

掃流砂量式と掃流砂量の遅れの距離について

ON THE BED-LOAD TRANSPORT EQUATION AND THE
SPATIAL LAG DISTANCE OF BED-LOAD

中央大学理工学部
(財)電力中央研究所
中央大学大学院

正会員 林 泰造
正会員 尾崎幸男
学生員 和泉雄一

1. まえがき

Einstein (1950) の掃流砂理論は、掃流砂に関する理論研究の1つの基礎を形成しているものといえるが、その理論の本質的な点にいくつかの問題点が残されている。Einstein の理論の解釈上で特に問題となるのは exchange time の概念で、これは厳密に定義されていないかなりあいまいな概念であるように思われる。

また、Einstein の理論においては河床の平衡方程式の中に砂粒の単位流送距離として1つの砂粒の静止位置から次の静止位置までの距離を用いているが、これについての見直しが必要のように思われる。

林・尾崎(1979)はこれらの点について補正を施して新しい掃流砂量式を導いたものを一昨年発表したが、その中ではこの補正点について記述が十分でなかった。そこで本報においては改めて筆者等の補正点を明確に記し、このような補正が妥当であったかどうかの検討のため、林・尾崎の式による流砂量の予測値を Einstein の式および Einstein 形の理論とはかなり系統を異にする Bagnold 流の理論から導かれた2つの式 Engelund-Hansen の式(1967)および芦田・道上の式(1972)と対比しながら、実験値と比較検討を行う。

2. 掃流層の粒子濃度と掃流砂量

掃流砂量(体積レート) q_b は次のように表わされる。

$$q_b = \bar{c} u_b h_b \quad (1)$$

ただし、 $\bar{c}$: 掃流層内における体積濃度、 u_b : 掃流層内の断面平均流速、 h_b : 掃流層の厚さ、である。そこで、 q_b を求めるためにはまず $\bar{c}$ の値を知らねばならない。林・高羽(1977)はこの $\bar{c}$ を次のように書き表した。

$$\bar{c} = n_b V \frac{P}{t_{ex}} T / h_b \quad (2)$$

ただし、 n_b : 河床面の単位面積内の砂粒数、 t_{ex} : exchange time、 P : exchange time 内にて1つの砂粒が動き出す確率、 V : 1つの砂粒の平均体積、である。

式(2)の説明はつぎのようである。

いま、掃流層内の濃度 $\bar{c}$ について次のような非定常問題を考えてみる。

$$t = 0 \quad \text{で} \quad \bar{c} = 0$$

$t > 0$ で 河床単位面積から単位時間当りに、 $n_b \cdot (P/t_{ex})$ 個の砂粒が上方に放出され、放出された砂粒はそれぞれ T 時間後に河床面上に沈降する。

そうすると、 $t = 0$ 以後に河床単位面積から上方に発する砂の累積体積 Σ_1 と、逆に上方から河床単位面積内に帰着する砂の累積体積 Σ_2 は図-1に示すようになり、初めの T 時間の間は掃流層中に存在する砂の体積 $(= \Sigma_1 - \Sigma_2)$ は増加してゆくが、 $t = T$ 以後は定常的になる。ところで Σ_1 および Σ_2 は

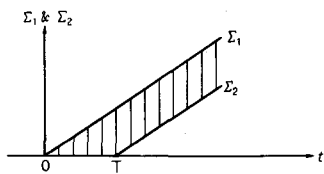


Fig. 1

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_1 &= (n_b V P / t_{ex}) t \\ \Sigma_2 &= \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq t \leq T \\ (n_b V P / t_{ex}) (t - T) & \text{for } t \geq T \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

よって、 $t \geq T$ においては

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 = (n_b V P / t_{ex}) T \quad (4)$$

