

浮遊砂を含む管路内の限界堆積流の特性について

On the Characteristics of Critical Deposit Flow with Suspended Sediment in Pipes

高知工業高等専門学校 正会員 ○ 那 須 浩 平

高知工業高等専門学校 正会員 大 谷 亘

1. ま え が き

管路内の流砂現象において、限界堆積流（すなわち、管底に砂の堆積層が形成されはじめる臨界の流れ）では、粗砂を流している場合には大部分の砂が掃流状態で流れるので、浮遊砂の存在は無視してもよい程になる。

しかし、ある粒径以下の細砂の場合には、限界堆積流においてもなお無視し得ない量の浮遊砂が存在し、その影響を考慮に入れなければならない。

浮遊砂を伴う限界堆積流においては、掃流に近い浮遊砂や、また浮遊に近い掃流状態で流れている砂が多く存在し、管底の砂層が断続的に静止したり移動したりしていることもあって、掃流砂から浮遊砂への移行が、またそれとは反対に浮遊砂から掃流砂への移行が頻繁に起っているものと想像される。

この場合には、全流砂量に対する掃流砂あるいは浮遊砂の占める比率が相当にはげしく変動していることが予想される。

この様な状態では、浮遊砂量と掃流砂量とを分けて測定することは困難で、実験的に求め得るものは全流砂量の値のみである。

一方、この現象を理論的に取扱おうとする場合、掃流と浮遊とは全く異質の力学的機構にもとづく運動であることから、この両者を区別して扱わなければならない。

筆者の一人は、まずはじめに限界堆積状態における掃流機構のみを明らかにして、つぎにはそれに浮遊砂が加わった場合を考察していくという順序を意図して、限界堆積流では浮遊砂を含まず掃流砂のみが存在する粗砂の場合を検討し、ある程度まで満足しうる実験値との一致を示す理論式を導いた。¹⁾

本報ではその式によって、実験から得られた全流砂量を掃流砂と浮遊砂とに理論的に分離して、それから得られた浮遊流砂濃度を使用して限界堆積流における管内浮遊流機構を、乱れエネルギー方程式によって解析した。

その結果、限界堆積流に浮遊砂が混入することによってもたらされる全体的なエネルギーの変化状態は明確な関数関係（直線）となって現われることを見出した。

これを基にして、浮遊砂を含む管路内での限界堆積流の特性について検討し、管内浮遊流におけるKarman定数の変化は、浮遊砂の濃度分布状況に支配されていることを明らかにした。

2. 乱れエネルギー方程式の浮遊砂を有する管路流への適用

浮遊砂を含んだ水流のエネルギー方程式は、ニュートン流としての取扱いが可能な範囲の濃度・粒径であり、且つ Reynolds 数が大きくて乱れが十分に発達しているならば、次の様な式になると考えられる。

$$\tau \frac{du}{dy} = C_s \rho g (s-1) w_f + \varepsilon + \varepsilon_s + \text{diffusion} \quad \text{----- (1)}$$

こゝに、 τ ：粒子を含んだ水流の内部せん断応力、 y ：壁からの距離、 u ： y における平均流速、 C_s ：浮遊砂の濃度、 ρ ：水の密度、 g ：重力加速度、 s ：砂の比重、 w_f ：砂粒子の沈降速度、 ε ：乱れエネルギーの逸散率、 ε_s ：水と粒子との相互作用による逸散エネルギーである。

上の(1)式において、円管断面内でのある限られた部分でのエネルギー収支を問題にするのではなく、断面全体の平均値に主眼を置いて考えるなら diffusion の項は積分によって消えるから(1)式は

$$\overline{\tau \frac{du}{dy}} = \overline{C_s} \rho g (s-1) w_f + \overline{\varepsilon} + \overline{\varepsilon_s} \quad (2)$$

と書ける。上式において、 $\overline{\quad}$ は断面平均値を意味する。

管水路内の流砂の場合には、3次元の固体壁によって囲まれた流れであるから、その壁面からの粒子や流体のはね返りがあり、そのために主流方向（管軸方向）に対して鉛直な水平方向成分への粒子の動きも開水路の場合よりも可成り活発なようである。

このことも考慮して、(2)式において沈降作用も含めての砂粒子と水との間の相互作用による逸散は、林・山田²⁾と同様な考え方で第二項の中にまとめて、 $\overline{\varepsilon} + \overline{\varepsilon_s} = \beta \overline{\varepsilon}$ と表わすことにすると(2)式は

$$\overline{\tau \frac{du}{dy}} = \overline{C_s} \rho g (s-1) w_f + \beta \overline{\varepsilon} \quad (3)$$

と書くことにする。上の(3)式の左辺は Reynolds 応力によって発生する乱れエネルギーの断面平均値であるが、管底に掃流砂層や堆積砂層が形成されておらず、円管の断面全体が浮遊領域と見なされる範囲の濃度、粒径、および流速であったならば

$$\overline{\tau \frac{du}{dy}} = \frac{1}{\pi a^2} \int_{k_s}^a \tau \frac{du}{dy} \cdot 2\pi (a-y) dy \quad (4)$$

と書ける。ここに、 a : 送砂管の半径、 k_s : 管壁の相当粗度の高さである。(4)式において

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{a}\right) \quad (5)$$

および

$$\tau_0 = \rho g \cdot \frac{a}{2} \cdot i \quad (6)$$

を使用する。ここに、 τ_0 : 管壁面に作用しているせん断応力、 i : 管水路の流れのエネルギー勾配である。

また、浮遊砂の混入に伴う流速分布の勾配の変化は、Kármán 定数の減少として取扱える範囲（すなわち、流速分布の対数則が成立つ範囲の濃度や粒径）を対象としているものとして

$$\frac{du}{dy} = \frac{v_*}{K y} \quad (7)$$

を使用することにする。ここに、 K : 浮遊砂を有する水流の Kármán 定数で、清水のときの値 ($K_0 = 0.4$) より小さくなることが認められている。上式の v_* は摩擦速度で

$$v_* = \sqrt{g \cdot \frac{a}{2} \cdot i} \quad (8)$$

で与えられる。(5) (6) (7) (8) を(4)式に入れて

$$\overline{\tau \frac{du}{dy}} = \rho g \frac{v_* i}{K} \left(\ln \frac{a}{k_s} - \frac{3}{2} \right) \quad (9)$$

が得られる。従って(3)式は

$$\rho g \frac{v_* i}{K} \left(\ln \frac{a}{k_s} - \frac{3}{2} \right) = \overline{C_s} \rho g (s-1) w_f + \beta \overline{\varepsilon} \quad (10)$$

となる。

(10)式の右辺第一項は、砂の浮遊を保持するために費やされるエネルギーで、特に物理的な意味の不明瞭なものではないが、算定のむずかしい第二項の逸散について考える。

浮遊砂を含んだ水流の逸散については未だその機構が明らかでなく、その定量的な取扱いの方法も確立されていない。

また、後述の様に、粒子の存在によってもたらされる逸散が行われる有効体積の減少についても不明確な

点が多い。

そこで、本報では(10)式において浮遊砂の無い場合には右辺の第一項が消えて、また第二項 $\beta \bar{\epsilon}$ の β が 1 に等しくなるので $\bar{\epsilon}$ は左辺と等しくなることを考慮して、 $\beta \bar{\epsilon}$ は左辺と同じ式形をとるものと仮定する。こうに、全ての係数を K' の中に含めて

$$\beta \bar{\epsilon} = \rho g \frac{v_{*i}}{K'} \left(\ln \frac{a}{k_s} - \frac{3}{2} \right) \quad \text{----- (11)}$$

