第24回水理講演会論文集　1980年２月

有限要素法による温排水の三次元拡散解析

Three-Dimensional Analysis of the Dispersion of Heated Discharges by Finite Element Method

電源開発㈱　正会員　○葛山文治
東京工業大学　正会員　日野幹雄
㈱数値解析研究所　丸川　隆
久保田史郎

1. まえがき

近年火力・原子力発電所の容量が大型化するにつれ，放出された温排水の周辺環境に与える影響が社会的関心を呼んでおり，温排水の周辺環境に与える影響をより厳密に評価する手法の確立が求められている。温排水の拡散予測解析はその中心課題であるが，従来二次元単層および二次元二層モデルといった数理モデル[1]が提案されており，表層放流による温排水の二次元拡散に関してはその適合性が広く認められている。しかしながら，一方では温排水の水中放流や地形的に複雑な入江，河口部付近での放流等の現実問題も生じており，より一般的な三次元拡散解析を行える数理モデルの開発が必要とされてきている。

最近，密度成層を有する場の三次元拡散現象を取り扱うものとして多層モデルが提案されており，差分法または有限要素法等の数値解析手法を用いて三次元拡散現象が解明されようとしている[2,3]。この多層モデルは，一般の三次元Navier-Stokes方程式とエネルギー方程式（あるいは拡散方程式）を直接解くかわりに，対象水域をいくつかの水平面で分割し，各層に対して鉛直方向平均量を扱うことにより二次元問題に帰着させて解析しようとするもので，各境界面ではせん断応力，熱量輸送，鉛直方向流等が考慮されている。この多層モデルは層数を十分多くとることにより，複雑な海底地形を有する湾内および河口部等での三次元拡散解析を可能にすると思われるが，一般に鉛直方向の運動量収支を圧力の静水圧分布で近似しているため，水中放流された温排水の近域の現象を十分考慮できない難点がある。

著者らは多層モデルの検討と，より一般的な三次元拡散現象に対応できる数理モデルの開発について考察を行ってきたが，温排水の表層放流・水中放流どちらに対しても定常・非定常拡散解析の可能な数理モデルが得られたのでここに報告する。このモデルは温排水放出点近傍ではBoussinesqによる自然対流の方程式系により記述される三次元モデル，放出点から十分離れた遠域に対しては上述の多層モデルを用い，両モデルを適当な水理学的考察により接続することにより実際の現象に対応し，かつ計算機処理能力の制約に応じた数理モデルとするものである（図－１）。またこのようにして得られた三次元モデルおよび多層モデルに対する基礎方程式の数値解析においては，境界条件の処理が容易でありメッシュ分割を自由に変えることのできる有限要素法を用い，重みつき残差法の一種であるGalerkin法により定式化を行うこととする。

2. 基礎方程式

2－1　三次元モデルの基礎方程式

一般に，重力場における非均一に加熱された流れに対してはBoussinesqの近似が成り立つと考えられ，基礎方程式はつぎのようになる。

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (\alpha=1\sim3) \cdots (2-1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_\alpha)}{\partial x_\alpha} = X_i - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2-2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial (T u_\alpha)}{\partial x_\alpha} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x_\alpha \cdot \partial x_\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2-3)$$

ここに　x_i　：　i 方向座標（ $i = 1, 2, 3$ ）

u_i　：　i 方向流速

T　：　温度

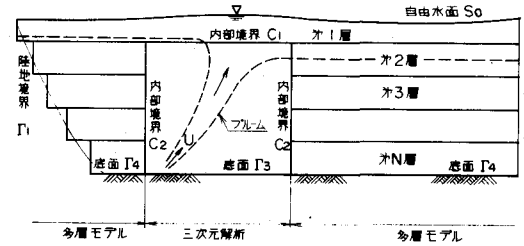
P　：　圧力

ρ_0　：　平均温度 T_0 に対する液体の密度

μ　：　液体の粘性係数

χ　：　液体の熱拡散係数

X_i　：　i 方向に作用する単位体積あたりの外力



図－1　解析モデル図

である。以下ひとつの項の中で添字がくり返されるときは総和規約が適用されるとする。いま x_3 軸を鉛直上向きにとれば，一定の平均温度 T_0 からの小さな変動を T_1 として（すなわち $T = T_0 + T_1$ ）

$$X_3 = -g + \beta g T_1 = -\frac{\rho}{\rho_0} g \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2-4)$$

となる。ここに β は液体の熱膨張係数，ρ は温度 T に対応する液体の密度，g は重力加速度である。

いま乱流状態を考え，すべての諸量をアンサンブル平均値とそれからの変動分にわけて

$$u_i = \bar{u}_i + u_i \qquad T = \bar{T} + T \qquad P = \bar{P} + P \cdots\cdots\cdots (2-5)$$