の定常値となり、従って濃度は定常時に

$$\bar{c} = n_b V \frac{P}{t_{ex}} T / h_b \quad (5)$$

となる。これが式(2)である。

このように定められた式(2)を式(1)に代入すると、

$$q_b = n_b V \frac{P}{t_{ex}} T u_b \quad (6)$$

をうる。

上式の誘導から明らかなように、 T としてとるべきものは1つの粒子が河床から跳び上って河床に沈降するまでの時間の確率平均値で1跳躍時間 (travel time of an individual step), である。ところで

$$T u_b = \ell_0 \quad (7)$$

の関係を式(6)に代入すると、 q_b は次のように表わされる。

$$q_b = n_b V \frac{P}{t_{ex}} \ell_0 \quad (8)$$

ここに、 ℓ_0 : 1粒子の1跳躍距離 (an individual step of travel) の確率的平均値, である。

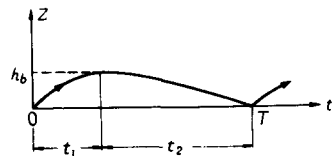


Fig. 2

3. 河床の平衡方程式

林・尾崎 (1980)^{a, b} は河床面の平衡方程式を Einstein (1950) と同じ考え方により次の様に導いている。

$$q_b = n_b V \frac{P}{t_{ex}} \ell_0 \quad (9)$$

この式の説明は次の通りである。

いま、河床面上に単位幅で長さ ℓ_0 の面積を考える (図-3)。 N_b をこの面積の上流側からこの面積の上流端断面を跨いで入射する砂粒の個数とする。この上流端断面を通過するとき、個々の粒子はそれぞれがこの断面のどれだけ上流側からとび出してそれぞれの1跳躍中にこの断面にさしかかったものであるかは判らない。従って、この断面を跨いで入る砂粒は図示の距離 ℓ_0 の間に一様に河床面に入射すると考えるのが妥当である。ここに、 ℓ_0 は既述のように砂粒の1跳躍距離の確率的平均値である。よって図示の陰影を施した部分に入射する個数は、

$$\frac{N_b}{\ell_0} = n_b \frac{P}{t_{ex}} \quad (10)$$

この式の両辺に砂粒の体積 V をかけ、 $q_b = N_b V$ であることから式(10)をうる。

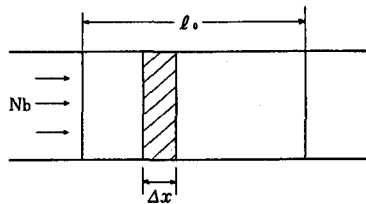


Fig. 3

式(10)は式(6)と同一である。このことから河床の平衡方程式に用いられるべきものは ℓ_0 であり、Einsteinの用いた ℓ ではない筈であることがわかる。

Einsteinは河床の平衡方程式は

$$\frac{N_b}{\ell} = \frac{n_b P}{t_{ex}} \quad (11)$$

で表わされ、 ℓ は

$$\ell = \frac{\ell_0}{(1-P)} \quad (12)$$

で表わされると考えたのであるが、平衡方程式に ℓ を用いたことについては、上述の見方からすると疑問がある。Einsteinが ℓ_0 を探らずに ℓ を用いたのは、恐らく図-3の陰影部分に、settleする(すなわち静止してしまう)砂粒は個々の跳躍を重ねて全距離 ℓ だけ跳んできたものと考えられるから ℓ_0 でなくて ℓ をとるべきだとしたのではないかと筆者等は想像する。しかし、図-3の Δx 部分に単位時間当りに入射する砂粒の個数はそれがそこで最終的に静止するか、それともさらに、saltationを続けて直ちに次の跳躍にとび出すかの接地以後の粒子の挙動には関わりがない。よって、このようなことから、筆者等は、平衡方程式に用いるべきものは1粒子が跳び上ってから沈降一たん接地するまでの時間 T とそれに対応する ℓ_0 である、と考えた。

4. 非平衡流砂量方程式と掃流砂量の遅れの距離

林・尾崎(1980)は非平衡流砂量方程式として次式を導いた。

$$\ell_0 \frac{d\phi}{dx} = \phi_0 - \phi \quad (13)$$

ただし

$$\phi = q_b / \{(s-1)gd^3\}^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

また、 ϕ_0 ：平衡状態における ϕ の値、である。

式(13)は図-3の陰影部分に向けて上方から降下する砂粒の数とこの部分からとび出してゆく砂粒の数との過不足分 ΔN_b を式(10)に書き加えた式

$$\Delta N_b = \left(\frac{n_b P}{t_{ex}}\right) \Delta x - N_b \Delta x / \ell_0 \quad (15)$$