として、これを(10)式に代入すると

$$\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K'} \right) \rho g v_{*i} \left(\ln \frac{a}{k_s} - \frac{3}{2} \right) = \bar{C}_s \rho g (s-1) w_f \quad \text{----- (12)}$$

と書き表わせる。

以後は特に断わりのない場合には浮遊砂濃度は断面平均値を表わすものとして $\bar{C}_s$ を C_s と書きかえて(12)式を

$$\frac{1}{K} - \frac{1}{K'} = \frac{C_s (s-1) w_f}{v_{*i} \left(\ln \frac{a}{k_s} - \frac{3}{2} \right)} \quad \text{----- (13)}$$

と書くことにする。

上の(13)式の右辺を r とすると、 $\frac{1}{K}$ も $\frac{1}{K'}$ もともに r の一次関数であり、 $r=0$ のとき（すなわち、 $C_s=0$ で浮遊砂が無いとき）には、清水の K を $K_0 (=0.4)$ で表わせば $K=K'=K_0$ となることから、Karman 定数を表わす式

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_0} + \frac{\alpha_0 (s-1) C_s w_f}{v_{*i} \left(\ln \frac{a}{k_s} - \frac{3}{2} \right)} \quad \text{----- (14)}$$

が得られる。

これまでの考察では、固体粒子が存在することによる、逸散の行われる有効体積の減少については考慮していない。

水より重い砂粒子を流している場合には、中立浮遊粒子の場合と異り、明確な濃度分布を形成しやすい。

特に、高流速ではなく、限界堆積流の様に管底に砂の静止堆積層が形成される直前の流速ではそうであろう。

重力の影響により、砂粒子は管底附近に高濃度で集中し、そこから離れて上方へ行くほど濃度が減少する傾向があり、この傾向は砂粒子の粒径が大きくなる程（すなわち、砂粒子の重力や沈降速度が増す程）顕著になっている。

管水路の管底附近（移動砂層が存在する場合には砂層の表層近く）や開水路の底近くの部分では、乱れの強度も大きく、また乱れの平均渦径も小さいので、逸散量も多いところであるが、そこへ高濃度の浮遊砂が入ると、さらに平均渦径が縮小して逸散を促進するが、一方では有効逸散体積の減少による影響も無視出来ないと思われる。

この様な高濃度の粒子を含む流れは、乱れの強度や規模も正確に測定することはむずかしいであろう。

そのために、拡散係数も算定しにくく、濃度分布や濃度そのものの値も容易には求めることは出来ないと考えられる。

中立浮遊粒子の場合には、粒子が偏在することなく、乱れの強度や乱れのスケール（混合距離や渦径）に無関係に、粒子が断面全体にわたって、ほぼ均等に分布すると仮定して差支えないと思われるので、有効逸散体積の減少と、その結果生じる逸散エネルギーの減少の量もある程度まで推定出来るように思われる。

濃度の仮定がむずかしく、従って有効逸散体積も不確実さをまぬがれないので、本報においては差し当って、この影響を(14)式の係数 α_0 の中に含めて考えることにする。

また、この(14)式は流水中に浮遊砂が混入した場合の全体的なエネルギー逸散量を、砂の浮遊を維持するのに使われるエネルギーと、それ以外の全ての逸散エネルギーとに分割して、この両者のそれぞれの分担割合を実験的に定められた係数 α_0 によって算定するという点では、本質的に志村の方法と同じ考え方によって誘導されたものである。

志村は開水路流れ、および広矩形断面の閉管路流れのような二次元的な流れと見なし得る様な流れの場合の浮遊流機構を対象として解析し、それに基づいて Vanoni⁴⁾と Ismail⁵⁾の実験値を整理して $\alpha_0 = 4.8$ であることを見出している。

しかし、この場合に用いられた実験値では、断面平均浮遊濃度 C_s の値は最大でも 1% 程度であり、また粒径も 0.1mm ($w_f \div 8 \frac{\text{mm}}{\text{sec}}$) と 0.15mm ($w_f \div 18 \frac{\text{mm}}{\text{sec}}$) で、比較的広範囲に散布されやすい条件を有するものである点に留意する必要があるように思われる。

円管による土砂輸送の場合には限界堆積流の場合でさえも、 C_s は 20% に達していたり、また粒径も 1mm ($w_f = 150 \frac{\text{mm}}{\text{sec}}$) を超えていることも稀ではない。

このような場合には、掃流状態に近い浮遊砂も多く発生しているであろうし、また円管断面内の浮遊領域の一部では、ある限度以上に高濃度に浮遊砂が集中していて、流速分布の対数則が成立たなくなっている部分も生じていることが予想される。

また、円管内での浮遊流機構は、三次元の固体壁の存在により、拡散係数の分布や平均渦径の分布状況等のいくつかの点で開水路流れとは内部構造を異にしているので、二次元流れの実験から得られた値をそのまま使用することには無理があるであろう。

(14)式の α_0 は、清水流中に浮遊砂が混入することによってもたらされる諸影響を包括的に表わす値であると言えるであろう。

すなわち、乱れのスケールや強度の変化、逸散体積の減少、砂粒子と水との相互作用による逸散、また濃度分布が形成された場合には、その分布状況によって異なる逸散状況の特性等、これ等諸因子間の有機的相互関係と、それに基づいたこれ等諸因子の累積による逸散のメカニズムの特性を総合的に代表する値であるから、この α_0 を定数として扱うことには疑問が残るように思われる。

3. 浮遊砂を有する管水路の流れの断面平均流速

円管内に浮遊砂を含んで水が流れている場合、清水が流れている場合よりも流速分布の勾配が急になっていて、壁面でのせん断応力が同じであったならば清水流よりも断面平均流速が増加することが認められている。このことは一方から見れば、平均流速が同じであったならば、浮遊砂を有する水流の方が、それを含まない流れよりも壁面せん断抵抗が少なく、摩擦によるエネルギー損失が相対的に減少するとも考えられよう。

浮遊砂を含まない管路内の水流の断面平均流速 v_m と摩擦速度 v_* との比は、次の様な対数法則が成立っている。

$$\frac{v_m}{v_*} = \frac{1}{K_0} \ln \frac{a}{k_s} - \frac{3}{2K_0} + B (=8.5) \quad \text{----- (15)}$$

K_0 は前述の様に清水の Karman 定数で、 $K_0 = 0.4$ である。

これにある量の浮遊砂が加わって流速分布の勾配が変化した場合で、その変化が Karman 定数の変化で議論出来る範囲だったならば（すなわち、流速分布が対数法則に従っている範囲だったならば）(15)式は

$$\frac{v_{ms}}{v_*} = \frac{1}{K} \ln \frac{a}{k_s} - \frac{3}{2K} + B \quad \text{----- (16)}$$

