

混合砂れき床の粗度と粒径別移動限界
Roughness of Alluvial Bed Composed of Sand Mixtures
and Incipient Motion of Individual Size-Class Sand

京都大学工学部 正 員 中 川 博 次
京都大学工学部 正 員 辻 本 哲 郎
○京都大学大学院 学生員 中 野 晋

1. 序 論

混合砂れき床での流砂問題は、粒径によって流送特性が異なるため必然的に非平衡状況が出現し、河床材料構成が時間的・場所的に変化するなど粒度構成との関連で議論しなければならない。とくに粒径によって限界掃流力が異なることによる粒径毎の流送特性の差が顕著で、それによってarmoringなどの付随的現象が生じているようであり、この意味で、粒径別限界掃流力を考慮した芦田・道上¹⁾、平野²⁾による粒径別流砂量式の提案は意義あるものと言える。そこではEgiazaroff³⁾による粒径別限界掃流力の評価が採用され、それは d_i/d_m (d_i :対象とする粒度クラスの粒径、 d_m :平均粒径)の関数となっている。しかし、芦田ら⁴⁾が粒径別の移動限界と停止限界が異なることを実験的に見出して報告していること、前者が初期移動 (pick-up rateで表わされる)、後者が運動過程 (step lengthで表わされる)に関連したものであることを考慮すると、Egiazaroff式等によって評価されるべき粒径別移動限界掃流力は中川ら⁵⁾のように、粒径別pick-up rateの推定にのみ適用されるべきであろう。すなわち初期移動は対象とする粒子の径とそれが存在する局所的状況に依存するのに対し、運動過程はその粒子径とstep length程度の長さで平均化された河床面凹凸に支配されるというように、混合砂の粒度構成の関与の仕方が異なっていると考えるべきである。いずれにせよ、こうした粒度クラス別の固有の特性が強調されている混合砂の流送問題は、中川らが推奨するように⁵⁾ 粒径別pick-up rate, step lengthなどに分解して解析するのが望ましい。

ところで粒径別移動限界掃流力としては前述のようにEgiazaroff式³⁾あるいは芦田・道上によるその修正式¹⁾が頻用され、実験値との比較的良好な適合が見られるが、そこに含まれる相等砂粗度 (たいていは d_m で代用される)の合理的な推定などを始めとし、主として粒径別限界掃流力が単に $\zeta_i \equiv d_i/d_m$ だけで決まり粒度分布のかたちの効果ははいっていないことに対する不自然さが指摘されている。本研究では混合砂れきの粒径別移動限界について、混合砂の粒度分布とそれによって構成される床面状態の特性に関する考察にもとづいた取り扱いを行ない、とくに粒度分布のかたちの効果が粒径別移動限界にどのように効いているかについて検討する。

ところで限界掃流力付近での初期移動形式としては、粒径の余程小さいものを除くと概ね転動離脱形式を仮定して良いだろう。一つの砂れきに作用する流体力として抗力と揚力を考え、抗力係数 C_D 、揚力抗力比を k_1 とする。また対象とする砂れきのぬけ出し角 (angle of escape) を β とすると、移動限界代表流速 (対象とする砂れきの中心位置での局所流速) u_{bc} は、

$$\frac{u_{bc}^2}{(\sigma\rho - 1)gd} = \frac{2A_3 \sin\beta}{C_D A_2 (k_1 \sin\beta + \cos\beta)} \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる。但し、 σ/ρ :砂の比重、 A_2, A_3 砂れきの面積及び体積に関する形状係数である。 $\sigma/\rho, C_D, k_1, A_2, A_3$ が各粒径粒子で共通とすると第 i クラスの粒子 (粒径 d_i) の無次元限界掃流力 τ_{eci} は次式で与えられる。

$$\tau_{eci} = \frac{2A_3 \sin\beta_i}{C_D A_2 (k_1 \sin\beta_i + \cos\beta_i)} \bigg/ \left(\frac{1}{\kappa} \ln \frac{30.1 z_i}{k_s} \right)^2 \dots\dots\dots (2)$$