の両辺に $V\ell_0/\Delta x$ をかけて

$$\ell_0 \frac{dq_b}{dx} = q_{b0} - q_b \quad (16)$$

とし、これを無次元流砂量 ϕ と同平衡量 ϕ_0 とをもって書直したものである。

次に、流砂量の遅れの距離 δ については、つぎのような解析を行うことができる。

いま、 $x = x$ 断面の流砂量はそれより δ だけ上流側の断面において作用している掃流力の作用の結果(ただし、 δ は遅れの距離)、であると考えると、 ϕ は

$$\phi = \text{func} \{ \tau_* (x - \delta) \} \quad (17)$$

と書くことができる。これを Taylor 展開すると

$$\begin{aligned}\phi &= \text{func}[\tau_*(x)] + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \{ \text{func}[\tau_*(x)] \} \right\} \delta + \dots \dots \dots \\ &= \phi_0(x) + \{ \partial \phi_0(x) / \partial x \} \delta \dots \dots \dots\end{aligned}\quad (18)$$

式(18)と式(13)とを比較することにより次式が導かれる。

$$\delta = l_0 \left(\frac{d\phi_0}{dx} \right) / \{ (d\phi_0/dx) + l_0 (d^2\phi_0/dx^2) \}$$

この式の右辺分母第二項を分母第一項に比べて無視することにより $\delta \simeq l_0$ をうる。このようにして、林・尾崎(1980)は

$$\delta \simeq l_0. \quad (19)$$

を導いた。

もし Einstein と同じようにして、図-3の l_0 を l に直して非平衡方程式をたてると

$$l dq_b/dx = q_{b0} - q_b \quad (20)$$

となり、また遅れの距離 δ は

$$\delta \simeq l = l_0 / (1-P) \quad (21)$$

という結果をうる。しかし、斉藤(1979)の水平噴流による洗掘に関してなされた研究によると、式(21)で与えられる δ の値は大きすぎて実験結果を説明することができない。そして式(19)で与えられる δ を用いることにより、実験結果をよく説明しうることが示されている。林・大西(1980)の小規模河床波の発生理論解析においても実験値と比較の上で同様のことが認められている。

5. Exchange time t_{ex}

“河床上の1つの砂粒を同様な砂粒でおきかえるに要する時間”を Einstein は exchange time と定義している。この時間を実験的にきめる方法がないので、砂粒それ自体の大きさに等しい距離 d を沈降するに要する時間に比例するものとして彼はつぎのようにおいた。

$$t_{ex} \propto \frac{d}{w_f} \propto \sqrt{\frac{d}{(s-1)g}} \quad (22)$$

上述の Einstein が定義した exchange time の概念にはあいまいさがある。林・尾崎(1979)は式(10)をたてたときの考え方にに基づき、exchange time は“1つの砂粒が河床から離脱するに要する時間”であり、従って

$$t_{ex} \propto \frac{d}{w_o} \quad (23)$$

ただし, $\bar{w}_0$: 河床から跳び出す時の初速度の鉛直方向成分の確率平均値, と表わすべきものと解釈した。すなわち, 1つの粒子が離脱するには $\alpha d / \bar{w}_0$ 。だけ離脱時間がかかるが, これだけの時間が経つと離脱した位置における次の粒子がこれまでそこにいた粒子と同じ条件で新たに, 揚力Lにさらされるようになる, と考えたのである。従って, 式22より式23で与えられる t_{ex} の方が exchange time の概念についての Einstein の本来の定義により忠実なものとなると考える。Einstein 自身も記述しているように, t_{ex} を式22とおいたことには特に根拠があったわけではない。林・尾崎 (1979) の研究においては, t_{ex} の式として用いた式23の中の $\bar{w}_0$ には次式が用いられている。

$$\bar{w}_0 = \frac{s-1}{s+(1/2)} g t_L \frac{1}{B_*} \tau_*' I \quad (24)$$

ただし

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{2} e^{-\eta_{*1}^2} + \frac{1}{2} e^{-\eta_{*2}^2} - \eta_{*1} \int_{\eta_{*1}}^{\infty} e^{-t^2} dt + \eta_{*2} \int_{-\infty}^{\eta_{*2}} e^{-t^2} dt \right\} \quad (25)$$

$$t_L = \alpha d / \bar{w}_0, \quad B_* = 0.143, \quad \tau_*': \text{無次元有効掃流力}, \quad \eta_{*1} = B_* \Psi - (1/\eta_0),$$

$$\eta_{*2} = -B_* \Psi - (1/\eta_0), \quad \eta_0 = 1/2, \quad \Psi = 1/\tau_*'$$

