

熱的な外乱を受ける連続成層に関する研究

Stability and the development of mixed layers in heat-salt double diffusive process

東京大学 工学部 正 員 玉井 信行
東京大学 大学院 学生員 ○浅枝 隆
東京大学 大学院 学生員 高橋 由多加

1. はじめに

貯水池での成層流に関する主たる因子としては熱および濁質があり、大循環のような比較的長期の現象を考える際にはそれらの拡散物質としての特性を考慮する必要があると考えられる。こうした二重拡散現象解明の第一段階として、主として熱および塩分による現象を取り扱った。熱・塩二重拡散現象を分類すると表-1 のようになり、初冬の貯水池でみられる、安定な成層状態から表面の冷却によって起こる現象は3-aにあたる。ここではそうした現象を、安定な成層を下から加熱することによりモデル化した。

CASE	$\frac{dT}{dz}$	$\frac{dS}{dz}$	$\frac{d\rho}{dz}$
1	+	-	-
2	a	+	-
	b	+	+
3	a	-	-
	b	-	+
4	-	+	+

Table-1

2. 実験および実験装置

実験に用いた水槽の概略は図-1のようなものである。水槽の側壁は断熱性を高めるために二重壁にしてあり、底板はステンレス製である。オイルタンク中の油温は一定に保つよう調節してあり、水槽底板の加熱は油温が所定の温度に達した後に両者を接触させた。また、上面から冷却する際には、水面に氷を入れた容器を置いて行った。測定は、温度についてはサーミスタ温度計を、塩分については温度補償回路内蔵の導電率計を用い、濁度については透過光式濁度計を用い、それらをトラバースさせて分布図を得た。実験開始時における塩分、濁度の分布は上方に向かって線型に減少する分布とした。

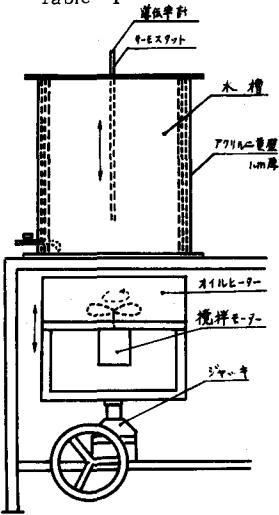


Fig-1

3. 密度分布の時間的变化

下方から加熱開始後の熱・塩分による密度分布の時間的变化を図-2に示す。図2-aは初期の塩分密度勾配が比較的大きい場合であり、図2-bは小さい場合である。双方とも、加熱開始後

短期間のうちに底板付近に密度一定の混合層が形成される。その後の経過については、(a)では上方に熱が伝わるに従って順次混合層が形成されて行きステップ構造を呈するようになる。またこうした構造の形成過程において、混合層同士が融合しあってその層厚を増加させて行くことが確認される。しかもこの融合は熱の供給の多い最下層周辺

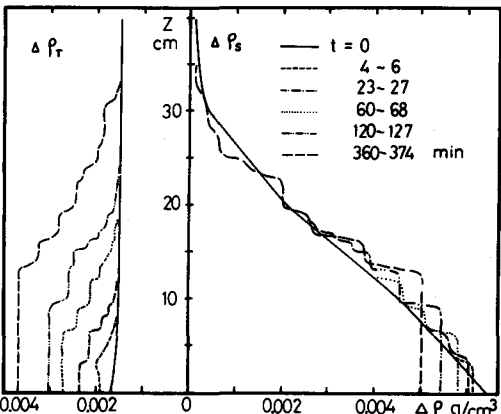


Fig 2-a

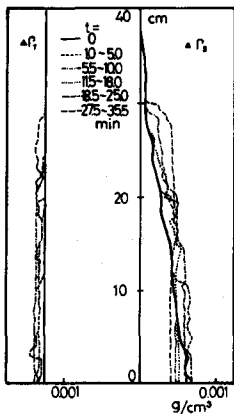


Fig 2-b

で特に頻繁に起こっている。完全に形成された混合層では温度及び塩分は変動しないが、形成途上の混合層ではかなり変動している(図3-a)。また混合層の境界部では、上下層の差程度の変動がみられた(図3-b)。このことから境界面がかなり激しく上下していることがうかがえる。図2-bの場合には、最下層の混合層が層厚を増加させるのが速く、多層構造を形成させるに至っていない。しかし、最下層の上に、次の時点で最下層が層厚を増加させる程度の厚さの密度変動の大きい層が観察される。このことは、第二層が完全に形成される以前に第一層に取り込まれて行っていることを示している。また、このように初期密度勾配の小さい場合には、界面の変動も数cm程度になるものもみられた。写真-1は、層の形成をアルミ粉で可視化したものである。層内では温度の高い流体塊が上昇しては下降する過程をくり返し、境界面はそのために絶えず上下しているのが観察される。しかし、安定な二層が形成されると流体塊の上昇は境界で抑えられ、界面の変動は小さくなっている。その場合でも層内の流れはRayleigh問題に見られるような単純な層スケールの対流ではなく、複雑な渦運動をしているのが観察される。