となる⁶⁾。こゝに、 v_{ms} ：浮遊砂を含んだ水流の断面平均流速である。(16)式は、管底に堆積砂や移動砂層が存在せずに、円管の断面全体が有効浮遊領域と見なされ、流れる砂粒子は全てが浮遊砂として取扱える場合を対象としたものである。

浮遊砂が加わった結果として生じる断面平均流速の増加は、もし壁面摩擦応力が同じであったならば、(15)と(16)から次の様に書き表わせる。

$$\frac{v_{ms} - v_m}{v_*} = \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K_0} \right) \left(\ln \frac{a}{k_s} - \frac{3}{2} \right) \quad \text{----- (17)}$$

4. 限界堆積流の浮遊領域における 断面平均流速

2 節と 3 節においては、全ての砂が円管内を浮遊状態で流れ、流速分布には対数法則を適用し得る場合を対象に考え、その様な場合における Kármán 定数の変化を表わす式(14)と、断面平均流速の増加を表わす式(17)とを導いた。

これ等二つの式を限界堆積流、すなわち管底に停止直前の状態で摺動している移動砂層が存在し、それによって有効浮遊断面積が減少されている場合に当てはめる事を考える。

この様な場合には断面積が減少する以外に、断面形状も円形から歪んだ形状に変形している。

これ等の影響を取り入れるために、真円の半径 a からある値を差し引いた相当半径（仮称）を導入しなければならない。

この他にも、相当粗度の高さ k_s にしても、断面全体が有効浮遊領域として扱い得る場合には、円管の内壁面の状態から定まる相当粗度 k_s をそのまま使用することが出来るが、管底に始動直前の静止砂層（あるいは静止直前の摺動砂層）が存在する場合には、その砂層を構成する砂の粒径に支配される砂層表層での相当粗度と、それ以外の部分、すなわち円管の内壁面での相当粗度との両者の影響を総合的に表わす相当粗度の値を導入しなければならない。

この相当粗度の修正と相当半径の補正は、相対粗度の修正として一括して扱うことにする。

そこで、管底に移動砂層が存在する場合の相対粗度は、砂層が存在しない場合の相対粗度 a/k_s にある係数を乗ずるという簡単な補正を行うことにする。すなわち、

$$\frac{a}{k_s} \longrightarrow \eta \frac{a}{k_s}$$

とする。こゝに η は砂の粒径 d や、管底の移動砂層の断面積（図-1の A_b ）によって変る値であると思われる。

限界堆積流での移動砂層の断面積 A_b は、後述の様に次の様に表わされることが判っている。

$$A_b = A_b(i_c, D, C_{dep}, s, \mu_w, \mu_s) \quad (18)$$

従って η は

$$\eta = \eta(d, i_c, D, C_{dep}, s, \mu_w, \mu_s) \quad (19)$$

と考えられる。こゝに、 i_c ：限界堆積状態での動水勾配、 D ：送砂管径、 C_{dep} ：移動砂層 A_b における砂の濃度（体積比）で、限界堆積流ではほぼ静止状態のときの濃度を維持していると仮定されている。また、 s ：砂粒子の比重、 μ_w ：管底の固体壁面と移動砂層との間の動摩擦係数、 μ_s ：砂層内部の砂と砂との間の動摩擦係数である。

(14)式と(17)式の中に含まれる相対粗度の影響を表わす項、 $\ln a/k_s$ は $\ln \eta a/k_s$ と書き替えられて、(14)式は、

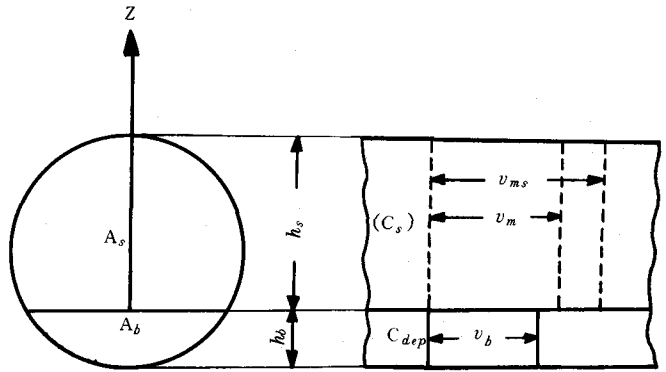


図-1 浮遊砂を伴う管路内の限界堆積流の
解析に用いたモデル

$$\frac{1}{K} - \frac{1}{K_0} = \frac{\alpha_0 C_s (s-1) w_f}{v_{*c} i_c (\ln \eta \frac{a}{k_s} - \frac{3}{2})} \quad (20)$$

と書き表わされ、また(17)式は

$$\frac{v_{ms} - v_m}{v_{*c}} = \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K_0} \right) \left(\ln \eta \frac{a}{k_s} - \frac{3}{2} \right) \quad (21)$$

と書ける。こゝでは、限界堆積流での摩擦速度や動水勾配が、それぞれ v_{*c} 、 i_c と記され、一般の場合のそれ等と区別されている。

(20)式は限界堆積流での浮遊領域 A_0 に、浮遊砂が入っていることが原因で起こる Kármán 定数の変化を表わし、また(21)式も同様に浮遊砂の存在によって招来される断面平均流速の変化を表わす式である。(20)と(21)から

$$v_{ms} - v_m = \frac{\alpha_0 C_s (s-1) w_f}{i_c} \quad (22)$$

が容易に求まって、相対粗度の影響を表わす項、すなわち $\ln \eta \frac{a}{k_s}$ の項が消える。

すなわち、管底の移動砂層の厚さが変化して相当半径（仮称）がどのような値をとろうとも、また移動砂層を構成する砂の粒径がどのような値であろうとも（すなわち、管壁面の粗度と移動砂層表層での粗度との両者を総合的に考慮した粗度要素がどのようなものであろうとも）浮遊領域における断面平均流速の変化量はそれには無関係になって来る。こうなると、相当半径や相当粗度に対しての困難な推定や仮定が不必要となってくる。

断面平均流速に主眼を置いた考察方法は、この様な点では好都合である。

5. 浮遊砂の混入によってもたらされる流砂エネルギーの変化状況

まずはじめに、限界堆積流において浮遊領域 A_0 に浮遊砂が無く、全ての砂が掃流状態で移動している粗砂の場合の混合体の全流量 Q_0 は

$$Q_0 = A_0 v_c \quad (23)$$

となる。こゝに、 A_0 ：円管の全断面積で $\pi D^2/4$ （ D は管径）である。 v_c ：浮遊砂を含まないで、掃流砂のみが流れている砂水混合体の断面平均流速である。