である。

6. 掃流砂量式

これまで記述した論点について Einstein の式を補正して林・尾崎・石橋 (1980) は掃流砂量式として次式26に基づいてこの式の近似式として式27を導いた。

$$\phi = 6.0 P I \tau_*'^{3/2} \quad (26)$$

$$\phi = 12 \left(1 - \frac{\tau_{*c}}{\tau_*'} \right)^{3/2} \tau_*'^{3/2} \quad (27)$$

P の定義および式25より明かなように $\tau_*' \rightarrow \infty$ のときには, $P \rightarrow 1$, $I \rightarrow 2$ となるので, 式27においては係数が12となっている。

しかし, 上2式は, さらにその後の筆者等の検討の結果, 次のように係数を補正した方が Gilbert (1914) の実験結果をよく説明しうるものであることが判ってきた。

$$\phi = 7.0 P I \tau_*'^{3/2} \quad (28)$$

この近似形として

$$\phi = 14 \left(1 - \frac{\tau_{*c}}{\tau_*'} \right)^{3/2} \tau_*'^{3/2} \quad (29)$$

本報では式28は用いず式29の方を用いる。

7. 実験値との比較

(a) 比較の方針

実験値としては流砂量のみならずその時の河床形態をも記録している Gilbert (1914) の実験と Guy-Simons-Richardson (1966) の実験よりのものを使用した。佐藤・吉川・芦田 (1959) の実験値は河床形態が記されていないので今回は用いなかった。Gilbert 及び Guy 等の実験範囲の概要はつぎのようである。

(ただし, Q_b : 掃流砂量, Q_T : 全流砂量, Q_s : 浮遊砂量)

表-1 実験範囲の概要

著 者	資料数	R_b/d	d (mm)	測定流砂量
Gilbert	876	7 ~ 400	0.3 ~ 180	Q_b
Guy et al.	340	130 ~ 1700	0.19 ~ 0.93	Q_T, Q_s

筆者等の式が Einstein の式の理論的補正の結果, 同式をどの程度改良しえたものかを調べるために, まず以下の(b)においては Einstein 式による計算値と比較しながら実験との一致の度合を検討し, つぎに(c)において Einstein 形の理論とは系統を異にする理論の中から Bagnold 流の2つの理論式としての Engelund-Hansen (1967) および 芦田・道上 (1972) の各式をとり上げて同様の実験値との一致の度合を検討することとした。以下に使用する Einstein, Engelund-Hansen 及び 芦田・道上の各式を一覧として記すつつぎのようである。

Einstein の式 (均一粒径の場合)

$$\frac{1}{1 + a_* \phi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-B_* \psi - \frac{1}{\eta_0}}^{B_* \psi - \frac{1}{\eta_0}} e^{-t^2} dt \quad (30)$$

Engelund-Hansen の式

$$f \phi = 0.1 \tau_*^{5/2} \quad (31)$$

ここに, f : 摩擦係数, であり, v : 断面平均速度とすると

$$f = 2 (u_* / v)^2 \quad (32)$$

芦田・道上の式

$$\phi = 17 \left(1 - \frac{\tau_{*c}}{\tau_*}\right) \left(1 - \frac{u_{*c}}{u_*}\right) \tau_*^{3/2} \quad (33)$$

なお, 芦田・道上は Bagnold 流のその理論解析から, はじめ次式を得ている。

$$\phi = \frac{\beta}{\mu} \left(1 - \frac{\tau_{*c}}{\tau_*'}\right) \left(1 - \frac{u_{*c}}{u_*'}\right) \tau_*'^{3/2} \quad (34)$$

ここに, μ : 粒子の動摩擦係数, $\beta = u_b / u_*'$, u_b : 掃流層の平均流速, である。しかし 芦田・道上は同式の小カッコ内の τ_*' と u_*' の代わりに τ と u_* をとる方が ϕ の値が実験値とよく適合するようになるとして

式(3)をとりあげている。

(a) Einstein の式との比較

河床形態別に、式(3)と式(9)とにより行った掃流砂量の計算値と Gilbert の実験値とを比較したものが図 4～8 である。各図中の 2 本の点線は、 ϕ の予測値が実測値の 2 倍および $1/2$ のときの線である。