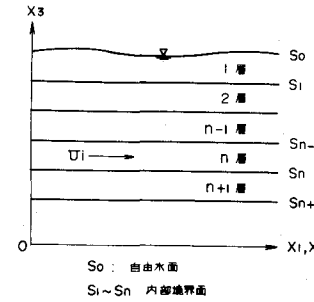
のように表わされるとすれば（2−1）〜（2−3）式に代入して平均操作を行い，乱流運動により生じる見かけのせん断力が分子粘性に帰因するせん断力に比して大きく

$$\tau_{ij} \doteqdot -\overline{\rho \mu_i u_j} = \rho K_{jj} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2-6)$$

と表わされるとし，同様に乱流運動による熱拡散に関しても

$$\chi \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \overline{T u_j} \doteqdot -\overline{T u_j} = K_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2-7)$$

と表わされるとすれば，結局三次元の熱拡散を表わす基礎方程式として



図－2　多層モデル図

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2-8)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} = \bar{X}_i - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + K_{\alpha\alpha} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2-9)$$

$$\bar{X}_i = \lambda \bar{u}_2 \delta_{i1} - \lambda \bar{u}_1 \delta_{i2} - \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} g \delta_{i3} \qquad \delta_{ij} \text{はクロネッカーの} \delta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2-10)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_\alpha} = K_\alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} \quad (i, \alpha = 1 \sim 3) \quad \cdots\cdots\cdots (2-11)$$

が得られる。ただし $\bar{X}_1$ ，$\bar{X}_2$ として Coriolis 力を考えた。λ は Coriolis 係数である。また $K_{\alpha\alpha}$ ，K_α はそれぞれ過動粘性係数，渦拡散係数であるが，ここでは定数と考えている。

つぎに（2−9）式を $\frac{\partial}{\partial x_i}$ で微分し i について加え合わせれば，圧力方程式

$$-\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial x_i \partial x_i} = \rho_0 \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} - \rho_0 \cdot \lambda \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right) + g \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2-12)$$

が得られる。この式は非圧縮性流体についての圧力の場を表わす Poisson の式に対応するものである。

2－2　多層モデルの基礎方程式

従来三次元密度流の解析に多層モデルを導入し，各層に対して対象とする基礎方程式系を鉛直方向に積分することにより二次元問題に帰着させて解析を容易にする手法が考案されており，これらは各層厚を一定と考えるものと，変化するものとするものに大別される。著者らもすでに後者の多層モデルを三次元拡散問題に適用して数理モデルを作成し現実の現象との適合性について現在検討を行っているが，ここでは三次元モデルとの接続が容易であるという点から水平な内部境界面 Sn で分割された層厚一定の多層モデルを用いる。ただし最上層だけは潮汐運動，風による波浪等を考慮できるように層厚を変化させる（図－2）。

各層に対し基礎方程式(2−8)〜(2−11)を x_3 方向に積分すれば，圧力が静水圧分布をすると仮定して

第1層に対し

$$\frac{\partial H^1}{\partial t}+\frac{\partial(H^1U^1_\beta)}{\partial x_\beta}-W^1=0 \qquad (\beta=1,2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2-13)$$

$$\frac{\partial U^1_i}{\partial t}+U^1_\beta\frac{\partial U^1_i}{\partial x_\beta}+\frac{W^1}{H^1}\left(U^1_i-\bar{u}_i\Big|_{S1}\right)$$

$$=X^1_i-g\frac{\partial H^1}{\partial x_i}+\frac{K_{\beta\beta}}{H^1}\frac{\partial^2(H^1U^1_i)}{\partial x_\beta\partial x_\beta}+\frac{1}{H^1}\left(K_{33}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_3}\Big|_{So}-K_{33}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_3}\Big|_{S1}\right)\cdots\cdots(2-14)$$

$$(i,\beta=1\cdot2)$$

$$\frac{\partial\Theta^1}{\partial t}+U^1_\beta\frac{\partial\Theta^1}{\partial x_\beta}+\frac{W^1}{H^1}\left(\Theta^1-\bar{T}\Big|_{S1}\right)$$

$$=\frac{K_\beta}{H^1}\frac{\partial^2(H^1\Theta^1)}{\partial x_\beta\partial x_\beta}+\frac{1}{H^1}\left(K_3\frac{\partial\bar{T}}{\partial x_3}\Big|_{So}-K_3\frac{\partial\bar{T}}{\partial x_3}\Big|_{S1}\right)\ (\beta=1,2)\cdots\cdots\cdots(2-15)$$