但し、流速分布は相等砂粗度が k_s の完全粗面乱流に対する対数則で表わされるものとして、 z_i は粒径 d_i の砂の中心の基準面からの高さである。一方、均一砂の場合についても同様に無次元移動限界掃流力 τ_{eco} が求められ、これらの比は次式となる。

$$\frac{\tau_{kci}}{\tau_{kco}} = f_E(\beta_i) \cdot \left[\frac{\ln \{ 30.1 (z_0 / k_{s0}) \}}{\ln \{ 30.1 (z_i / k_s) \}} \right]^2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$f_E(\beta_i) = \frac{k_1 \sin \beta_0 + \cos \beta_0}{\sin \beta_0} \cdot \frac{\sin \beta_i}{k_1 \sin \beta_i + \cos \beta_i} \quad \dots\dots\dots (4)$$

但し下付添字 0 は均一砂に対する値を示す。上記の式より混合砂れきの粒径別無次元移動限界掃流力は、粒径によるぬけ出し角の相違、存在高さの相違によって異なり（それぞれ $f_E(\beta_i)$ 、 z_i で表わされる）、さらに混合砂れき床としての相等砂粗度に支配されていることがわかる。なお Egiazaroff 式では、 $f_E(\beta_i) = 1$ 、 $z_i = 0.63 d_i$ であり、一般に $k_s = d_m$ として用いられるため混合砂の粒度分布のかたちの効果が入ってこない。以下では、混合砂の粒度分布と混合砂れき床面構成の関係をシミュレーションモデルで検討することによって $f_E(\beta_i)$ 、 z_i 及び k_s を評価し、式(3)で表わされる混合砂の粒径別移動限界に及ぼす粒度分布のかたちの効果を明らかにする。

2. 粒度分布と混合砂れき床面状態（ z_i 及び $f_E(\beta_i)$ の検討）

異種の粒径の粒状体（granular material）で構成される床面の状況を正確に把握し記述するのは容易でない。そこで、ここでは粒子が一次的に配列されたモデルを考え、シミュレーションによって床面状態の特性の検討を行った。混合砂の粒度分布（重量基準、その密度関数を $p(d)$ とする）としては実際河川で良く適合すると言われる対数正規分布及び粒径加積曲線が片対数紙上で直線となるもの（OPQR 型と呼ぶ）の 2 種類の分布形を対象とした。（これらの粒径加積曲線は図-1 に実線で示されている）。まず混合砂の重量基準粒度分布を式(5)によって

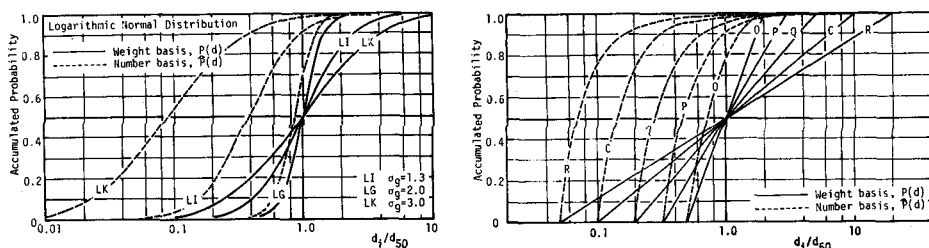


図-1 対象とする混合砂の粒径加積曲線

表面露出個数分布（その加積曲線が図-1 に破線で示されており、密度関数を $\hat{p}(d)$ で表わす）に変換し、次にその分布関数の逆関数を解く方法で一様乱数を $\hat{p}(d)$ に従う乱数に変換し、これを直径とする半球を一系列に並べた仮想基本路床を作成した。

$$\hat{p}(d) = \{ p(d) / d^2 \} / \int_0^\infty \{ p(\eta) / \eta^2 \} d\eta \quad \dots\dots\dots (5)$$