ところで、 v_c と同じ断面平均流速で清水のみを流した場合の動水勾配を i_0 で表わすと

$$i_0 = f \frac{1}{D} \frac{v_c^2}{2g} \quad (24)$$

と書ける。こゝに、 f ：Darcy-Weisbach の流体抵抗係数である。また、限界堆積流における摩擦速度 v_{*c} は

$$v_{*c} = \frac{1}{2} \sqrt{g D i_c} \quad (25)$$

である。(24)式を

$$v_c = \sqrt{\frac{2g D i_0}{f}} \quad (26)$$

と書きなおして、(25)式と(26)式より

$$\frac{v_c}{v_{*c}} = \sqrt{\frac{8}{f} \frac{i_0}{i_c}} \quad (27)$$

が得られる。ところで、限界堆積流では浮遊砂を発生しないような粗砂の場合には

$$\frac{i_0}{i_c} = \frac{1}{3} \quad (28)$$

であることが理論的にも実験的にも確認されている（本論文末尾補遺参照）から(27)は

$$\frac{v_c}{v_{sc}} = \sqrt{\frac{8}{3f}} \quad \text{-----} (29)$$

と書ける。この関係を(29)式に入れると

$$Q_0 = A_0 \sqrt{\frac{8}{3f}} v_{sc} \quad \text{-----} (30)$$

が得られる。つぎに、限界堆積流において、浮遊領域に浮遊砂を有する細砂の場合を考えると、浮遊領域（断面積 A_s ）に濃度が C_s （断面平均値）である砂の混入により平均流速が(22)式で与えられる（ $v_{ms} - v_m$ ）だけ増加したと考える

$$Q_{0s} = A_0 \sqrt{\frac{8}{3f}} v_{sc} + \frac{\alpha_0 C_s (s-1) w_f}{i_c} A_s \quad \text{-----} (31)$$

と書き表わす。こゝに、 Q_{0s} ：限界堆積流において、浮遊領域 A_s に浮遊砂を生じる細砂の場合の砂水混合体の流れの全流量である。

$$\frac{Q_{0s}}{A_0} = v_{cs} \quad \text{-----} (32)$$

とくと、 v_{cs} は浮遊砂をとまう限界堆積流の断面平均流速となる。(31)と(32)より

$$\frac{v_{cs}}{v_{sc}} = \left(\frac{8}{3f}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\alpha_0 C_s (s-1) w_f}{v_{sc} i_c} \frac{A_s}{A_0} \quad \text{-----} (33)$$

が得られる。(32)の v_{cs} で清水のみを流した場合の動水勾配を求めて、それを i_{0s} で表わすと

$$i_{0s} = f \frac{1}{D} \frac{v_{cs}^2}{2g} \quad \text{-----} (34)$$

となり、(25)と(34)から

$$\frac{v_{cs}}{v_{sc}} = \sqrt{\frac{8}{f} \frac{i_{0s}}{i_c}} \quad \text{-----} (35)$$

を得る。この(35)式を(33)式に代入して

$$\left(\frac{i_{0s}}{i_c}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\alpha_0 C_s (s-1) w_f}{v_{sc} i_c} \sqrt{\frac{f}{8}} \frac{A_s}{A_0} \quad \text{-----} (36)$$

と書き表わすことが出来る。

上の(36)式において、浮遊領域 A_s に浮遊砂が存在せずに、全ての砂が掃流状態で管底を移動している場合には、 $C_s = 0$ となって右辺第二項が消えて、またこの場合には i_{0s} は i_0 と書き替えられるから、(36)式は(28)式に帰着する。すなわち、浮遊砂を含まない粗砂の場合の限界堆積流の関係式と一致する。

(36)式の右辺第二項は、浮遊砂が混入すること起因する全体的なエネルギーの変化の状態を表わしている項で、Karman 定数の変化を表わしている(14)式の右辺第二項に対応する項であるとも考えられる。

6. 限界堆積流の浮遊領域および浮遊砂濃度の算定

前節の(36)式の α_0 の値を定めるのに際して、式中の C_s と A_s の値が求めにくいことが問題となっている。

その他の値については、測定によって求めることが、それほど困難な水理量ではない。

本節においては、この A_s と C_s との二者の値の算定について考えることにする。

はじめに、限界堆積流における有効浮遊領域の断面積 A_s についてであるが、管路内の限界堆積流での管底の移動砂層の厚さ h_b は相当にはげしく変動し、その測定も困難であるので、従って図-1の A_s の値も可成りの変動が見られ、正確な値を実験から求めるのは容易ではない。

筆者の一人は前報において、限界堆積流では全ての砂が掃流状態で移動していて浮遊砂がほとんど生じていない粗砂の場合を対象として解析を試みた。

この場合、管底の砂層は停止直前の状態で撓動を継続していたり、あるいは始動直前の状態で静止を維持していたりすることを交互に繰り返していると考えられるが、その砂層の厚さは砂層の表層に作用しているせん断応力と、管底壁面と砂層との間の動摩擦係数 μ_w 、砂層内部の砂と砂との間の動摩擦係数 μ_s とによって定まること。また、砂層の移動速度（平均値）は v_b で表わされ v_{sc} に比例し、その比例係数もまた μ_m と μ_s に関係するとして、ある程度まで満足しうる実験値との一致を示す式を導いた。

浮遊砂が存在しない場合のこの算定方法は、砂層の上方に浮遊砂があっても全く差し支えないであろうと考えられる。

そこで、浮遊砂の発生している限界堆積流での管底の移動砂層の断面積と移動速度についても、浮遊砂のない場合の式をそのまま使用することにして

$$A_b = \frac{D^2}{2\mu_w^2} \left(\frac{i_c}{C_{dep}(s-1)} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{3\mu_w} + \frac{1}{2\mu_s} \right) \quad (37)$$

$$\frac{v_b}{v_{sc}} = \left[\frac{4}{3f\mu_w \left(\frac{1}{3\mu_w} + \frac{1}{2\mu_s} \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (38)$$

を用いることにする¹⁾。こゝに、 A_b は図-1に示される様に、円管断面の中で管底の移動砂層の占める断面積である。また、 C_{dep} には前述の様に静止状態のときの砂の濃度を用いることにする。

上の(37)式と(38)式によって、掃流状態で輸送される砂量 Q_B の値は

$$Q_B = A_b v_b C_{dep} \quad (39)$$

として直ちに求めることが出来る。(37)式を用いて A_s の値は近似的に

$$A_s = A_0 - A_b \quad (40)$$

と考えることにする。

つぎに、浮遊領域 A_s における断面平均浮遊砂濃度 C_s について考える。

この値の算定は、本報での主要なテーマの一つであるが、第1節のまえがきにも述べた通り、この C_s を独立に測定することには未だ実験技術的に未解決の問題が残されている。

本報では、この C_s に関して以下の様な取扱いをすることにする。

浮遊砂を有する限界堆積流において、掃流砂と浮遊砂の両者を一括した全体的な混合体の流砂濃度（測定によって得られる）を C_{max} で表わすすると、全流砂量は

$$Q_S + Q_B = C_{max} Q_{0s} \quad (41)$$

と書ける。こゝに、 Q_S ：全流砂量のうち浮遊状態で輸送される砂量、 Q_B ：(39)式から求められる様な掃流で送られる全砂量である。

一方、(31)式より

$$C_{max} Q_{0s} = C_{max} A_0 \left[\left(\frac{8}{3f} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\alpha_0 C_s (s-1) w_f}{v_s i_c} \frac{A_s}{A_0} \right] v_{sc} \quad (42)$$