第n層（n＝2，3……N）に対し

$$\frac{\partial(H^nU^n_\beta)}{\partial x_\beta}+W^{n-1}-W^n=0 \qquad (\beta=1,2)\cdots\cdots\cdots\cdots(2-16)$$

$$\frac{\partial U^n_i}{\partial t}+U^n_\beta\frac{\partial U^n_i}{\partial x_\beta}+\frac{W^{n-1}}{H^n}\left(\bar{u}_i\Big|_{Sn-1}-U^n_i\right)+\frac{W^n}{H^n}\left(U^n_i-\bar{u}_i\Big|_{Sn}\right)$$

$$=X^n_i-g\frac{\partial H^1}{\partial x_i}+\frac{K_{\beta\beta}}{H^n}\frac{\partial^2(H^nU^n_i)}{\partial x_\beta\partial x_\beta}+\frac{1}{H^n}\left(K_{33}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_3}\Big|_{Sn-1}-K_{33}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_3}\Big|_{Sn}\right)(i,\ \beta=1,\ 2)\cdots\cdots\cdots\cdots(2-17)$$

$$\frac{\partial\Theta^n}{\partial t}+U^n_\beta\frac{\partial\Theta^n}{\partial x_\beta}+\frac{W^{n-1}}{H^n}\left(\bar{T}\Big|_{Sn-1}-\Theta^n\right)+\frac{W^n}{H^n}\left(\Theta^n-\bar{T}\Big|_{Sn}\right)$$

$$=\frac{K_\beta}{H^n}\frac{\partial^2(H^n\Theta^n)}{\partial x_\beta\partial x_\beta}+\frac{1}{H^n}\left(K_3\frac{\partial\bar{T}}{\partial x_3}\Big|_{Sn-1}-K_3\frac{\partial\bar{T}}{\partial x_3}\Big|_{Sn}\right)\ (\beta=1,2)\cdots\cdots\cdots\cdots(2-18)$$

が得られる。ここに変数の右肩につけた添字は層数を表わし総和規約の対象外とする。また

H^n ： 第n層の層厚。H^1はx_1，x_2，tの関数であるがH^2，H^3……H^Nは定数

U^n_i ： 第n層のi方向層間平均流速

$$U^n_i=\frac{1}{H^n}\int_{Sn}^{S_{n-1}}\bar{u}_i\,dx_3 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2-19)$$

W^n ： Sn面を通過するx_3方向の流速

Θ^n ： 第n層の層間平均温度

$$\Theta^n=\frac{1}{H^n}\int_{S_n}^{S_{n-1}}\bar{T}\,dx_3 \quad\cdots\cdots(2-20)$$

X^n_i ： Coriolis力（第n層） $X^n_1=\lambda U^n_2$，　$X^n_2=-\lambda U^n_1$ ……(2−21)

を表わしている。結局各層に対する二次元の基礎方程式系が得られ，これらは各内部境界層での

(i) 鉛直方向流を含む項

$$\frac{W^{n-1}}{H^n}\left(\bar{u}_i\Big|_{S_{n-1}}-U^n_i\right)+\frac{W^n}{H^n}\left(U^n_i-\bar{u}_i\Big|_{S_n}\right),\ \frac{W^{n-1}}{H^n}\left(\bar{T}\Big|_{S_{n-1}}-\Theta^n\right)+\frac{W^n}{H^n}\left(\Theta^n-\bar{T}\Big|_{S_n}\right)$$

(ii) 乱流運動による運動量輸送に基づくせん断力を表わす項

$$\frac{1}{H^n}\left(K_{33}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_3}\Big|_{S_{n-1}}-K_{33}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_3}\Big|_{S_n}\right)$$

(iii) 乱流運動による熱量輸送を表わす項

$$\frac{1}{H^n}\left(K_3\frac{\partial\bar{T}}{\partial x_3}\Big|_{S_{n-1}}-K_3\frac{\partial\bar{T}}{\partial x_3}\Big|_{S_n}\right)$$

によって互いに結びつけられている。以下これらの項について詳述する。

2－2－1　鉛直方向流

内部境界面を固定して考えているため各境界面を通る鉛直流が存在し，この鉛直流によって輸送される水平方向の運動量による水平方向のせん断応力が発生する。

2－2－2　乱流運動による運動量輸送に基づくせん断力

自由表面 S_o では風によるせん断力を考え

$$\rho^1 K_{33}\frac{\partial u_i}{\partial x_3}\bigg|_{S_o}=\rho_a\gamma_a\ \mathbf{W}_a\,|\mathbf{W}_a| \qquad \cdots\cdots(2-22)$$

とおく。ここに ρ^1 は第1層の液体密度，ρ_a は空気密度，γ_a は風の応力係数，W_a は風速ベクトルである。

内部境界面 S に働らくせん断力は乱流運動に基づく運動量輸送によるものであり

$$\rho^n\left(K_{33}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_3}\bigg|_{S_{n-1}}-K_{33}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_3}\bigg|_{S_n}\right)=\rho^n f^{n-1}(U_i^{n-1}-U_i^n)\sqrt{\sum_j(U_j^{n-1}-U_j^n)^2}-\rho^n f^n(U_i^n-U_i^{n+1})\sqrt{\sum_j(U_j^n-U_j^{n+1})^2} \qquad \cdots\cdots(2-23)$$