図 4 から見られるように、Einstein の式は掃流砂量の小さいところ（すなわち τ_* が τ_{*c} に近いところ）では計算値が過小にでる。

また図 6 及び図 7 に認められるように、河床形態が upper regime に近づくに従って Einstein の式は掃流砂量をやはり過小に見積るようになる。

筆者等の式はこの点いずれも改善されていることがこのことから認められるが、筆者等の理論上の補正は妥当なものであったといえるのではないかと考える。

(b) Bagnold 型の式との比較

図 9～12 は、河床形態が砂堆の場合について、4 つの理論式による計算結果を実験と比較したものである。ただし ϕ (measured) は

Gilbert のものにおいては 掃流砂量 Q_b

Guy et al. のものにおいては 全掃流砂量 $Q_b + Q_s$

を $B\sqrt{(s-1)gd^3}$ で割り無次元化したものである。

芦田・道上及び筆者等の式は掃流砂量の計算式であるから、Gilbert のデータには合うが、Guy 等のデータには合わないのは当然である。（ ϕ が小の間はデータと合っているのは、そこでは $Q_s \cong 0$ のため）

反対に、Engelund-Hansen の式は Gilbert のデータには合わないが、Guy 等のデータには良く合っている。Engelund-Hansen の式は本来掃流砂を対象として導かれた筈のものであるが、結果的には全掃流砂量の計算式になっているものであることは興味深い。

砂堆以外の河床形態の場合についても 4 つの理論の同様の比較が行ってあるが紙面の関係でここでは省略する。

8. 結 び

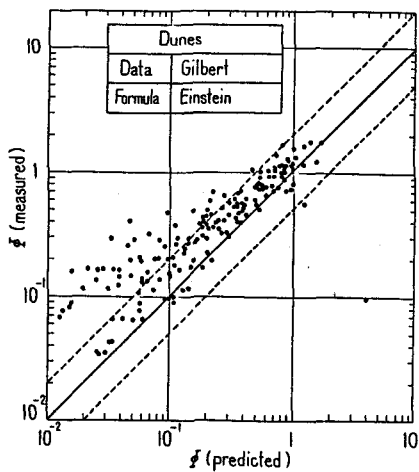
Einstein の掃流砂理論構成において特に理論的に不明確な点を取り上げてこれを検討し、理論上の不備と思われる個所を補正して Einstein の式の補正式に当る筆者等の式を示した。

この式と Einstein 式とを同一の実験データで比較して、Einstein 式の実験との適合性をどの位改良しうることになったかを検討した。

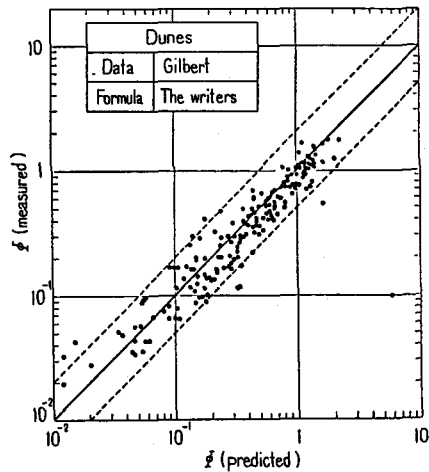
Einstein 流に細かい計算を 1 つ 1 つ組み立ててつくられた筆者等の式が、別の方向からつくられている芦田・道上の式と内容的に殆んど一致するものとなったことは興味深いことと思う。

なお、筆者等の掃流砂の研究においては、Einstein 流の理論計算を行ったため、その途中で 1 跳躍距離 l_0 、掃流砂量の空間的遅れ距離 δ 、掃流量の厚さ h_b 、等の値をそれぞれ具体的に計算できることになったが、このことは Einstein 流理論研究の 1 つの副産物的な効果であったともいえよう。

〔付記〕 本研究の遂行中、I N A 新土木研究所 大西光陽氏 および東亜建設工業 矢内栄二氏 より有益な討議をうけた。記して深甚なる謝意を表する。

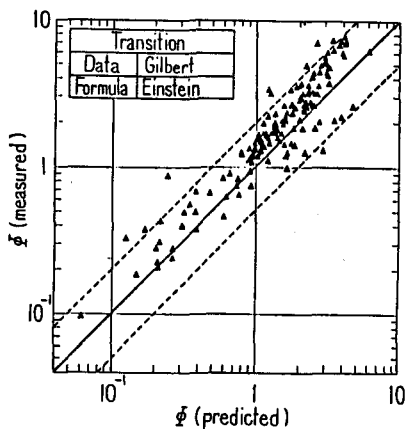


(a)