と書き表わすことが出来る。ところで、図-1より

$$C_{max} Q_{0s} = A_b v_b C_{dep} + A_s v_{ms} C_s \quad (43)$$

の関係があることが判り、(43)式の v_{ms} は(22)より

$$v_{ms} = v_m + \frac{\alpha_0 C_s (s-1) w_f}{i_c} \quad (44)$$

であり、また上式の v_m は図-1より

$$v_m = \frac{A_0 v_c - A_b v_b}{A_s} \quad (45)$$

であることが明らかである。

このようにして、(44)式と(45)式の間を(43)式の右辺第二項に代入して、それを(42)式の右辺と等置すれば C_s について解くことが出来る。

但し、この場合(45)式の v_c には(29)式より

$$v_c = v_{*c} \sqrt{\frac{8}{3f}} \quad (46)$$

を使用する。また、流送される全砂水混合体 Q_{os} に対する全掃流砂量（浮遊で送られる砂以外の全ての砂）の比率（体積比）を C_b で表わすことにして

$$C_b = \frac{Q_b}{Q_{os}} = \frac{A_b v_b C_{dep}}{A_0 v_{cs}} \quad (47)$$

と書き表わすことにする。以上の諸式を用いて若干の計算を行って

$$C_s = C_{max} \frac{[(i_{os}/i_c)^{\frac{1}{2}} - (1/3)^{\frac{1}{2}}](C_b/C_{max})}{[(i_{os}/i_c)^{\frac{1}{2}} - (1/3)^{\frac{1}{2}}](C_b/C_{dep})} \quad (48)$$

の関係式が得られる。この(48)式は、実験的に求められた全混合体の流砂濃度 C_{max} と、同じく実験から得られる測定値 i_{os}/i_c を用いて、浮遊砂濃度の値だけを分離する式である。

このようにして得られた C_s を(36)式に代入して、縦軸に $(i_{os}/i_c)^{\frac{1}{2}} - (1/3)^{\frac{1}{2}}$ を、横軸に(36)式の右辺第二項を α_0 で割って表示したものが図-2⁷⁾、図-3⁸⁾、図-4⁹⁾であるが、測定値はいずれも一本の直線を表わして明瞭な相関が認められる。

各図の縦座標は、浮遊領域に浮遊砂が混入することが原因で生じる全体的なエネルギーの変化状況を表わして、浮遊砂を有しない限界堆積流に比べて全体的な逸散エネルギーがどれだけ減少するかを示す値である。

すなわち、縦座標の値が0になるときは、 $i_{os}/i_c = 1/3$ となって浮遊砂を含まない粗砂の場合の限界堆積流の損失エネルギーの関係と一致する。

しかし、細砂を流している場合の限界堆積流では必ず浮遊砂が発生しているので、その様なことは起こり得ない。

また、横座標の値が0になることは、 $C_s = 0$ になることであって浮遊砂が無い場合に相当するが、これも細砂の場合の限界堆積流には適用し得ない。

このことから、限界堆積流での浮遊領域に浮遊砂を含む場合と含まない場合とでは、エネルギー逸散に関しては不連続的な変化が起こっていることが各図からも認められるように思われる。

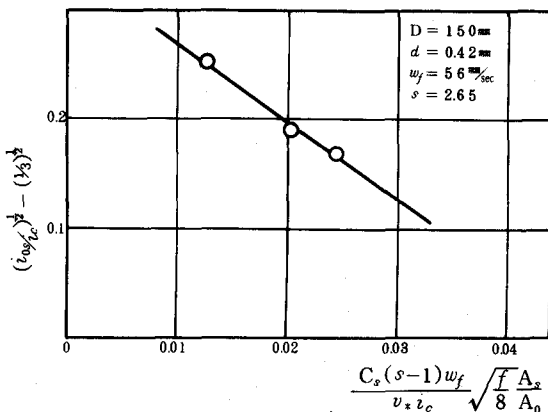


図-2 Durandの実験値⁷⁾

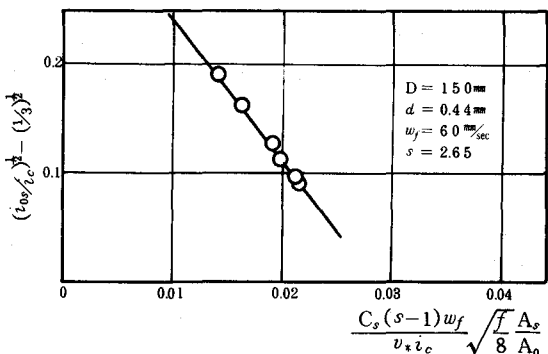


図-3 Condolios and Chapusの実験値⁸⁾

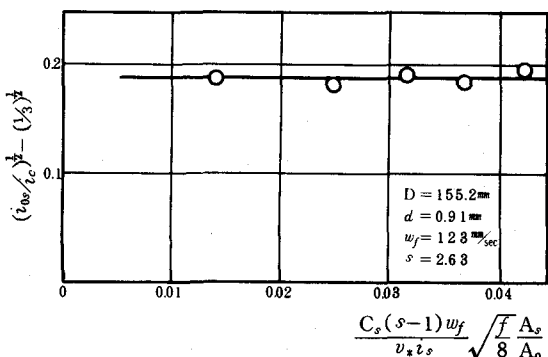


図-4 八木等の実験値⁹⁾

7. 浮遊砂濃度の増減に伴う乱れエネルギー逸散の特性

浮遊砂のない水流の乱れの場に極く少量の浮遊砂が混入すると Kármán 定数が急激に減少し、それ以後は比較的ゆるやかに減少するようである。(例えば日野の論文¹⁰⁾の図-4)

管水路内でも同様に、僅かな浮遊砂の導入によって流速分布の勾配の急激な増加を招来して、同一の断面平均流速の場合には、相対的な摩擦損失の可成りの減少をもたらすと考えられる。

前節の各図にも見られるように、限界堆積流において浮遊砂の無い状態から浮遊砂が発生している状態へ移行する際に、エネルギー逸散状況が不連続的に変化しているのはこのためではないかと思われる。

大小の渦から成る乱れの場に固体粒子が入った場合のエネルギー収支に関して、一般に次の様な因子が加わることが認められている。

逸散量を減少させる要因として

- ③ 大きな渦が縮小して、前述の様に流速分布の勾配を増加させて相対的な摩擦損失を減少させる。
- ⑤ 水流の乱れの空間の一部が固体粒子によって占有されるために、有効逸散体積の減少が生じてそれによる逸散量の減少をもたらす。

また、エネルギー消費を増加させる因子として

- ⑥ 小さな渦が縮小して、逸散量を増加させる。
- ④ 水より重い固体粒子の場合には、その浮遊を保持するためのエネルギーが消費される。

これ等四者の多様な組合わせによる色々なエネルギー逸散のし方が考えられるが、これ等個々の因子の相対的な影響力は、その場での砂粒子の濃度、粒径、沈降速度、さらに水流の乱れの強度、渦径によって左右されるであろう。

平均渦径の大きな乱れの中に少量の砂粒子が入った場合は、④の効果の方が⑥の影響よりも卓越して、全体としてのエネルギー逸散は減少するように作用すると考えられる。この場合、③と⑤は無視し得るであろう。