そして、この上に各粒径粒子が所定の確率で上載された状況を実際の混合砂れき床と考える。これによって、粒径別初期移動を考えるべき粒子の存在状況（基本路床構成粒子の中心を結ぶ線からの上載球中心の高さ $\{y_j\}$ 及びぬけ出し角 $\{\beta_j\}$ を上載可能な限りにおいて調べた。これらは図-2(a)を参考にして次式で計算される（記号は図に準拠し、 R_i は上載球半径、 j はデータ番号である）。

$$y_j = \sqrt{\{(d_j + R_i) / 2\}^2 - (x_j - X_j)^2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$x_j = X_j + \left\{ \left(\frac{d_j}{2} + \frac{R_i}{2} \right)^2 + (X_{j+n} - X_j)^2 - \left(\frac{R_i + d_{j+n}}{2} \right)^2 \right\} / 2 (X_{j+n} - X_j) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\beta_j = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{2y_j}{R_i + d_{j+n}} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ところが機械的な計算では図-2(b), (c)のような不合理なものも含まれ、これを除外するために計算された $\{x_j, y_j\}$ の組のうち、次の条件を充すもののみデータとして採用した。

$$\sqrt{(x_j + X_{j+m})^2 + y_j^2} \geq R_i + d_{j+m} \quad (X_j < x_j < X_{j+n}) \quad \dots\dots\dots (9)$$

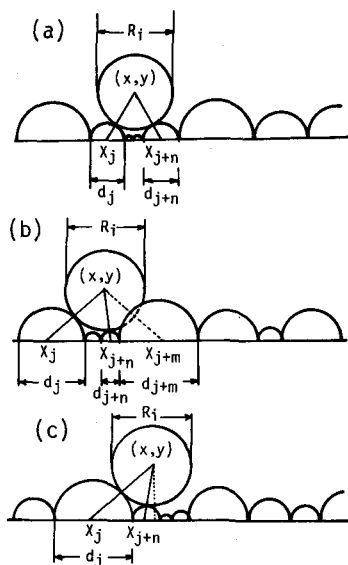


図-2 説明図

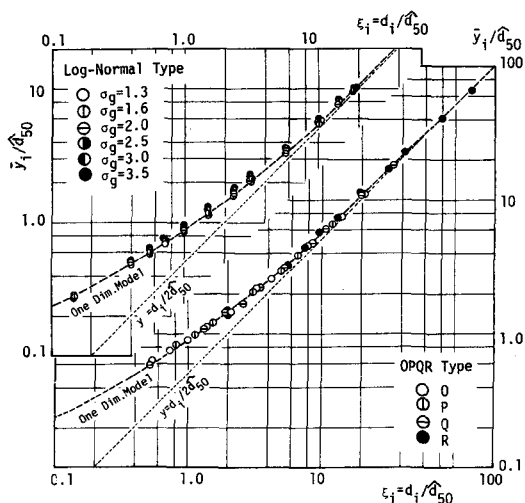


図-3 粒径別存在高さの平均値

上述のように粒径 R_i に対し (x_j, y_j) , β_j を計算し、これより $\{y_i\}$, $\{\beta_i\}$ の分布を検討した。

以上のシミュレーションによる検討の結果、まず粒径別存在高さの平均値 $\bar{y}_i$ については図-3に示す結果が得られた(図-3では $\bar{y}_i$, d_i とも表面個数分布中央粒径 $\hat{d}_{50}$ で規格化されている)。これによると対数正規型, OPQR型を問わず、また分布の広がりを示す σ_g ($\equiv \sqrt{d_{84}/d_{16}}$) の値にかかわらず、図に破線で示される $\hat{d}_{50}$ の均一砂れき床上に各粒径粒子を上載した場合の理論曲線(次式で与えられる)と良く一致している。

$$\frac{\bar{y}_i}{\hat{d}_{50}} = \sqrt{\left\{ \left(\frac{d_i}{\hat{d}_{50}} \right)^2 + 1 \right\}^2 - 1} / 2 \quad \dots\dots\dots (10)$$

