

表層水平自由噴流における乱れ剪断応力に関する研究 Turbulent Shear Stress in Horizontal Free Jet

東北大学工学部 正 員 岩崎敏夫
東北大学大学院 学生員 ◦ 田中博通

1 はじめに

従来から工学的要請により噴流に関する研究が多くなされてきた。それらの問題は乱れ剪断応力項を適当なアナロジーにより平均流速と結びつけて表わすことにより解析されてきた。Görtler (1942), Tollmien (1926) をはじめ従来、渦動粘性係数や混合距離は流程に直角な断面で一定であるとして解かれているが、その仮定の妥当性についての検討はなされていなかった。

本研究は表層自由噴流における平均流速の実測値より、Reynolds 方程式を用いて局所的な乱れ剪断応力の分布を求めることにより上の仮定の妥当性を検討したものである。また、さらに従来の理論式の内臓する欠陥を指摘し、かつ、噴流内におけるエネルギーの遷移機構について考察を加えた。

2 乱れ剪断応力、混合距離及び渦動粘性係数

座標系は Descartes 座標のとき図-1 に示すように放出口中心を原点として、流下方向に X 軸、水平方向に Y 軸、水深方向に Z 軸とする。円柱座標のときは流下方向に X 軸、半径方向に r 軸、Y 軸から θ をとる。

円柱座標系を用い、流れが確立した領域を対象にすると、Reynolds 方程式は次式となる。

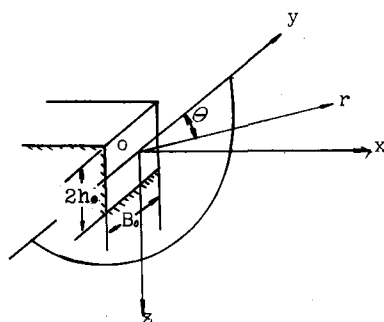


図-1 座 標 系

$$\begin{cases} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (\bar{u}'\bar{v}'r)}{\partial r} + \nu \nabla^2 \bar{u} \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (\bar{v}'^2 r)}{\partial r} + r (\nabla^2 \bar{v} - \frac{\bar{v}}{r^2}) \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

連続の式は

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\bar{v}r)}{\partial r} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

X 方向の流速分布の相似性より

$$\bar{u} = u_m f(\eta) \quad \text{ここで, } \eta = r/b \dots\dots\dots (3)$$

(2) を r ($0 \leq r \leq r$) で積分し (3) を用いると $\bar{v}$ の分布を得る。

$$\bar{v} = u_m \eta f \frac{db}{dx} - \frac{1}{b} \frac{d(u_m b^2)}{dx} \frac{1}{\eta} F_1(\eta) \dots\dots\dots (4)$$

ここで,

$$F_1(\eta) = \int_0^\eta \eta f(\eta) d\eta$$

(1) の第1式に (3) と (4) を代入し, η ($0 \leq \eta \leq \eta$) で積分すると乱れ剪断応力分布の式を得る。

$$\frac{\overline{u'v'}}{u_m^2} = \frac{1}{u_m b} \frac{d(u_m b^2)}{dx} \frac{f}{\eta} F_1(\eta) - \frac{1}{u_m^2 b} \frac{d(u_m^2 b^2)}{dx} \frac{1}{\eta} F_2(\eta) + \frac{1}{R_e^*} \frac{df}{d\eta} \dots\dots\dots(5)$$

ここで,

$$R_e^* = \frac{u_m b}{\nu}, \quad F_2(\eta) = \int_0^\eta \eta f^2(\eta) d\eta$$

(5) の右辺を $A(x, \eta)$ とし, Prandtl の混合距離モデル

$$-\overline{u'v'} = \ell^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \dots\dots\dots(6)$$

より, 混合距離の分布式を得る。

$$\frac{\ell}{b} = \left(A / \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 \right)^{1/2} \dots\dots\dots(7)$$

Boussinesq の渦動粘性モデル

$$-\rho \overline{u'v'} = \rho \epsilon \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \dots\dots\dots(8)$$

より, 渦動粘性係数の分布式を得る。

$$\frac{\epsilon}{u_m b} = -A / \left(\frac{df}{d\eta} \right) \dots\dots\dots(9)$$