これに反して、ある量の浮遊砂を含んでいて平均渦径が縮小されている状態では、大きな渦の存在比が大巾に減少している状態であるから、そこへ新たな浮遊砂が加わって濃度を増加させると、さらに全体としての渦径を縮小させる結果として③と⑤の現象も起こるが、それ以上に⑥と④の作用が優越して全体としての消費を増加させる方向へ働くであろう。

図-2、図-3で損失エネルギーの減少量が、濃度とともに低下の傾向を示しているのは、このためではないかと思われる。

管水路の流砂において、限界堆積状態を維持したまま浮遊砂濃度が増すということは、それだけ管底の移動砂層の表層に作用するせん断応力も強くなっていて砂層の厚さが増しているということである。

こうなると水路の有効浮遊断面積が縮小して、浮遊流のみに関して言えば、水路の代表寸法が減少することを意味する。

この水路寸法の減少¹¹⁾と浮遊砂濃度の増加の両者による相乗効果によって、渦の縮小を促進しているようである。(図-2、図-3)

本節での以上の様な議論は、固体壁の存在を考慮した乱れの場での、浮遊砂濃度の増減に伴うエネルギー収支の一般的な変化を考察して、それを管水路内の限界堆積流の浮遊領域にまで拡張して適用させたものである。

本節の様な現象の解釈のし方で、実験結果を断面平均的に処理した線図、図-2と図-3をある程度まで、それも定性的な範囲内で説明し得たのは、これ等の図では砂粒子の径が小さく、浮遊砂が浮遊領域内で広範囲に散布されやすいためではないかと思われる。

すなわち、浮遊砂の増減に起因する諸影響が、浮遊領域のほゞ全体に及ぶ傾向があるためと考えられる。

これとは異り、図-4の場合の様に、限界堆積流での浮遊砂の粒径が大きく、そのために浮遊領域内でのある限られた範囲に粒子が高濃度で集中し、それ以外の所はほとんど砂が存在しないという傾向を示す場合

には、若干の浮遊砂濃度（断面平均値）の増減も、断面内の限られた範囲にしか影響を与えない。

この様な傾向を示す沈降速度の大きな砂粒子の場合については、本節のモデルの範囲では説明することが出来ない。

この様に、粒子の偏在の著しい場合を解析するには、砂粒子の重力が原因となって形成される鉛直方向の濃度勾配の影響もあわせて考えなければならない。

本報のように、断面平均値に主眼を置いて考察を進めていく方法は、この辺りに限界が見られるように思われる。

8. 濃度勾配の乱れエネルギー逸散に及ぼす影響について

管水路内の限界堆積流では、管底に砂の静止堆積層が形成されはじめる臨界の状態であるから、一般に浮遊領域の砂粒子は管底の移動砂層の表層近くに集まる傾向を示す。

当然のことながら、この傾向は粒径の大きな砂（すなわち、沈降速度の大きな砂粒子）ほど顕著になると考えられる。

粒径の増加に従って、この砂粒子の偏在の程度がある限界を超えると、浮遊領域 A_0 の内部でも、一方では浮遊砂が高濃度で集中していて乱流構造が大きく変化している部分と、他方では粒子が存在せずに、従って流れの内部構造にも変化が生じていない部分とに分かれて来るであろう。

前者は A_0 の下部（すなわち、移動砂層の表層近く）に存在し、渦径や乱れの強度等の点でも清水流と大きく異った構造を有し、浮遊領域ではあっても場合によっては流速の対数分布も成立たなくなっている所も生じるであろう。この様な状態では、掃流状態に近い浮遊砂も相当多く含まれていると思われる。

後者は A_0 の上部（アーチ状の固体壁面に沿った部分）に発生しており、そこでは平均渦径も清水流のまゝのものであるから、大きな渦の存在比率も可成り高いと考えられる。

この様に、同じ浮遊領域内である A_0 に、全く異った様相を呈する二つの典型的な乱れの場合が共存する場合には、そこへ新たな浮遊砂が加わった場合、その一部は下方の粒子密度の高い部分に加わって、そこで逸散を増加させるように作用するであろう。すなわち、図-2と図-3に現われているのと同様な効果を A_0 の下方の部分にもたらすであろう。他の一部は砂層から離れた清水流の部分にはみ出されて、そこで前節の④の作用によって逸散を減少させる様に働くと思われる。

この様に、 A_0 断面内の上部では逸散の減少を、また下部では逸散の増加を助長するので、この両者が打ち消し合う結果として、図-4に見られるように、断面平均的に見た浮遊砂の混入に伴う逸散エネルギーの変化量が、 C_0 の値のある範囲内での増減に対しても一定値を維持しているのではないと思われる。

以上の様に、乱れエネルギー逸散のメカニズムは、砂粒子の濃度勾配（粒子の偏在の程度）によって可成り複雑な変化を示し、断面平均逸散量に対しても少なからぬ影響を与えていることが理解されよう。

この濃度分布による影響を算定するために、周知の拡散方程式

$$\epsilon_{0s} \frac{dC}{dZ} + w_f C = 0 \quad \text{----- (49)}$$

を使用することにする。ここに、 Z ：管底の移動砂層の表層からの高さ、 ϵ_{0s} ：拡散係数である。上式より、濃度分布の絶対値として

$$\left| \frac{dC}{dZ} \right|_{C=C_0} = \frac{w_f C_0}{\epsilon_{0s}} \quad \text{----- (50)}$$

を用いることにする。(50)式は、浮遊領域 A_0 内において、断面平均濃度 C_0 を有する箇所での濃度勾配（絶対値）を表わすものである。

この値は必ずしも、濃度勾配の形成に伴う乱れエネルギー逸散のメカニズムの特性を直ちに規定するものではないことはもちろんである。また、濃度勾配の形成が、逸散エネルギーの断面平均値に対して与える

影響とも直接に結びつくものでもないし、さらに断面全体での粒子の偏在の状況を的確に代表するものであるかという点にも疑問があろう。

しかし、砂粒子がどの程度に偏在しているのか（またはどの程度に均等に分布しているのか）を判定するための、おおよそその目安としては、ある程度まで使用し得るのではないと思われる。

実験的に求められた乱れエネルギー逸散量の断面平均値から、濃度勾配の形成がもたらす影響によるものを的確に抽出する方法が見当たらないので、それを行うのに拡散方程式で代用しようとするものである。

50式で最も問題になるのは、拡散係数 ϵ_0 の定め方であるが、これには Lane and Kalinke¹²⁾および Ismail⁵⁾の考え方を参考にして、 A_s での拡散係数の平均値を想定して

$$\epsilon_{0,s} = B_0 v_{sc} h_s \quad \text{----- (51)}$$

の関係式を用いることにする。ここに、 B_0 ：比例定数、 h_s ：図-1に示されるように、砂層の表層から上方の管壁までの距離であって、 $h_s = D - h_b$ で与えられる。51式を50式に代入して

$$B_0 \left| \frac{dC}{dz} \right|_{C=C_s} = \frac{w_f C_s}{v_{sc} h_s} \quad \text{----- (52)}$$