ところで、式(3)で用いられる存在高さ z_i は対数則の基準面からの高さであり、いま混合砂れき床の基準面の合理的決定は難しいが、図-3に示す $\bar{y}_i$ についての結果よりほぼ

$$z_i = a d_i, \quad a = 0.5 \quad \dots\dots\dots (11)$$

としても良いと思われる。

一方、シミュレーションの結果として得られるぬけ出し角の粒径別平均値 β_i の正弦値と $\xi_i \equiv d_i/\hat{d}_{50}$ との関係は図-4に示す通りで(対数正規型に対する結果は曲線群で表示してある)、これをもとにした $f_E(\beta_i)$ と ξ_i の関係を図-5に示した。式(4)の計算に当って $k_1 = 0.8$ (Chepil⁶⁾ の実験結果による)とした。ところで、 $f_E(\beta_i)$ は初期移動形式を表層滑動と考えると、静止摩擦係数 μ_b (または安息角) の比となる。 $d_i = d_m$ に対する値 $f_E(\beta_m)$ を計算すると図-6に示すように土屋ら⁹⁾ が実測した、混合砂の平均的な摩擦係数の均一砂のそれに対する比につい

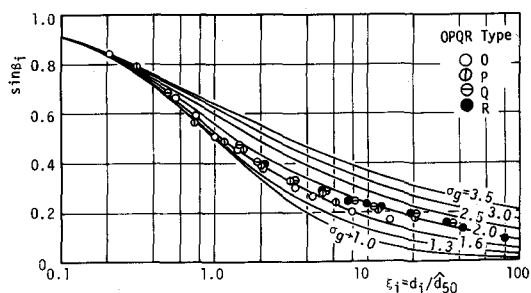


図-4 粒径別平均ぬけ出し角の正弦値

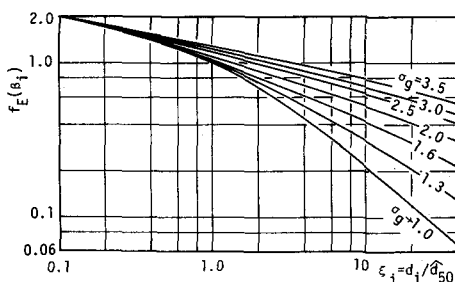


図-5 $f_E(\beta_i)$ と $\xi_i \equiv d_i/\hat{d}_{50}$ の関係

ての実験値と良く一致しており、これらより、流体力の効果は別として混合砂の方が移動し易い状況にあると言える。なお、 $\{y_i\}$, $\{\beta_i\}$ も広く分布しており、その分布性状もシミュレーションによって検討している⁸⁾ が以下の議論はさしあたって、上述の平均値を用いて行う。

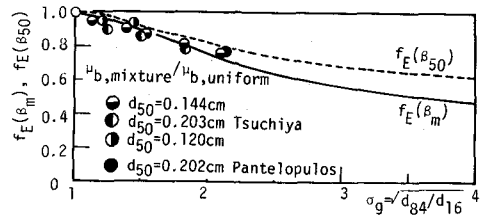


図-6 混合砂床の平均的な移動し易さの程度

3. 混合砂れき床の相等砂粗度

equivalent grain sizeを用いて混合砂の流送に球状均一粒子に対して確立された流砂公式を適用しようとする試みは古くからあり、経験的に d_m , d_{35} などが使われる。また Christensen⁹⁾ はこれの合理的決定を試みている。しかし先にも述べたように混合砂の流送では、粒径別非平衡性、粒度偏析を生じるなど粒度構成の異質性、それぞれの粒度クラスの個別性などが重要であるため、必ずしも単一の equivalent size で代表させることは適当でない。実際 Einstein¹⁰⁾ の提案のように d_{35} , d_{65} など使い分ける必要がある。

上述のように混合砂の流送問題の全般にわたって統一の equivalent size を求めること、個別的な対象であっても流送機構のように構成粒子の異質性自体が重要である場合に equivalent size を求めることに意義は認め難いが、混合砂れき床の抵抗のように各粒径粒子が集合して特性を示すものに対しては、equivalent size の考え方が有効である。なお、equivalent size を合理的に決定するためには、その定義及び何に対して“equivalent”にするかの対象を明確にしなければならない。ここでは三輪¹¹⁾ によって発展させられた **Андреев** による定義を採用する。つまり、いまそれぞれの粒径が $d_1, d_2, \dots$ である ある「大きさ」（ある「測定量」、たとえば個数、占有面積、体積その他によって規定される）の混合粒径粒子群を考え、その物理的性質に着目し、これが equivalent size を定義する基本特性であるという意味で「定義特性」と呼ぶ。「定義特性」は粒径の関数で表わされ、全体としての性質は個々の粒子についての総和として示されるとする。次に同じ「測定量」で同じ大きさの均一粒径粒子群を考え、この全体の「定義特性」が先の混合粒径粒子群のそれと等価になるようなものを求め、その均一粒径を“equivalent size”と定義する。相等砂粗度に関していうと、「測定量」は単位面積、「定義特性」は流体から受ける力である。すなわち“equivalent size” d_e は次式で求められる。