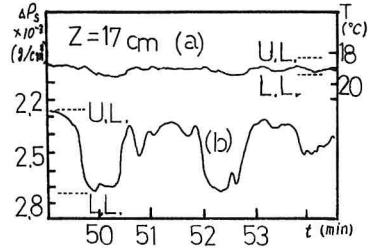
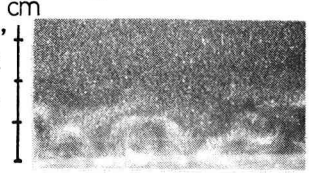


Fig. 3



オ 1 層形成

4. 混合層の形成限界

混合層の形成限界を示す Rayleigh 数に関しては、温度分布、塩分分布とともに鉛直方向に線型に変化する場合には、Veronis¹⁾により次の関係式が導かれている。

$$R_a = \frac{Pr}{1 + Pr} R_s + \frac{27}{4} \pi^4 \quad (1)$$

ここに、 $R_a = \alpha \Delta T \cdot g h^3 / K_T \nu$; $R_s = \beta \Delta S \cdot g h^3 / K_T \nu$; $P_r = \nu / K_T$; $\alpha \Delta T$: 温度による密度差; $\beta \Delta S$: 塩分による密度差; K_T : 熱の分子拡散係数; ν : 動粘性係数; h : 代表スケールを表わす。

しかし、実際には、温度分布に関しては下方からの伝導によって非線型な分布となっている。いま、この温度分布が鉛直方向に(2)式で示するような二次式であると仮定する。

$$\text{平均温度分布: } \bar{T} = q / 2 K_T \cdot (z^2 - \ell z) - \Delta T \cdot z / \ell + T_0 \quad (2)$$

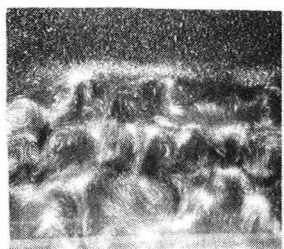
$$\text{平均塩分分布: } \bar{S} = d\bar{S}/dz \cdot z \quad (d\bar{S}/dz = \text{const.})$$

圧力項を消去した後の線型化した基本方程式は次式となる。

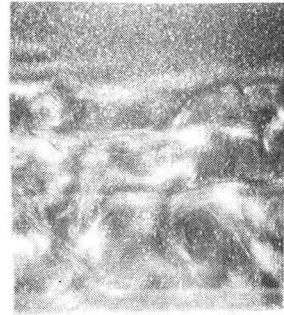
$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right] \nabla^2 w &= g \nabla_1^2 (\alpha T - \beta S) \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} - K_T \nabla^2 \right] T &= -w \nabla \bar{T} \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} - K_S \nabla^2 \right] S &= -w \nabla \bar{S} \end{aligned} \quad (3)$$

ここに w : 鉛直流速; $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$; $\nabla_1^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ は水平面内のラプラシアンを示す。 T , S を消去し、 w の式にすると、

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right] \left[\frac{\partial}{\partial t} - K_T \nabla^2 \right] \left[\frac{\partial}{\partial t} - K_S \nabla^2 \right] \nabla^2 w = g \nabla_1^2 \left[\alpha \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - K_S \nabla^2 \right\} \left\{ -w \frac{d\bar{T}}{dz} + K_T \nabla^2 \bar{T} \right\} - \beta \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - K_T \nabla^2 \right\} \left\{ w \frac{d\bar{S}}{dz} \right\} \right] \quad (4)$$



オ 3 層形成



オ 4 層形成後
オ 1・2 層融合

Photo-1

となる。変数分離解 $w = \hat{w}(z) \cdot f(x, y) \cdot \exp\{(\sigma + i\lambda)t\}$, ($\nabla_1^2 f + a^2/h^2 \cdot f = 0$; a, h は水平および鉛直方向における代表スケール)を代入し, 限界の条件として $\sigma = 0$ を代入し, λ を消去して整理すると,

$$P_1 (D^2 - a^2)^4 \hat{w} - P_2 (D^2 - a^2) \hat{w} - P_3 (D^2 - a^2) \zeta \hat{w} = 0 \quad (4)$$