と書き表わせる。

前出の(14)式、(22)式および(36)式の中の α_0 の値の中にも濃度勾配形成による影響が含まれているが、これを α_0 から切り離すために、(36)式を書き直して

$$\alpha_0 = \left[\left(\frac{v_{0s}}{v_c} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \frac{v_{sc} i_c}{C_s (s-1) w_f} \sqrt{\frac{8}{f}} \frac{A_0}{A_s} \quad \text{----- (53)}$$

として、この(53)式の右辺を縦座標に、(52)式の右辺を横軸にとって表示したものが図-5である。

この図から、 α_0 と濃度分布との間には可成り明確な相関が認められると思われる。

図-5によれば、実験値は二つのグループに分かれているようである。

その一つは Condolios and Chapus の実験値で、

$$\alpha_0 = 3 \left(\frac{w_f C_s}{v_{sc} h_s} \right)^{-\frac{2}{3}} \quad \text{----- (54)}$$

で表わされる群で、もう一つは Durand および 八木等の実験値を代表するもので

$$\alpha_0 = 5 \left(\frac{w_f C_s}{v_{sc} h_s} \right)^{-\frac{2}{3}} \quad \text{----- (55)}$$

では近似される。この両者を一括して、

$$\alpha_0 = \alpha_1 \left(\frac{w_f C_s}{v_{sc} h_s} \right)^{-\frac{2}{3}} = \alpha_1 \left(B_0 \left| \frac{dC}{dz} \right|_{C=C_s} \right)^{-\frac{2}{3}} \quad \text{----- (56)}$$

と書き表わすことが出来るが、 α_0 は第2節でも述べた様に、多様な因子による影響を包括的に表わしているものである。

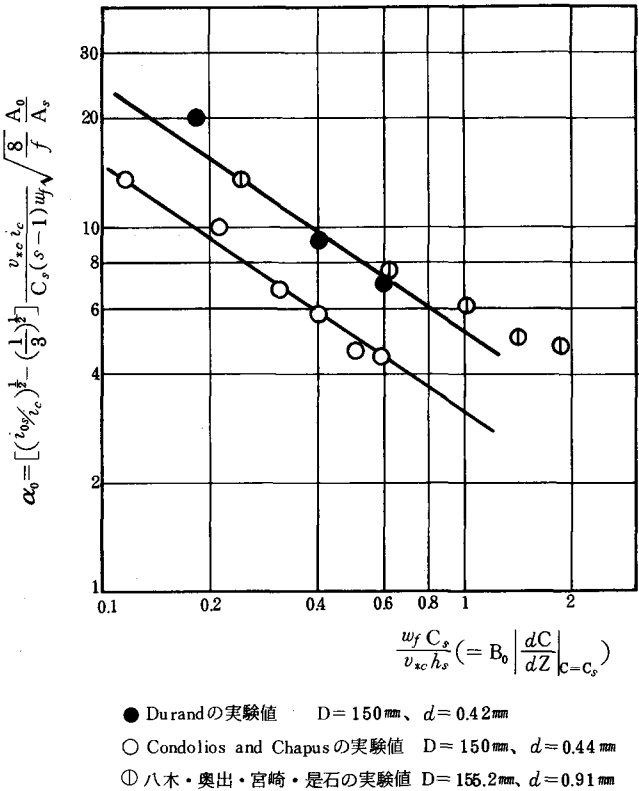


図-5 α_0 と濃度勾配との関係

(56)式の α_1 は、それ等の諸因子の中から(56)式によって濃度勾配の影響が除去されたものと考えられる。

また、 α_1 の中には第2節で述べた諸因子以外にも、管底の移動砂層の厚さの不均一（開水路の河床波とも類似点を有する）によってもたらされる浮遊流機構の変化も含まれていなければならないと考えられる。

α_1 については、さらに精密な実験と理論によって吟味される必要があるであろう。

さし当って、 α_0 の値は濃度勾配とともに冪関数的に（濃度勾配の $-\frac{2}{3}$ 乗に比例して）減少していることは言える様に思われる。

図-5において、横座標の値が1を超える辺りから、測定値が次第に(56)式から外れていく傾向が現われているが、これは拡散係数に対しての沈降速度や粒子濃度が大きくなるために、浮遊領域 A_0 の下部に粒子が高濃度で集中して、対数法則速度分布に従わなくなる部分が発生するためだと考えられる。

9. 結 語

管水路内の限界堆積流で、掃流砂と浮遊砂が共存する場合を対象として、図-1に基づいて現象の模型的説明を試みたが、この現象をある程度まで理論的に整理することが出来たように思われる。

本報での解析結果は、次の三点に要約されると思われる。

① 筆者の一人が前報¹⁾において取扱った管水路内の掃流理論を基にして、管路内の全流砂量から浮遊砂量の値を抽出する式を導いた。図-2、図-3、図-4、図-5からもそれが比較的妥当な結果を与えるものであると判断される。

② (14)式、(22)式、(56)式における α_0 は、管内浮遊流機構の特性を支配する重要な数値であるが、この α_0 は流速分布が対数法則に従う範囲の濃度であったならば、(56)式に表わされる様に、濃度勾配の絶対値の $-\frac{2}{3}$ 乗に比例することが判った。（図-5）

但し、(56)式の指数 $-\frac{2}{3}$ の物理的根拠については未だ検討されていない。

③ (56)式の α_1 については、多様な因子が複雑に組合わされていると推定されるが、この α_1 の理論的内容の検討は、いぜんとして今後の課題として残されている。

本研究の推進にあたり、中央大学の林泰造教授により懇切なる御指導を賜った。こゝに厚く感謝を捧げる。

補 遺 浮遊砂を伴わない限界堆積流の i_0/i_c の値について（前報¹³⁾よりの摘要）

一般に固体粒子を含む管水路内の流れの動水勾配 i は次のように表わされる。

$$i = i_w(1 + C\varphi) \quad (57)$$

こゝに、 i_w ：固液混合体の平均流速と同一の平均流速で清水のみを流した場合に生じる動水勾配、 C ：流送された混合体の中で、固体粒子の占める体積比率。また、上式の φ は、次の式形で表わされることが従来の実験により確認されている。それによると、この式の指数 m は、粒子の径が大きい場合には3となり、細粒の場合には3より大きな値をとることが見出されている。