$$\frac{\epsilon_0}{2} C_{Di} \rho u_{\beta 0}^2 A_2 d_e^2 \frac{1}{A_2 d_e^2} = \sum \frac{\epsilon_i}{2} C_{Di} \rho u_{\beta i}^2 A_2 d_i^2 \frac{p_i}{A_2 d_i^2} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに ρ : 流体密度, ϵ : 遮蔽係数である。いま「等価な状況」を考えているので両者の上の流速分布は同一であり相等砂粗度

$$k_s = \alpha d_e \quad (\alpha = 1 \sim 3) \quad \dots\dots\dots (13)$$

の粗面乱流の対数則が適用されるものとし、さらに簡単のため各粒径について $\epsilon_i C_{Di}$ が共通でしかも均一砂の場合に等しいとすると式(12)は次のように書き直せる。

$$\ln^2 \{30.1 (a/\alpha)\} = \int_{\alpha\eta_e/30.1}^{\infty} \{\ln(30.1 a/\alpha\eta_e) - \ln \eta\}^2 p(\eta) d\eta \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし、

$$\eta = d/d_{50}, \quad \eta_e = d_e/d_{50} \quad \dots\dots\dots (15)$$

である。なお式(14)では $d_i < (k_s/30.1 a)$ の小粒径砂に対しては抗力が作用しないものとしている。式(14)より、 η_e についての次の方程式が得られる。

$$A(\eta_e) \ln^2 \eta_e - 2B(\eta_e) \ln \eta_e + C(\eta_e) = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned}
 A(\eta_e) &= 1 - P(30.1a / \alpha \eta_e) \\
 B(\eta_e) &= \{1 - P(30.1a / \alpha \eta_e)\} \ln 30.1a + E'[\ln \eta] \\
 C(\eta_e) &= 2(\ln 30.1a) E'[\ln \eta] + E'[\ln^2 \eta] \\
 &\quad - P(30.1a / \alpha \eta_e) \ln^2 30.1a \\
 P(x) &= \int_0^x p(\eta) d\eta \\
 E'[x] &= E[x] - \int_0^{\eta_e/30.1} x p(\eta) d\eta, \quad E[x] = \int_0^\infty x p(\eta) d\eta
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned}
 P(x) &= \int_0^x p(\eta) d\eta \\
 E'[x] &= E[x] - \int_0^{\eta_e/30.1} x p(\eta) d\eta, \quad E[x] = \int_0^\infty x p(\eta) d\eta
 \end{aligned} \right\} \dots\dots (18)$$

である。ここで、 $\alpha = 1$ ($k_s = d_e$ 、よって $\eta_e = k_s / d_{50}$) としたときの式(16)の解としての η_e の σ_g に対する変化は図-7に示す通りで、従来頻用されている d_m / d_{50} 、 d_{65} / d_{50} に比べると σ_g に対する変化は緩やかである。なお図の η_{e0} は、式(17)の右辺で $\eta_e / 30.1a \rightarrow 0$ としたときの近似解 ($A, B, C = \text{const.}$) である。

4. 混合砂れきの粒径別移動限界掃流力

以上の検討により、混合砂れきの粒径別移動限界掃流力を評価する(式(3)、(4))にあたって必要な混合砂れき床の相等砂粗度(式(16)で与えられる $\eta_e = k_s / d_{50}$)、粒径別の粒子存在高さ(式(11)で与えられる)及びぬけ出し角の相違にもとづく効果(式(4)で与えられる $f_E(\beta_i)$ が図-5に $\xi_i = d_i / \hat{d}_{50}$ の関数として求められた)が明らかにされた。これらにより、

$$\tau_{eci} / \tau_{ec0} = f_E(\beta_i) \cdot [\ln 15.05 / \ln \{15.05 (\eta_m / \eta_e) \zeta_i\}]^2 \dots\dots\dots (19)$$