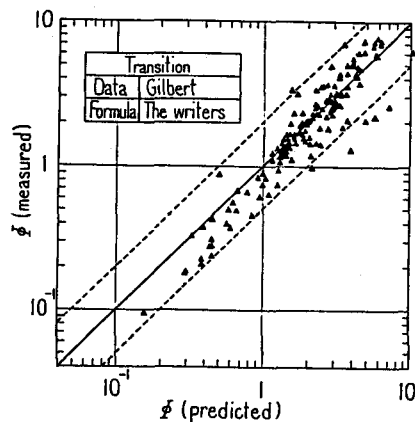


(b)

Fig. 4

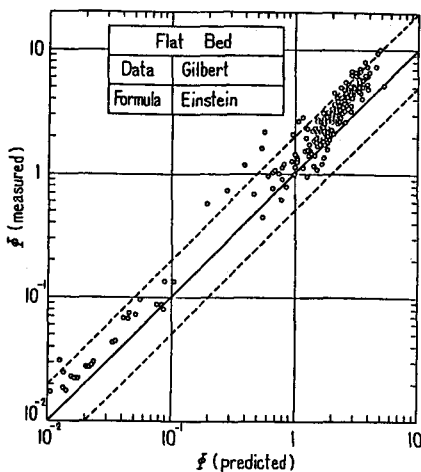


(a)

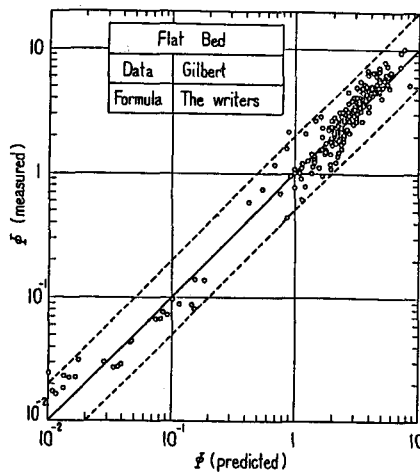


(b)

Fig. 5

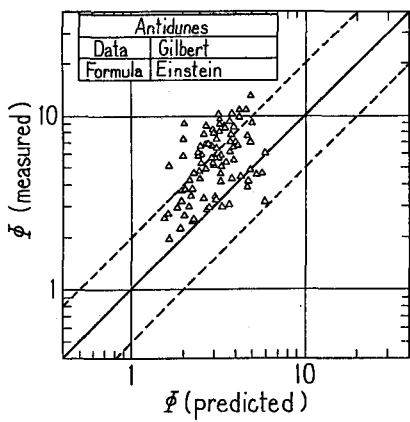


(a)

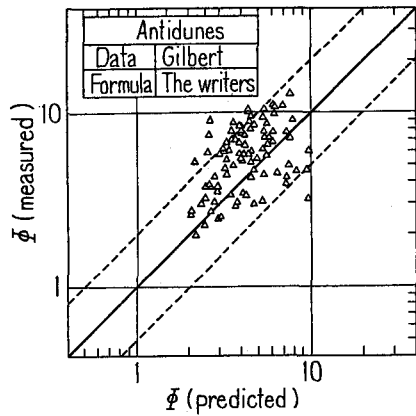


(b)

Fig. 6

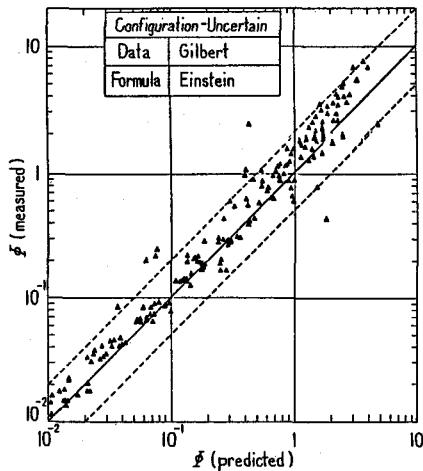


(a)