と表わす[4]。ここに ρ^n は第n層の液体密度，f^n は内部境界面 S_n での摩擦係数である。

また海底面での摩擦抵抗は Chezy の抵抗則により表わす。

2－2－3　乱流運動による熱量輸送

自由表面では大気と海面での熱交換を考える[1]。

$$-\rho^1 g C_\gamma K_3\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3}\bigg|_{S_o}=h(\theta^1-T_a) \cdots\cdots(2-24)$$

ここに　C_γ：　比熱

h：　熱伝達係数

Ta：　大気温度

つぎに内部境界面 S を通って乱流運動により輸送される単位時間あたりの熱量は，O．M．Phillips により

$$-\rho^n g C_\gamma\left(K_3\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3}\bigg|_{S_{n-1}}-K_3\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_3}\bigg|_{S_n}\right)=\frac{C^{n-1}}{R_i^{n-1}}(\theta^n-\theta^{n-1})-\frac{C^n}{R_i^n}(\theta^{n+1}-\theta^n) \cdots\cdots(2-25)$$

として与えるものとする[5]。ここに C^n は定数，R_i^n は Richardson 数であり次式で与えられる。

$$R_i^n=\frac{g\,|\rho^{n+1}-\rho^n|\,H^n}{\rho^n\sum_j(U_j^n-U_j^{n+1})^2} \cdots\cdots(2-26)$$

また底面 S_N では断熱条件 $\dfrac{\partial \bar{T}}{\partial x_3}=0$ を用いる。

3.　有限要素法定式化

3－1　三次元モデル有限要素法定式化

図－3に示すような8節点アイソパラメトリック立体要素を考える。いま各要素で定義された局所座標系 ξ,η,ζ を導入し，つぎのような形状関数を考える。

$$\begin{aligned}
N_1&=\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) & N_5&=\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)\\
N_2&=\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) & N_6&=\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)\\
N_3&=\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) & N_7&=\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)\\
N_4&=\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) & N_8&=\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)
\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(3-1)$$

このとき，要素内未知量の補間式および全体座標と局所座標の変換式はこの形状関数を用いて表わされ，

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}_i &= u_{im}(t)\cdot N_m(\xi,\eta,\zeta) = u_{im}N_m\\ \bar{P} &= P_m(t)\cdot N_m(\xi,\eta,\zeta) = P_m N_m\\ \bar{T} &= T_m(t)\cdot N_m(\xi,\eta,\zeta) = T_m N_m\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\quad(3-2)$$

$$x_i = x_{im}\cdot N_m \qquad \cdots\cdots\cdots(3-3) \qquad\qquad (m=1\sim8,\ i=1\sim3)$$

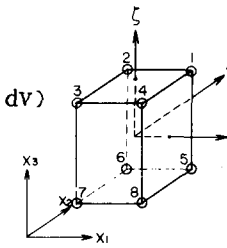
と書ける。ここに u_{im}, P_m, T_m, x_{im} はそれぞれ節点mでの $\bar{u}_i$, $\bar{P}$, $\bar{T}$, x_i の値を表わしている。

いまGalerkin法を用いることにすれば，（3－2）式を（2－9）～（2－12）式に代入した後重み N_n を乗じて要素内で積分し，Greenの定理を用いて

$$P_m\int_V \frac{\partial N_n}{\partial x_i}\frac{\partial N_m}{\partial x_i}\,dV$$

$$=\rho_o\sum_{m'\neq m}^{3}\overset{*}{u}_{im'}\overset{*}{u}_{\alpha m}\int_V N_n\frac{\partial N_m}{\partial x_i}\frac{\partial N_{m'}}{\partial x_\alpha}\,dV-\rho_o\lambda\left(\overset{*}{u}_{2m}\int_V N_n\frac{\partial N_m}{\partial x_1}\,dV-\overset{*}{u}_{1m}\int_V N_n\frac{\partial N_m}{\partial x_2}\,dV\right)$$

$$-\beta\rho_o g\cdot\overset{*}{T}_m\int_V N_n\frac{\partial N_m}{\partial x_3}\,dV+\oint_S N_n\frac{\partial\bar{P}}{\partial n}\,dS \qquad\cdots\cdots\cdots(3-4)$$