によって τ_{eci} / τ_{ec0} と $\zeta_i \equiv d_i / d_m$ の関係が与えられる。式(19)を求めるには、あと図-5を用いるに当って必要な、 ξ_i と ζ_i の変換に必要な $\hat{\xi}_m \equiv d_m / \hat{d}_{50}$ 及び $\eta_m \equiv d_m / d_{50}$ の σ_g に対する変化を知っておかねばならない。これらは対数正規型に対しては、

$$\ln \hat{\xi}_m = (5/2) \ln^2 \sigma_g, \quad \ln \eta_m = (1/2) \ln^2 \sigma_g \dots\dots\dots (20)$$

OPQR型のものに対しては、

$$\hat{\xi}_m = \sqrt{(\sigma_g^{2.94} + \sigma_g^{-2.94})/2} \cdot \eta_m, \quad \eta_m = (\sigma_g^{1.47} - \sigma_g^{-1.47}) / 2.94 \ln \sigma_g \dots\dots\dots (21)$$

で与えられる。図-5、図-7及び式(20)あるいは式(21)を用いて式(19)が計算され、とくに対数正規型の混合砂についての結果を示すと図-8の通りである。図には破線でEgiazaroff式³⁾も示されている。これらを比較すると、今回導いたモデルでは粒度の広がり方(σ_g で表わされる)による粒径別限界掃流力の特性の相違が明示され、とくに大粒径のものについてはEgiazaroff式よりかなり移動し易くなっている。なお図には $\sigma_g = 2.31$ の砂を用いた平野の粒径別流砂量の実験値²⁾から推定された粒径別限界掃流力、 $\sigma_g = 1.2 \sim 2.0$ の砂で単位時間当りの移動確率を実測した土屋⁷⁾の資料を整理したものも示され、これらを理論曲線と比較すると、とくに ζ_i の大きいところでEgiazaroff式以上の適合性が、認められた。

5. 結 論

本研究によって、混合砂れきの流送に強く影響する粒径による移動限界の相違は、各粒径毎の平均存在高さ及びぬけ出し角の相違と混合砂れき床の相等砂粗度に支配されていることが明らかにされ、これら