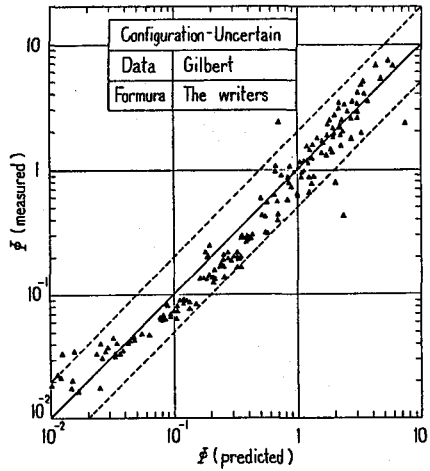


(b)

Fig. 7

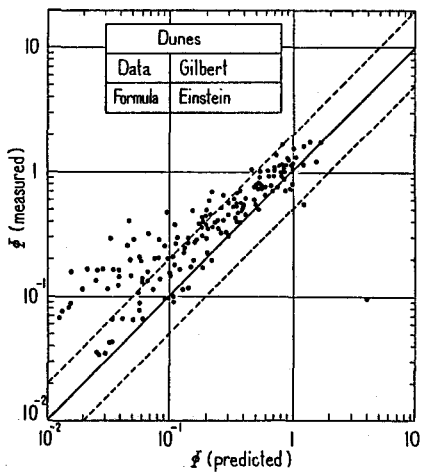


(a)

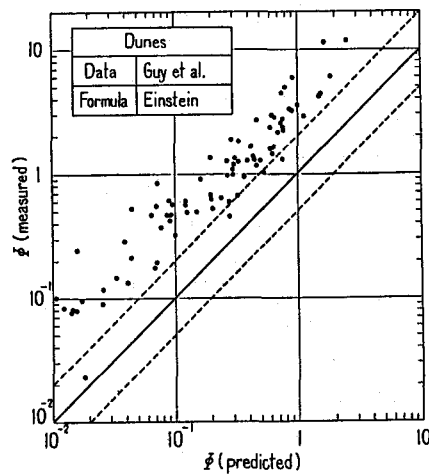


(b)

Fig. 8

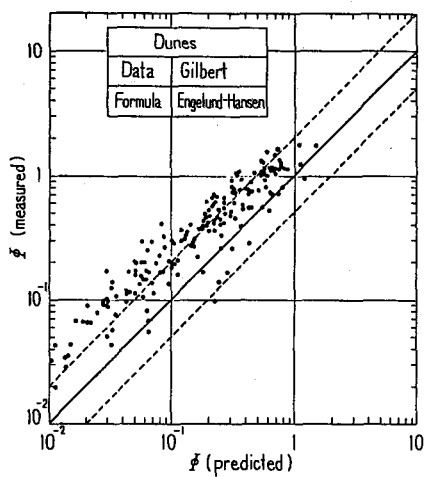


(a)

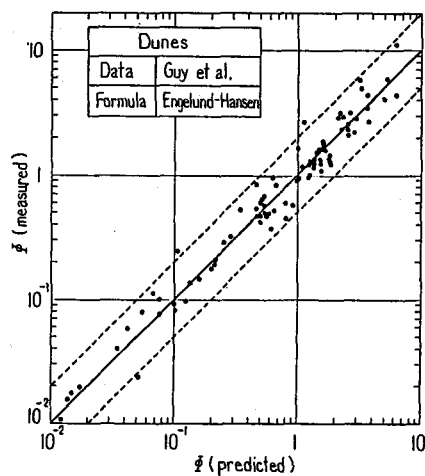


(b)

Fig. 9

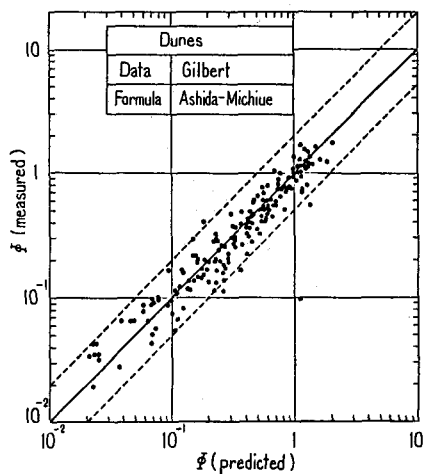


(a)