図－3　8節点アイソパラメトリック要素

$$\dot{u}_{im}\int_V N_nN_m\,dV+K_{\alpha\alpha}u_{im}\int_V\frac{\partial N_n}{\partial x_\alpha}\frac{\partial N_m}{\partial x_\alpha}\,dV$$

$$=-\frac{1}{\rho_o}\overset{*}{P}_m\int_V N_n\frac{\partial N_m}{\partial x_i}\,dV+\int_V N_n\cdot\bar{X}_i\,dV-\overset{*}{u}_{im}\left(\hat{u}_\alpha\int_V N_n\frac{\partial N_m}{\partial x_\alpha}\,dV\right)+K_{\alpha\alpha}\oint_S N_n\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_\alpha}n_\alpha\,dS \qquad(3-5)$$

ただし n_α はdCの外向き法線の方向余弦

$$\dot{T}_m\int_V N_nN_m\,dV+K_\alpha T_m\int_V\frac{\partial N_n}{\partial x_\alpha}\frac{\partial N_m}{\partial x_\alpha}\,dV$$

$$=-\overset{*}{T}_m\left(\hat{u}_\alpha\int_V N_n\frac{\partial N_m}{\partial x_\alpha}\,dV\right)+K_\alpha\oint_S N_n\frac{\partial\bar{T}}{\partial x_\alpha}n_\alpha\,dS \qquad\cdots\cdots\cdots(3-6)$$

を得る。ここに

$$\int_V N_n\bar{X}_i\,dV=\left(\lambda\overset{*}{u}_{2m}\delta_{i1}-\lambda\overset{*}{u}_{1m}\delta_{i2}-\frac{\overset{*}{\rho}_m}{\rho_o}g\delta_{i3}\right)\int_V N_nN_m\,dV \qquad\cdots\cdots(3-7)$$

であり，また＊は前計算ステップの値，∧は前計算ステップでの節点値を用いた要素内平均値を表わす。
・は時間微分 $\frac{\partial}{\partial t}$ の意味である。

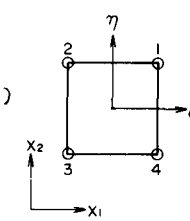
つぎに，全体座標と局所座標の変換関係（3－3）式を用いれば，すべての体積積分は局所座標系を用いて表わされ，Gauss－Legendre求積法により計算される。また表面積分の項は（3－4）～（3－6）式をすべての要素について加え合わせれば三次元解析領域内では互いに打ち消し合い，結局内部境界面 C_1，C_2 と底面 Γ_3 に関するものだけが残って，この項により三次元モデルと多層モデルが結びつけられることとなる。これらの境界での処理については後述する。

3－2　多層モデル有限要素法定式化

同様に，図－4に示すような4節点アイソパラメトリック平面要素を考え，形状関数を局所座標系 ξ，η を用いてつぎのように定義する。

$$N_1=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \qquad N_3=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_2=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \qquad N_4=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \qquad\cdots\cdots(3-8)$$



図－4　4節点アイソパラメトリック要素

未知関数 H^1, U_i^n（$i=1,2$），W^n, T^n（$n=1\sim N$）を

$$H^1=H_m^1\cdot N_m$$

$$U_i^n=U_{im}^n\cdot N_m \qquad (m=1\sim4)$$

$$W^n = W^n_m \cdot N_m$$

$$\Theta^n = \Theta^n_m \cdot N_m \qquad \cdots\cdots(3-9)$$

とおきGalerkin 法を適用すれば，（2－13）～（2－18）式より次式を得る。

第1層に対し

$$\dot{H}^1_m \int_S N_m N_n dS$$

$$= \overset{*}{H}{}^1_m \left(\hat{U}^1_\beta \int_S N_m \frac{\partial N_n}{\partial x_\beta} dS\right) + \overset{*}{W}{}^1_m \int_S N_n N_m dS - \oint_C N_n (H^1 U^1_\beta n_\beta) dC \quad \cdots\cdots(3-10)$$

$$\dot{U}^1_{im} \int_S N_n N_m dS + K_{\beta\beta} U^1_{im} \int_S \frac{\partial N_n}{\partial x_\beta} \frac{\partial N_m}{\partial x_\beta} dS$$

$$= -\overset{*}{U}{}^1_{im} \left(\hat{U}^1_\beta \int_S N_n \frac{\partial N_m}{\partial x_\beta} dS\right) + \int_S N_n X_i dS - g \overset{*}{H}{}^1_m \int_S N_n \frac{\partial N_m}{\partial x_i} dS + A^1 \int_S N_n dS + K_{\beta\beta} \oint_C N_n \frac{\partial U^1_i}{\partial x_\beta} N_\beta dC \quad \cdots\cdots(3-11)$$

$$\dot{\Theta}^1_m \int_S N_n N_m dS + K_\beta \Theta^1_m \int_S \frac{\partial N_n}{\partial x_\beta} \frac{\partial N_m}{\partial x_\beta} dS$$

$$= -\overset{*}{\Theta}{}^1_m \left(\hat{U}^1_\beta \int_S N_n \frac{\partial N_m}{\partial x_\beta} dS\right) + B^1 \int_S N_n dS + K_\beta \oint_C N_n \frac{\partial \Theta^1}{\partial x_\beta} n_\beta dC \quad \cdots\cdots(3-12)$$