$$\varphi = \frac{i - i_w}{Ci_w} = K(F_r)^{-m} \quad (58)$$

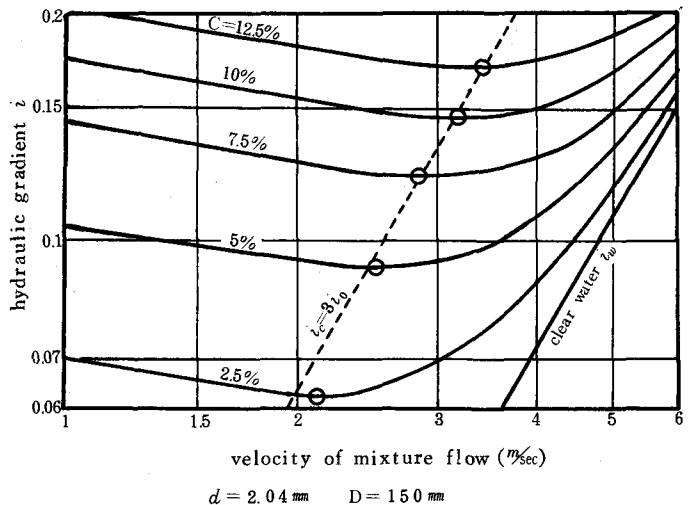


図-6 砂水混合体の平均流速とエネルギー勾配との関係
(Condolios and Chapus⁸⁾による)。および i_c と i_0 との関係

こゝに

$$F_r = \frac{v}{\sqrt{gD(s-1)}} \quad (59)$$

であり、 v ：固液混合体の断面平均流速である。いま、(58)式を

$$C = \frac{(F_r)^m}{K} \left(\frac{i}{i_w} - 1 \right) \quad (60)$$

と書きなおし、また

$$i_w = f \frac{1}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (61)$$

の関係式を用いる。こゝで(59)式と(61)式を(60)式に代入すると次式をうる。

$$C = \frac{(F_r)^m}{K} \left[\frac{2i}{f(F_r)^2(s-1)} - 1 \right] \quad (62)$$

上式から C を最大にする条件としての F_r を求めるために

$$\frac{\partial C}{\partial F_r} = 0 \quad (63)$$

を満足するように F_r を定め、それを F_{rer} で表わすと

$$F_{rer} = \left[\frac{2(m-2)i}{m(s-1)f} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (64)$$

が求まる。この内部Froude数のとき固液混合体の流送濃度は最大となり、また(59)式からこのような内部Froude数を満足すべき管径と流速（すなわち、最適管径と最適流速）の相互関係が規定される。

(64)式中の i は、その動水勾配で最大濃度の粒子を流送している場合のものであるから、これは限界堆積流での動水勾配に対応するものであり、 i_c と記される。

さらに、これ等の式を5節のはじめに述べた様な、浮遊砂の発生しない限界堆積流（すなわち、粗砂を流している場合の限界堆積流）に当てはめると、 v は v_c となるので(59)式と(64)式より

$$F_{rer} = \left[\frac{2(m-2)i_c}{m(s-1)f} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{v_c}{\sqrt{gD(s-1)}} \quad (65)$$

となる。(57)、(58)、(60)および(61)式での i_w は全ての範囲の流速に対応するものであるが、5節の場合と同様に、掃流砂のみが存在する限界堆積流での平均流速 v_c に対応する i_w を特別に i_0 で表わすと、 i_0 は前出の(24)式になる。(24)式と(65)式より

$$\frac{i_0}{i_c} = \frac{m-2}{m} \quad (66)$$

が得られる。つぎに、限界堆積流での流砂量 Q_0 は

$$Q_0 = \frac{\pi}{4} D^2 v_c C_{max} \quad (67)$$

から求められるが、(67)式の v_c は(65)式より次の様に書き表わせる。

$$v_c = \left[\frac{2gD(m-2)i_c}{mf} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (68)$$

また C_{max} には、(62)式中の F_r に(64)式で与えられる F_{rer} を代入して、また i を i_c と書き直して

$$C_{max} = \frac{2}{Km^{\frac{m}{2}}} (m-2)^{\frac{m}{2}-1} \left[\frac{2i_c}{f(s-1)} \right]^{\frac{m}{2}} \quad (69)$$

と書き表わせる。従って(67)式は

$$Q_0 = \frac{\pi D^{\frac{5}{2}}}{4} \left[\frac{2g(m-2)}{mf} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{2}{K} \frac{(m-2)^{\frac{m}{2}-1}}{m^{\frac{m}{2}}} \left[\frac{2}{f(s-1)} \right]^{\frac{m}{2}} i_c^{\frac{m+1}{2}} \quad (70)$$

と書ける。ところで、掃流砂のみが存在する粗砂の場合の限界堆積流では、管底の砂層の断面積および砂層の移動速度は、前述（6節）のようにそれぞれ(67)式および(68)式で与えられる。

浮遊砂を発生しない限界堆積流における全流砂量 Q_0 は図-1より

$$Q_0 = A_b v_b C_{dep} \quad (71)$$

であるから、上式に(67)式と(68)式を代入して、粗砂の場合の限界堆積流での流砂量

$$Q_0 = \frac{D^{\frac{5}{2}}}{2\mu_w(s-1)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{g}{3fC_{dep}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3\mu_w} + \frac{1}{2\mu_s} \right)^{\frac{1}{2}} i_c^{\frac{m+1}{2}} \quad (72)$$

が求まる。この(72)式（理論式）による流砂量の値が、(70)式（実験式）で与えられる流砂量と等しくなるためには、 i_c の指数が等しくなければならない。すなわち

$$m = 3 \quad (73)$$

が容易に得られて、粗い砂粒子を流した場合には(68)式の指数 m が3になるという実験結果の理論的根拠が説明されたことになる。

(73)式を(66)式に代入すると、(23)式（5節）の関係、すなわち、 $i_c = 3i_0$ が得られる。

図-6に示される実験結果も、理論的に誘導された(23)式の関係の妥当性を裏付けているように思われる。

参考文献

- 1) 那須浩平：管水路内の粗砂の流動に関する理論的研究、第23回水理講演会論文集（1979）
- 2) 林泰造・山田正：浮遊粒子を含む開水路水流の乱流特性、東京大学宇宙航空研究所 第8回乱流シンポジウム講演集（1976）
- 3) 志村博康：浮遊砂を有する水流の諸特性について、土木学会論文集 第46号（1957）
- 4) Vanoni, V. A. : Transportation of Suspended Sediment by Water, Proc. A.S.C.E. Vol. 70, (1944)
- 5) Ismail, H. M. : Turbulent Transfer Mechanism and Suspended Sediment in Closed Channels, Proc. A.S.C.E. Vol. 77, (1951)
- 6) 岸 力：沖積地河川の水理学序説—流れと浮遊砂との相互作用—、第11回水工学に関する夏期研修会講義集（Aコース）、土木学会水理委員会（1975）
- 7) Durand R. : Basic Relationships of the Transportation of Solids in Pipes-Experimental Research, Proc. Minnesota International Convention, I. A. H. R. (1953)
- 8) Condolios E. and Chapus, E. E. : Designing Solid-Handling Pipelines, Chem. Eng. June-July, (1963)
- 9) Yagi, T. et al. : An Analysis of the Hydraulic Transport of Solids in Horizontal Pipelines, Report of the Port and Harbour Research Institute, Vol. 11, No. 3, (1972)
- 10) 日野幹雄：固体粒子を浮遊した流れの乱流構造の変化、土木学会論文集 第92号（1963）
- 11) Wilson, K. C. : A Formula for the Velocity Required to Initiate Particle Suspension in Pipeline Flow, Proc. 2nd International Conference on the Hydraulic Transport of Solids in Pipes, B. H. R. A. (1972)
- 12) Lane, E. W. and Kalinske, A. A. : Engineering Calculations of Suspended Sediment, Trans. A. G. U. Vol. 22, (1941)
- 13) 那須浩平：管水路による砂れき輸送に関する理論的研究、第22回水理講演会論文集（1978）