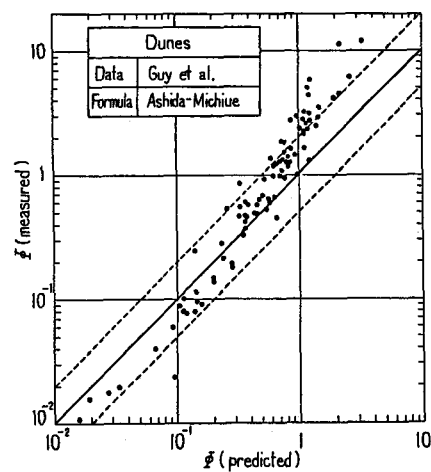


(b)

Fig. 10

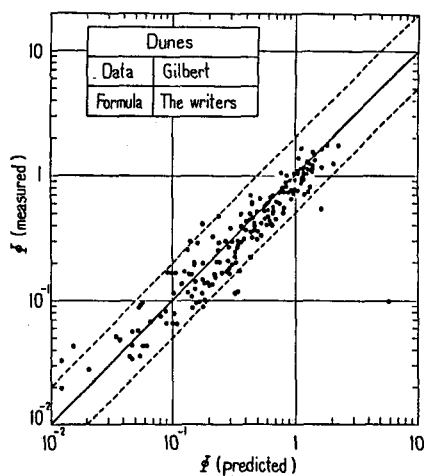


(a)

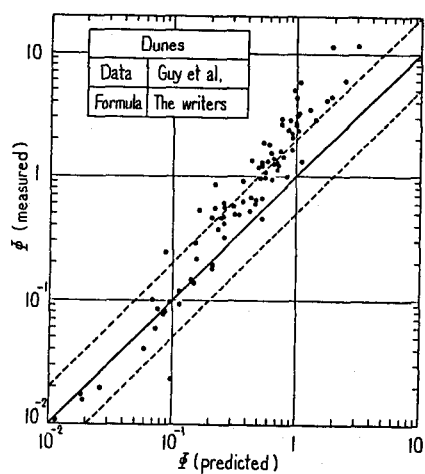


(b)

Fig. 11



(a)



(b)

Fig. 12

9. 引用文献

- 1) Einstein, H.A. (1950), the bed-load function for sediment transportation in open channel flows, Tech.Bul. №1026, US Dept. of Agriculture, 70p.
- 2) 林 泰造・尾崎幸男・石橋 毅(1980), 混合砂礫の掃流砂量に関する研究, 土木学会第24回水理講演会論文集, pp. 35-43.
- 3) Engelund, F. & Hansen, E. (1967), A monograph on sediment transport in alluvial streams, Teknik Forlag (Copenhagen), 62p.
- 4) 芦田和男・道上正規(1972), 移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第206号, pp. 59-69.
- 5) 林 泰造・高羽秀紀(1977), 掃流砂量の理論的研究, 土木学会第21回水理講演会論文集, pp. 117-126.
- 6) Hayashi, T. & Ozaki, S. (1980a), On the saltation heights and step lengths of sediment particles in the bed-load layer, Proc. Int. Symp. on River Sedimentation, Beijing, China, March, B-13-1-10.
- 7) Hayashi, T. & Ozaki, S. (1980b), On the unit step length of saltation of sediment particles in the bed-load layer, Proc. 3rd Int. Symp. on Stochastic Hydraulics, Aug., Tokyo, pp. 337-346.
- 8) 齊藤 隆(1979), 水平噴流による洗掘に関する研究, 土木学会論文報告集, 第282号, pp. 53-63.
- 9) 林 泰造・大西光陽(1980), 小規模河床波の卓越波数について, 土木学会第24回水理講演会論文集, pp. 313-321.
- 10) Gilbert, G. K. (1914), The transportation of debris by running water, USGS Professional Paper 86, 259p.
- 11) Guy, H. P., Simons, D. B. & Richardson, E. V. (1966), Summary of alluvial channel data from flume experiments, 1956-61, USGS Prof. Paper 462-I, 122p.
- 12) 佐藤清一・吉川秀夫・芦田和男(1959), 河床砂礫の掃流運搬に関する研究(1), 建設省土木研究所報告, 第101号, pp. 13-30.