第n層（n＝2，3……N）に対し

$$W^{n-1}_m \int_S N_n N_m dS$$

$$= \overset{*}{W}{}^n_m \int_S N_n N_m dS + H^n \overset{*}{U}{}^n_{\beta m} \int_S N_m \frac{\partial N_n}{\partial x_\beta} dS - \oint_C N_n (H^n U^n_\beta n_\beta) dC \quad \cdots\cdots(3-13)$$

$$\dot{U}^n_{im} \int_S N_n N_m dS + K_{\beta\beta} U^n_{im} \int_S \frac{\partial N_n}{\partial x_\beta} \frac{\partial N_m}{\partial x_\beta} dS$$

$$= -\overset{*}{U}{}^n_{im} \left(\hat{U}^n_\beta \int_S N_n \frac{\partial N_m}{\partial x_\beta} dS\right) + \int_S N_n X_i dS - g \overset{*}{H}{}^1_m \int_S N_n \frac{\partial N_m}{\partial x_i} dS + A^n \int_S N_n dS + K_{\beta\beta} \oint_C N_n \frac{\partial U^n_i}{\partial x_\beta} n_\beta dC \quad \cdots\cdots(3-14)$$

$$\dot{\Theta}^n_m \int_S N_n N_m dS + K_\beta \Theta^n_m \int_S \frac{\partial N_n}{\partial x_\beta} \frac{\partial N_m}{\partial x_\beta} dS$$

$$= -\overset{*}{\Theta}{}^n_m \left(\hat{U}^n_\beta \int_S N_n \frac{\partial N_m}{\partial x_\beta} dS\right) + B^n \int_S N_n dS + K_\beta \oint_C N_n \frac{\partial \Theta^n}{\partial x_\beta} n_\beta dC \quad \cdots\cdots(3-15)$$

ただしn＝1，2……Nに対して

$$\int_S N_n X^n_i dS = (\lambda \overset{*}{U}{}^n_{2m} \delta_{i1} - \lambda \overset{*}{U}{}^n_{1m} \delta_{i2}) \int_S N_n N_m dS \quad \cdots\cdots(3-16)$$

である。またA^nは層間せん断力，鉛直流に関する項であり，一方B^nは層間熱量輸送，鉛直流に関する項であるがすべて前計算ステップでの節点値を用いた要素内平均値で表わすものとする。

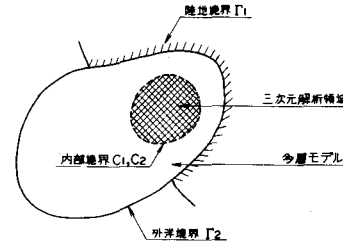
4. 境界条件

つぎに境界条件について考察する。本問題で考慮すべき境界条件としては陸地境界Γ_1，外洋境界Γ_2より成るいわゆる外部境界と，三次元モデルと多層モデルの接続部にあらわれる内部境界C_1，C_2および海底面Γ_3，Γ_4とがある（図－1，図－5）。このうち何らかの定まった値を指定する必要のある境界は外部境界と底面であり，内部境界面での値は未知数でこの値を介して両数理モデルが結びつけられる。以下各境界での取り扱いについて詳述する。

	水位・流速成分	熱 拡 散
陸地境界 Γ_1	(スリップ条件) $U_n=0$ on Γ_1	(断熱条件) $\frac{\partial T}{\partial n}=0$ on Γ_1
	(粘性境界) $U,V=0$ on Γ_1	$T=T_0$ (一定) on Γ_1
外洋境界 Γ_2	$U=U_0$(一定), $V=V_0$(一定)	$T=T_0$ (一定) on Γ_2
	Γ_2での潮位を与える.	$\frac{\partial T}{\partial n}=$const. on Γ_2

表－1　外部境界の条件

注) $\frac{\partial}{\partial n}$は法線方向微分を表わす.
U_nは法線方向のUの成分を表わす.