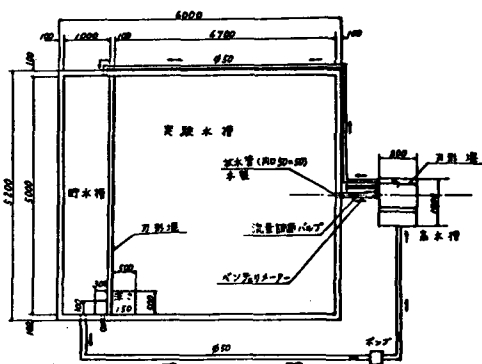


図-2 実験水槽 (平面図)

3 実験方法と実験結果

図-2に示すように実験は4.7×5.0×0.5 mの実験水槽と1.0×5.0×0.5 mの貯水槽及び0.8×1.0×0.8 mの高水槽から構成された平面水槽を用いて行なった。5×5 cmの正方形の放出口から実験水槽へ表層水平放流される。

流速測定には超小型プロベラ流速計 (計測技研製, φ5 mm) と低流速には熱膜流速計 (TSI製) を用いた。

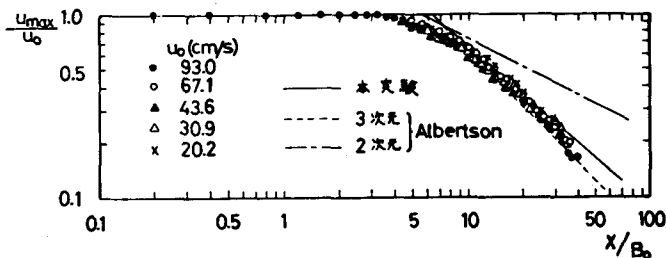


図-3 軸上流速の減少割合

流速測定は初期流速 (u_0) が 20 cm/s から 100 cm/s までの 5 ケースについて行なった。

噴流の軸上流速と拡がり幅を X の関数とすると、運動方程式より軸上流速は、2 次元、3 次元噴流においてそれぞれ $X^{-1/2}$ 、 X^{-1} で減少することになる。しかし、放出状態、放出口の形状および初期乱れの程度により多少異なるものと考えられる。図-3 は軸上流速減少割合である。5 ケースとも同様な傾向があり $X/B_0 > 10$ の値を用いて軸上流速の減少割合を求めると次式となった。

$$\frac{u_{max}}{u_0} = 5.05 \left(\frac{X}{B_0} \right)^{-0.876} \dots\dots\dots (10)$$

図-3 に Albertson 等 (1950) による 3 次元、2 次元噴流の値を併記した。これより表層水平自由噴流の 軸上流速の減少割合は 3 次元噴流に近い。図-3 より Kueche (1935) が指摘した A, B, C 3 領域の存在は確認できるが、形成領域と確立領域の 2 領域に分ける意味から (10) を用いて形成領域の長さ (X_0) を求めると $X_0/B_0 = 6.35$ となる。形成領域の長さは放出口形状、放出状態、放出口での流速分布や境界層の厚さ、初期乱れの程度に左右され、初期 Reynolds 数 ($= u_0 B_0 / \nu$) にも関係することが考えられる。

図-4 は半値幅 (流速が軸上流速の 1/2 と なる値) の拡がりを示したものである。形成領域においてはば一定であり、確立領域で急速に拡がっている。また、 b_y の方が b_z よりも大きな傾向がある。表層密度噴流の場合、半値幅の拡がり は Reynolds 数の増加にともない大きくなり、等密度噴流の場合は Reynolds 数の影響はないことが指摘されている¹⁾ が本実験においても Reynolds 数の影響は顕著にみられない。

初期運動量は $\rho u_0^2 B_0 h_0$ であるから、運動量保存の関係から (10) を用いて半値幅の式を得る。

$$\frac{b}{B_0} = 0.132 \left(\frac{X}{B_0} \right)^{0.876} \dots\dots\dots (11)$$

図-4 に (11) を実線で示しており、実験値とよく一致している。更に Bradbury²⁾ (平面噴流) と Pani³⁾ (Square jet) の値を示したが、本実験値はこれらとよく一致している。