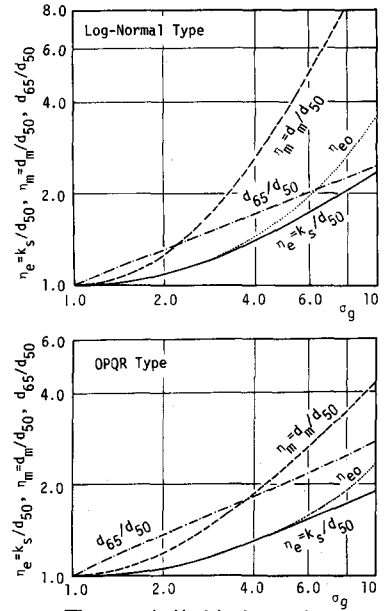


図-7 相等砂粗度の評価

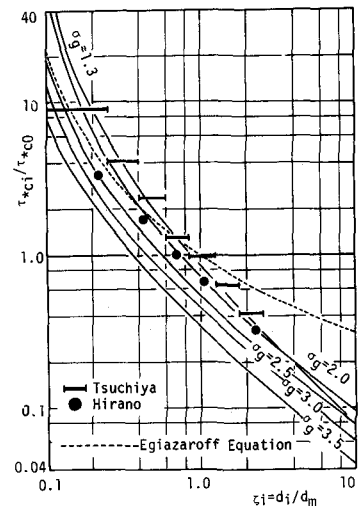


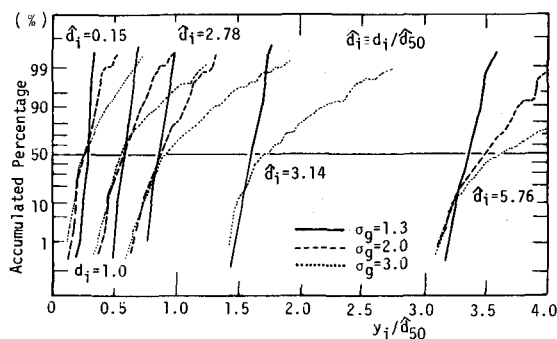
図-8 粒径別無次元移動限界掃流力

が粒度分布と深くかかわっていることがわかった。粒径別粒子存在高さ及びぬけ出し角については、混合砂れき床を数値シミュレーションによって表わすことを工夫し、その分布性状についての知識を得た。一方、混合砂れき床の相当砂粒度については“equivalent grain size”の概念を用い、明確化された定義のもとにこれを推定した。これらの結果を総合して、粒径別移動限界掃流力の推定を行った結果、Egiazaroff式と比較して、主に粒度分布のかたちの効果を取り入れられる、大粒径分における推定精度が向上したの2点において改良された。今後、モデルの細部を検討するとともに粒径別pick-up rate, step lengthを評価するモデルを確立し、armoring現象のモデル⁵⁾との組合せで混合砂床の諸現象の解析へと研究を進める予定である。

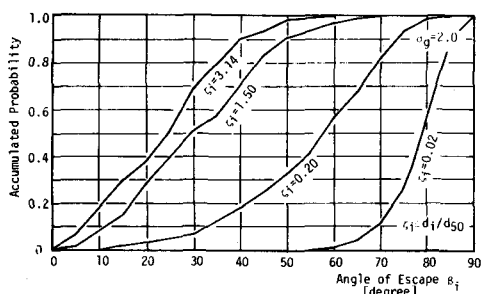
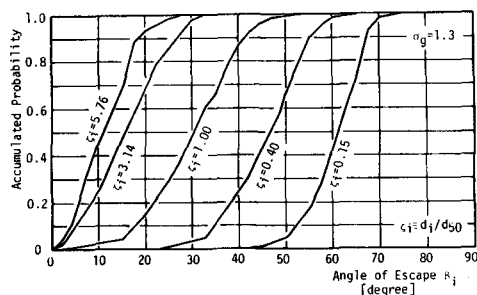
なお最後に、本研究の遂行に当り京都大学大学院生加賀田健司君の熱心な協力を得たことを付記し謝意を表す。

参考文献

- 1) 芦田和男・道上正規：混合砂礫の流砂量と河床変動に関する研究，京大防災研究所年報，第14号B，1971.
- 2) 平野宗夫：Armoringをとまなう河床低下について，土木学会論文報告集，第195号，1971.
- 3) Egiazaroff, I.V.: Calculation of Nonuniform Sediment Concentration, Proc. ASCE, Vol. 91, HY4, 1965.
- 4) 芦田和男・高橋保・水山高久：砂れきの停止限界と移動限界に関する研究，土木学会第30回年講概要集，Ⅱ-143，1975.
- 5) 中川博次・辻本哲郎・原稔明：混合砂れき床面の粗粒化過程について，京大防災研究所年報，第20号B-2，1977.
- 6) Chepil, W.S.: The Use of Spheres to Measure Lift and Drag on Wind Eroded Soil Grains, Soil Science Proc., Vol. 25, 1961.
- 7) 土屋義人：混合砂礫の限界掃流力に関する研究，京大防災研究所年報，第6号，1953.
- 8) 中川博次・辻本哲郎・中野晋：混合砂れき床面の物理的性質，京大防災研年報，第24号B-2，1981(発表予定).
- 9) Christensen, B.A.: Effective Grain-Size in Sediment Transport, Proc. XIIIth Congr., IAHR, Kyoto, Vol. 3, 1969.
- 10) Einstein, H.A.: The Bed Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flows, Tech. Bull., No. 1026, US Dept. of Agriculture, Soil Conservation Service, 1950.
- 11) 三輪茂雄：平均粒子径の意義と表現について，化学工学，第28巻，第9号，1964.



付図-1 混合砂れき床面での粒径別存在高さ分布



付図-2 混合砂れき床面での粒径別ぬけ出し角分布