図－5　境界条件

4－1　外部境界Γ_1，Γ_2での境界条件

外部境界Γ_1，Γ_2では多層モデルの変数H^1，U_i^n，θ^n（n＝1～N）のうち適当な値を指定する必要がある。ここでは表－1に示す種々の組み合せを考え，対象とする問題に応じて使いわけることとする。

4－2　底面Γ_3，Γ_4での境界条件

Γ_3上ではすべての流速成分が零であり，かつ断熱的であるという条件を用いる。一方Γ_4上ではやはり断熱的であり，鉛直方向流速W^Nが零であるという条件を用いる。

4－3　内部境界C_1上での両モデルの接合

いま平面要素eと立体要素eが面Aを介して接合するとする（図－6）。第1層内の水平方向流速，温度の分布形F(Z)が

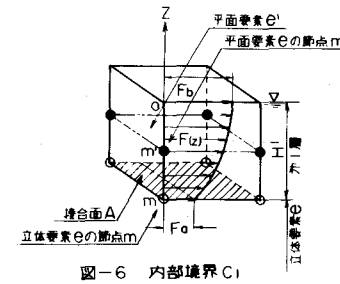
$$F(Z) = a + b|Z|^{\varepsilon} \quad \cdots\cdots\cdots (4-1)$$

ここにa，b，εは定数

で与えられると仮定すれば

$$\left.\frac{\partial F}{\partial Z}\right|_{Z=-H^1} = \frac{1+\varepsilon}{H^1}(\bar{F}-F_a) \quad \cdots\cdots\cdots (4-2)$$

$\bar{F}$はF(Z)の層間平均値



図－6　内部境界C_1

が成り立つ。したがって三次元モデルと多層モデルの変数の対応が可能となり，三次元モデルに対して（3－5），（3－6）式の表面積分項は

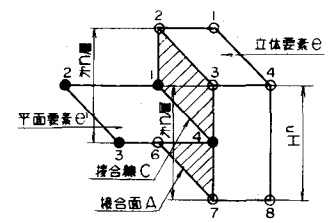
$$K_{\alpha\alpha}\oint_A N_n\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_\alpha}n_\alpha dS = K_{33}\oint_A N_n\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_3}dS = K_{33}\frac{1+\varepsilon}{\hat{H}^1}(\overset{*}{U}{}^1_{im}-\overset{*}{u}_{im})\oint_A N_nN_m dS \quad \cdots\cdots\cdots (4-3)$$

$$K_\alpha\oint_A N_n\frac{\partial\bar{T}}{\partial x_\alpha}n_\alpha dS = K_3\frac{1+\varepsilon}{\hat{H}^1}(\overset{*}{\theta}{}^1_m-\overset{*}{T}_m)\oint_A N_nN_m dS \quad \cdots\cdots\cdots (4-4)$$

となる。一方多層モデルに対しては（2－14），（2－15）式のうち接合面A上の乱流運動によるせん断力，熱拡散を表わす項を

$$-\int\frac{K_{33}}{H^1}N_n\left.\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_3}\right|_A dS = -\frac{K_{33}}{\hat{H}^1}\overset{*}{u}_{im}\int_A N_n\frac{\partial N_m}{\partial x_3}dS \quad \cdots\cdots\cdots (4-5)$$

$$-\int\frac{K_3}{H^1}N_n\left.\frac{\partial\bar{T}}{\partial x_3}\right|_A dS = -\frac{K_3}{\hat{H}^1}\overset{*}{T}_m\int_A N_n\frac{\partial N_m}{\partial x_3}dS \quad \cdots\cdots\cdots (4-6)$$



図－7　内部境界C_2

のように三次元モデルの節点値を用いて表わすことができる。

鉛直方向流速については接合面A上で$\frac{\partial\bar{u}_3}{\partial x_3}=0$と考える。また圧力について第1層で静水圧分布を仮定しているので

$$\left.\frac{\partial\bar{P}}{\partial x_3}\right|_A = -\rho^1 g \quad \cdots\cdots\cdots (4-7)$$

が得られ，（３－４）式中の表面積分項も計算される。

４－４　内部境界 C_2 上での両モデルの接合

図－７のように平面要素ｅと立体要素ｅが鉛直接合面を共有するとする。このとき三次元モデルに対する式（３－５），（３－６）の表面積分項は多層モデルの節点値を用いて近似的につぎのように表わせる。

$$K_{\alpha\alpha}\oint_A N_n \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} n_\alpha dS = K_{\beta\beta} H^n \oint_C N_n \frac{\partial U_i^n}{\partial x_\beta} n_\beta dC$$

$$= K_{\beta\beta} H^n U_{im}^n \oint_C N_n \frac{\partial N_m}{\partial x_\beta} n_\beta dC \quad (i,\ \beta = 1,\ 2) \cdots\cdots\cdots (4-8)$$

$$K_{\alpha\alpha}\oint_A N_n \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_\alpha} n_\alpha dS = K_{\beta\beta} H^n \frac{W_m^{n-1} + W_m^n}{2} \oint_C N_n \frac{\partial N_m}{\partial x_\beta} N_\beta dC \quad (\beta = 1,\ 2) \cdots\cdots (4-9)$$

$$K_\alpha \oint_A N_n \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_\alpha} n_\alpha dS = K_\beta H^n \theta_m^n \oint_C N_n \frac{\partial N_m}{\partial x_\beta} n_\beta dC \quad (\beta = 1,\ 2) \cdots\cdots\cdots (4-10)$$