図-5 は $X-Y$ 面、 $X-Z$ 面における平均流速分布である。同時に Tollmien と Görtler の解を変数 η に変換した値と Bradbury の実験式と (12) の Gauss 分布を併記した。

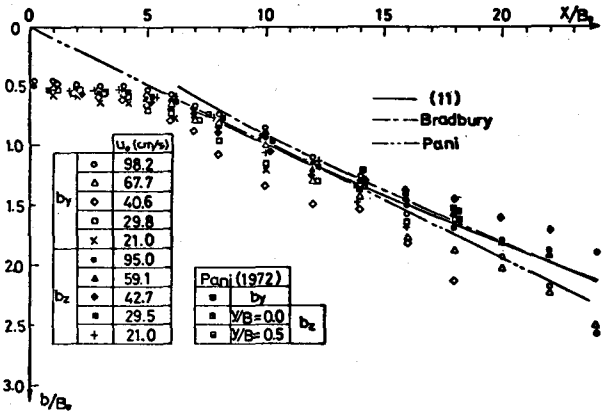


図-4 半値幅の拡がり

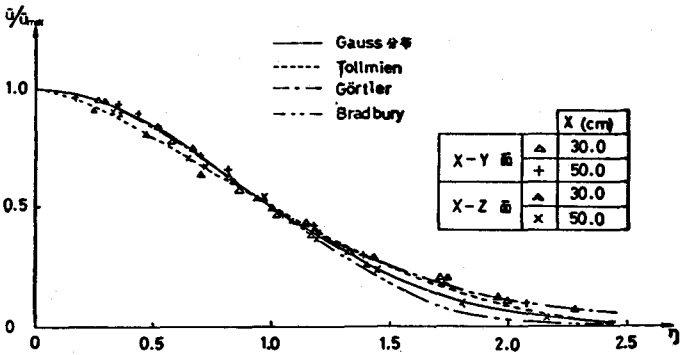


図-5 平均流速分布

$$\frac{\bar{u}}{u_m} = \exp [-(\ell n 2) \eta^2] \quad \dots\dots\dots (12)$$

これより、Gauss 分布で十分近似でき、以下の解析において流速分布形として用いる。一般に指摘されているように、Tollmien の解は中心部でやせすぎており、Görtler の解は周辺部で収束が遅い。これは、混合距離、渦動粘性係数を断面で一定とした影響であると考えられ、次節で詳しく論じる。

4 分布特性

4. 1 乱れ剪断応力

図-6 は軸上流速として (10)、半値幅として (12) を用いて (5) を計算して求めた乱れ剪断応力分布である。この計算値は Bradbury, Wyngnanski & Fiedler⁴⁾, Heskestad⁵⁾ の実験値をよく表わしている。すなわち、乱れ剪断応力の分布は上述のような過程で解析的に求めることができる。また、 X/B_0 が増加するにつれ相似形は保ちながらも軸上流速に対する乱れ剪断応力は多少であるが減少している。これは、噴流の乱流特性を支配する局所的な Reynolds 数 (Re_e^*) が一定であっても強い粘性作用により平均流速より速度変動の方が減衰するという乱流の特性を表わしている。

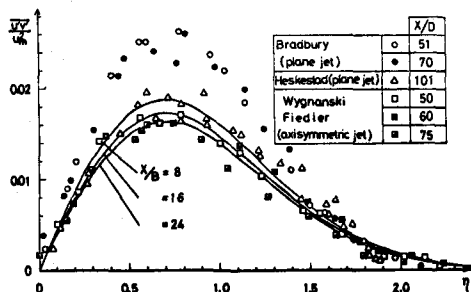


図-6 乱れ剪断応力の分析

4. 2 混合距離

図-7 は (7) より求めた混合距離の分布である。これから、混合距離は噴流中心部で増加することがわかり、噴流軸断面で混合距離を一定とした Tollmien の平均流速分布が中心部でやせている理由といえる。また、 $\eta > 0.5$ においては ℓ/b はほぼ一定となることから断面で一定とした Tollmien の解は中心部以外で実験値とよく合うのである。