ここに,

$$P_1 = \left[(1 + P_r + \tau) \left(\frac{\tau}{P_r} + \tau + 1 \right) - \tau \right] \frac{1}{a^2}; P_2 = -(1 + P_r) \left(\frac{Q}{2} + R_r \right) \left(\frac{h}{\ell} \right)^4 + (\tau + P_r) R_s;$$

$$P_3 = Q(1 + P_r); Q = \frac{\alpha q h^5 g}{K_T^2 \nu}; R_r = \frac{g \ell^2 \alpha \Delta T}{\nu K_T}; R_s = \frac{g \ell^2 \beta \Delta S}{\nu K_T}; \zeta = \frac{z}{h}; D = \frac{d}{d\zeta}$$

を表わす。

境界条件は, 両端 free とすると, $\zeta = 0, 1$ で $D^{2n} \hat{w} = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)である。

$\phi = -P_2/P_1 \cdot \hat{w}$, $P_3/P_2 = C$ において積分すると, (4)式は

$$(D^2 - a^2)^3 \hat{w} = -(1 + C) \phi \quad (5)$$

となる。 $\phi, \hat{w}$ について, $\phi = \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m \phi_m$; $\hat{w} = \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m \hat{w}_m$; $\phi_m = \sin m\pi\zeta$ と展開すると,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m \left[\sin m\pi\zeta + \frac{P_2}{P_1} \hat{w}_m \right] = 0 \quad (6)$$

ここに,

$$\hat{w}_m = \frac{1}{\{(m\pi)^2 + a^2\}^3} \left\{ (A_m + B_m \zeta + C_m \zeta^2) \sinh a\zeta + (D_m + E_m \zeta + F_m \zeta^2) \cosh a\zeta \right. \\ \left. + (1 + C\zeta) \sin m\pi\zeta + \frac{6m\pi C}{(m\pi)^2 + a^2} \cosh m\pi\zeta \right\} \quad (7)$$

$$A_m = \frac{m\pi C}{a^2 \sinh a} \left\{ \left(\frac{(m\pi)^2 + 9a^2}{4a} + \frac{(m\pi)^2 + a^2}{2 \sinh a} \cosh a \right) \left\{ \frac{-(-1)^m \cosh a}{\sinh a} - 1 \right\} + (-1)^m \frac{(m\pi)^2 + a^2}{4} + \frac{6a^2}{(m\pi)^2 + a^2} \left\{ \cosh a - (-1)^m \right\} \right\}$$

$$B_m = \frac{m\pi C}{4a^3} \{(m\pi)^2 + 9a^2\}; C_m = \frac{m\pi C}{4a^2 \sinh a} \{(m\pi)^2 + a^2\} \left\{ \cosh a - (-1)^m \right\}; D_m = -\frac{6m\pi C}{(m\pi)^2 + a^2}$$

$$E_m = -\frac{m\pi C}{2a^2 \sinh a} \left\{ \frac{(m\pi)^2 + a^2}{\sinh a} \left\{ 1 - (-1)^m \cosh a \right\} + \frac{(m\pi)^2 + 9a^2}{2a} \left\{ \cosh a - (-1)^m \right\} \right\}; F_m = -\frac{m\pi C}{4a^2} \{(m\pi)^2 + a^2\}$$

これらの式は形式上は Watson³⁾ が導いたものと同形であるが, その中に含まれる係数Cの内容が異なっている。(6)式が non-trivial な解をもつためには

$$\left\| \frac{1}{2} \cdot \delta_{mn} + \frac{P_2}{P_1} \int_0^1 \hat{w}_m \sin n\pi\zeta \cdot d\zeta \right\| = 0 \quad (8)$$

Table - 2

ここに δ_{mn} はクロネッカーのデルタを表わす。

(8)式より R_T の限界値を求めたものが表-2である。 $Q = 0$ のものが線型温度分布の場合に対する値であるが, 非線型な場合とほとんど差がないといえる。

図-4は, 今回の実験結果と式(1)を比較したものである。この場合代表スケールの決定が問題となるが, 混合層形成後の層厚がほぼこれに該当すると考えられるので, 混合層厚を用いた。図中の○は下面から加熱した場合の結果を示し, ●は上面からの冷却の場合を, ●は Shirtcliffe⁴⁾ の結果を示している。いずれの場合においてもほぼ(1)式の関係が満足していると考えられ, 不安定要因の与え方による差は見られないと判断される。

