underbrace{g \sin \theta \cdot \alpha + \frac{\tau_0 - \tau_q}{\rho_s}}_{\text{②}} + \underbrace{\frac{g}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_w h \cdot \alpha + \frac{\rho_s}{2} \alpha^2 \right) \cos \theta}_{\text{④}} \quad (1)$$

ここに

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} u_b dz = q_B, \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} u_b^2 dz = u_b^2 (\alpha_2 - \alpha_1), \quad \alpha = \alpha_2 - \alpha_1,$$

$$v_b(z=\alpha_2) = \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}, \quad v_b(z=\alpha_1) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial t}$$

(1) 式中の各項の意味は、次のとおりである。

- ①：流動層内を流れる砂粒子の慣性項， ②：重力項， ③：流動層の上面と下面に作用するせん断力の差， ④：流動層に働く圧力勾配。

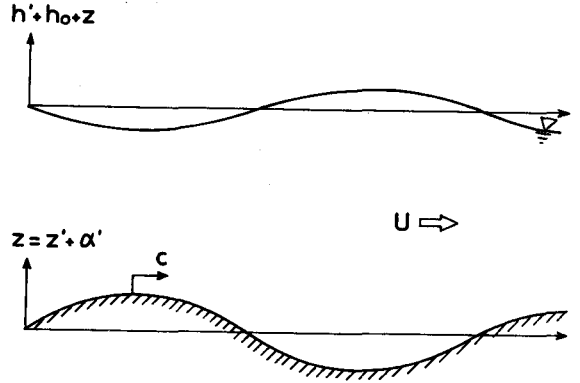


図-8 砂堆上の流れ