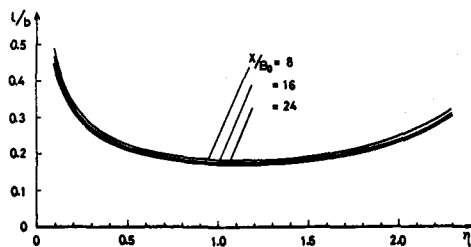


図-7 混合距離の分布

図-8 は (7) から求めた混合距離の $\eta = 1.0$ での値を X に対してプロットしたものである。これから混合距離は直線的に増加し、 $\ell = CX$ の関係があることがわかる。仮想原点のとり方に問題はあがるが、その直線式を求めると

$$\ell = 0.0128 X + A \quad (A = 0.270) \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる。Tollmien は 2 次元噴流で $C = 0.0174$ 、3 次元噴流で $C = 0.0157$ の値を求めた。

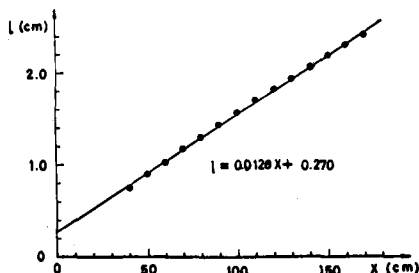


図-8 混合距離と X との関係

4. 3 渦動粘性係数

図-9は(9)から求めた渦動粘性係数の分布である。
 これから、 η が増加するにつれ減少していくことがわかる。
 Görtler の求めた平均流速分布が周辺部で収束が遅いのは渦動粘性係数を断面で一定としたからである。
 Boussinesq の渦動粘性モデルは熱輸送が温度勾配に比例するという Fourier の熱伝導式からのアナロジーであり、層流などの流れに対しては意味を持つが乱流のように複雑な機構に対しては厳密な表現でない。しかし、流速分布が実験値とよく一致するのは、図-9からわかるように断面ではほぼ一定であるからである。

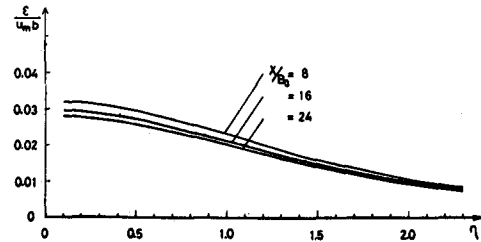


図-9 渦動粘性係数の分布

5 平均流のエネルギー収支

(1) の第1式に $\bar{u}$ を掛けると平均流の運動エネルギーの式を得る。

$$\frac{1}{2} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{1}{2} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{u} \overline{u'v'}) - \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + E - \frac{\nu}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial r} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

Eは直接散逸であり次式で定義される。

$$E = \nu \left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

(1) の第1式を r で積分し、これに $\bar{u}$ を掛けて r で微分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \int_0^r r \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dr + \frac{1}{2} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \int_0^r r \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} dr + \frac{\bar{v}}{2} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial r} \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{u} \overline{u'v'}) - \frac{\nu}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial r} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

(14) から (16) を引くと平均流のエネルギー収支に対する式を得る。

$$- \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \int_0^r \left(r \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + r \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) dr - \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + E = 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

(17) に (3), (4) を代入し、整理すると平均流のエネルギー収支に対する流速分布関数を用いた表現式を得る。

$$\left[-2 \frac{u_m^2}{\eta} \frac{df}{d\eta} \left(\frac{du_m}{dx} + \frac{u_m}{b} \frac{db}{dx} \right) F_2(\eta) + \frac{u_m^2}{b^2 \eta} \frac{df}{d\eta} \frac{d(umb^2)}{dx} f F_1(\eta) \right]$$

平均流からのエネルギー補給項

$$\underbrace{-\overline{u'v'} \frac{u_m}{b} \frac{df}{d\eta}}_{\text{乱流エネルギー発生項}} + \underbrace{\nu \left\{ \left(\frac{u_m}{b} \frac{df}{d\eta} \right)^2 + \left(f \frac{du_m}{dx} - u_m \frac{\eta}{b} \frac{df}{d\eta} \frac{db}{dx} \right)^2 \right\}}_{\text{直接散逸項}} = 0 \quad (18)$$