一方多層モデルに関しては，接合面上の節点値を隣接する立体要素の節点値から内挿して与えることとする。

5. 結び

３節では三次元モデルおよび多層モデルについて，それぞれ代表的なひとつの要素に関する有限要素法定式化を示したが，すべての要素について重ね合わせ４節で述べた境界条件を考慮すれば，結局つぎのような１階の常微分方程式および連立方程式系が得られる。

３次元モデル

$$\mathbf{D}^1 \mathbf{P} = \mathbf{f}^1 \quad \cdots\cdots\cdots (5-1)$$

$$\mathbf{K}^2 \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{D}^2 \mathbf{X} = \mathbf{f}^2 \quad \cdots\cdots\cdots (5-2)$$

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ T \end{Bmatrix}$$

２次元モデル（第１層）

$$\mathbf{K}^3 \dot{\mathbf{h}} = \mathbf{f}^3 \quad \cdots\cdots\cdots (5-3)$$

$$\mathbf{K}^4 \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{D}^4 \mathbf{X} = \mathbf{f}^4 \quad \cdots\cdots\cdots (5-4)$$

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ \theta^1 \end{Bmatrix}$$

２次元モデル（第ｎ層，ｎ＝２，３……Ｎ）

$$\mathbf{D}^5 \mathbf{W}^{n-1} = \mathbf{f}^5 \quad \cdots\cdots\cdots (5-5)$$

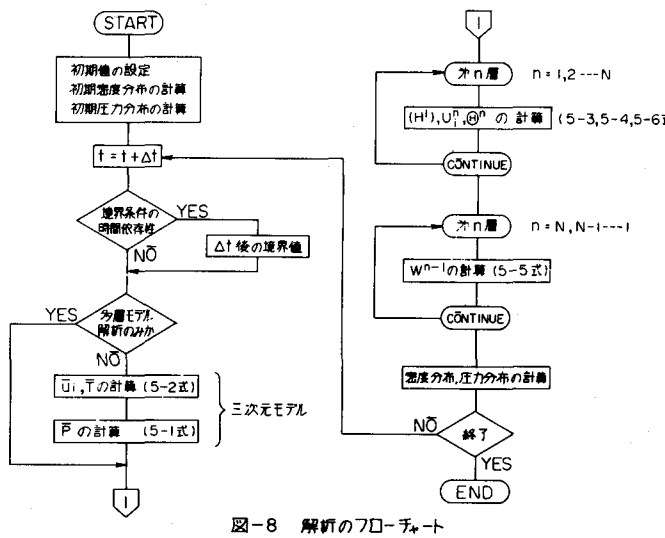
$$\mathbf{K}^6 \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{D}^6 \mathbf{X} = \mathbf{f}^6 \quad \cdots\cdots\cdots (5-6)$$

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \theta^n \end{Bmatrix}$$

ここに$\mathbf{K}$は要素節点座標のみによって決まる対称行列，$\mathbf{D}$は渦動粘性係数，渦拡散係数および要素節点座標に関係した対称行列，$\mathbf{f}$はベクトルで前計算ステップの値を用いて表わすこととする。したがって与えられた初期条件のもとに図－８に示された手順に従って計算を進めればすべての未知量を求めることができる。

以上，温排水の三次元拡散現象を解析する定常・非定常数理モデルの一例を紹介した。このモデルは温排水放出点近くのいわゆる近域では，速度場と圧力場を分離して解析を行う三次元モデルを導入し，遠域では従来の多層モデルを用いて解析を行おうとするもので，実際の物理現象に対応し，かつ電算機容量・計算時間等の制約に応じることのできる汎用性のあるものである。また多層モデルでは，自由表面での風による応力，大気との熱交換の他内部境界面での乱流運動に基づくせん断力，熱輸送および下層水連行現象が考慮されている。

なお，本モデルを用いた計算例については当日発表の予定である。



図−8　解析のフローチャート

参　考　文　献

1）　和田　明，片野尚明，角湯正剛，荒木　洋：沿岸海域における温排水拡散予測手法の適合性に関する研究，電中研報告，No.73555，1974．

2）　小林三男，中田喜三郎：マルチレベル有限要素法による三次元密度流解析について，第一回流れの有限要素法解析シンポジウム報文集，日科技連，1979．

3）　G.Dinelli,A.Tozzi : Three-dimensional modelling of the dispersion of pollutants in Mediterranean coastal waters, Proc.17th Congress of IAHR, vol.3, 1977.

4）　水理公式集　昭和46年改訂版，土木学会。

5）　H.Kato,O.M.Phillips : On the penetration of a turbulent layer into stratified fluid, J.Fluid Mech., vol.37,part,1969.

6）　J.J.Connor,C.A.Brebbia : Finite element techniqucs for fluid flow,Butterworth & Co.Ltd, London,1976.