第1項, 第2項は平均流からのエネルギー補給, 第3項は乱流エネルギーの発生, 第4項は直接散逸を表わす。これから, 平均流から補給されたエネルギーは乱流エネルギーの発生とその残りの一部は直接散逸されることがわかる。

図-10は(18)から求めた平均流のエネルギー収支である。これは平均流からのエネルギー補給の最大値で正規化してある。流速勾配と乱れ剪断応力が最大となる所で各値とも最大となる。固体壁を持たない自由噴流の場合, 直接散逸は重要でなく平均流から補給されたエネルギーはほとんど乱れの発生に費やされる。そのエネルギーが u' に供給され, 圧力と速度変動の相関により v' , w' を生ぜしめ, 最終的には乱れの発生に費やされたエネルギーと等しい量が熱となって散逸される。

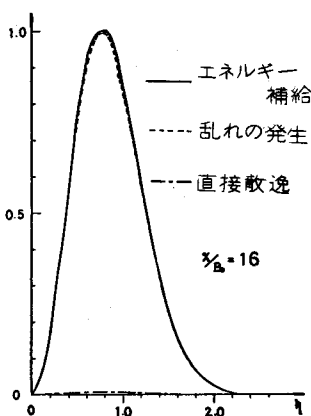


図-10 平均流のエネルギー収支

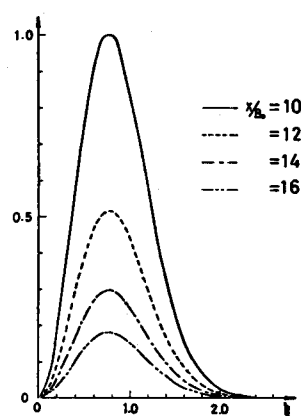


図-11 エネルギー補給の変化

図-11は $X/B_0=10$ のエネルギー補給で正規化した平均流からのエネルギー補給の変化である。相似形を保ちながら減少していくことがわかり, その結果乱れ自体も減衰していくわけである。また, 流程が増加するにつれエネルギー補給の減少は緩やかになり, 平均流のエネルギー減少割合が流程の増加とともに緩やかになるという筆者等⁶⁾の結果を裏付けるものである。

減少していくことがわかり, その結果乱れ自体も減衰していくわけである。また, 流程が増加するにつれエネルギー補給の減少は緩やかになり, 平均流のエネルギー減少割合が流程の増加とともに緩やかになるという筆者等⁶⁾の結果を裏付けるものである。

6 おわりに

乱れ剪断応力の分布から求めた混合距離, 渦動粘性係数の横方向分布から次のことが結論される。混合距離は中心部で大きな値となり, 渦動粘性係数は周辺部で小さな値となった。それらの値を断面で一定として解いた Tollmien の解が中心部でやせすぎ, Görtler の解が周辺部で収束が遅いといわれるのはそのためである。また, 平均流のエネルギー収支から, 直接散逸はごくわずかであり平均流から補給されたエネルギーはほとんど乱れの発生に費やされ, また, 流程の増加によりエネルギー補給量は減少していくといえる。

最後に, 本研究を行なうにあたり協力していただいた東北大学学部生 大嶋一成氏に感謝いたします。

< 参考文献 >

- 1) 室田, 中辻, 合田; 表層密度噴流の拡がりに関する実験的研究, 第34回年講, pp.271~272, 1979.
- 2) Bradbury, L.J. S. ; The Structure of a self-preserving Turbulent Plane Jet, J. F. M., Vol. 23, pp.31~64, 1965.
- 3) Rajaratnam, N., ; Turbulent Jets, Elsevier, p. 274, 1976
- 4) Wygnanski, I. & Fiedler, H.; Some Measurements in the self-preserving Jet, J. F. M., Vol. 38, pp. 577~612, 1969.
- 5) Heskestad, G.; Hot-wire Measurements in a Plane Turbulent Jet, Trans. ASME, J. Appl. Mech., pp. 1~14, 1965.
- 6) 岩崎, 田中, 半沢; 三次元表層水平噴流の乱流計測, 第33回年講, pp. 449~450, 1978.