$R_s \backslash Q$	0	500	1000	2000
	R_{τ}/a	R_{τ}/a	R_{τ}/a	R_{τ}/a
0	658 22	1095 22	1533 22	2408 22
500	657 22	1095 22	1532 22	2407 22
1000	656 22	1093 22	1531 22	2406 22
2000	650 22	1088 22	1525 22	2401 22

5. 混合層形成後の代表量

限界Rayleigh数を越え、混合層が形成された状態においては、層内の流体の運動エネルギーはポテンシャルエネルギーに比べて小さく無視できると考えられる。混合層の上のまだ層が形成されていない領域では、熱は伝導型で伝わり、塩分の分子拡散係数は熱のものに比べ100分の1程度なので、層の上部境界を通してのフラックスはないものとする。従ってこうした状態における混合層の水理量はポテンシャルエネルギーを最小とするように決定されると考えられる。

加えた熱量は次式で表わされる。

$$\frac{Q}{\rho c} = h_1 T_1 + T_1 \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{K_T t}} \right) \right\} dz \quad (9)$$

ここに、 c : 比熱 ; Q : 加えた熱量を表わす。

塩分の連続式は

$$S - S_0 = \frac{1}{2} h_1 \frac{dS}{dz} \quad (10)$$

で表わされる。

過剰温度・塩分の分布は、模式的に図-5のように近似できるからポテンシャルエネルギー量が ΔE だけ増加する。

$$\begin{aligned} \Delta E = & \frac{g}{2} \beta S_1 h_1^2 + \frac{g}{2} \alpha \frac{Q}{\rho c (h_1 + f)} h_1^2 - g \alpha \frac{Q}{\rho c (h_1 + f)} F \\ & - g \alpha \frac{h_1 Q}{\rho c} - g \beta \frac{S_0}{2} h_1^2 - \frac{g \beta}{3} \left(\frac{dS}{dz} \right) h_1^3 \end{aligned} \quad (11)$$

ここに $f = \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{K_T t}} \right) \right\} dz$; $F = \int_0^{\infty} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2\sqrt{K_T t}} \right) \right\} z dz$ である。

さらに(10)式を代入すると

$$\Delta E = -\frac{g \beta}{12} \left(\frac{dS}{dz} \right) h_1^3 - \frac{g \alpha Q}{\rho c} h_1 + \frac{g \alpha Q}{2 \rho c (h_1 + f)} h_1^2 - g \alpha \frac{Q}{\rho c (h_1 + f)} F \quad (12)$$

となる。 ΔE の最小条件は、次式で与えられる。

$$\frac{d^2 \Delta E}{dh_1^2} > 0, \quad \frac{d \Delta E}{dh_1} = 0 \quad (13)$$

(12)式を代入すると

$$\frac{d^2 \Delta E}{dh_1^2} = -\frac{g \beta}{2} \left(\frac{dS}{dz} \right) h_1 - 2.571 \frac{g \alpha Q f^2}{\rho c (h_1 + f)^3} \quad (14)$$

従って $h > f$, $h < f$ の場合には(13)式の第1式は満たされる。(13)式の第2式の条件より

$$-\frac{g \beta}{4} \left(\frac{dS}{dz} \right) h_1^2 (h_1 + f)^2 - g \frac{\alpha Q}{\rho c} (h_1 + f)^2 + \frac{g \alpha Q}{2 \rho c} (h_1^2 + 2h_1 f) + g \frac{\alpha Q}{\rho c} F = 0 \quad (15)$$

が導かれる。

i) 混合層の上部境界面を通しての熱の拡散量が少ない場合 ($h_1 \gg f$) は、(15)式より次の関係が得られる。

$$h_1 = \sqrt{\frac{2 \alpha Q}{\rho c \beta \left(\frac{dS}{dz} \right)}}, \quad T_1 = \sqrt{\frac{\beta \left(\frac{dS}{dz} \right) Q}{2 \rho c \alpha}}, \quad -\Delta \rho_s = \sqrt{\frac{\alpha \beta \left(\frac{dS}{dz} \right) Q}{2 \rho c}} \quad (16)$$

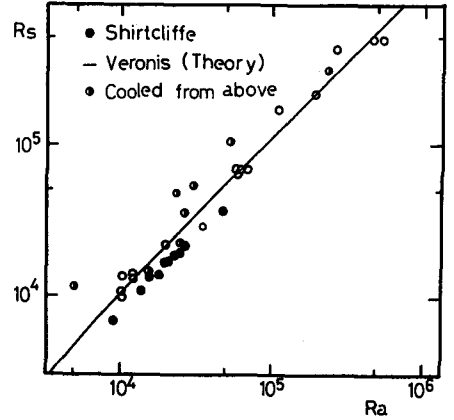


Fig-4

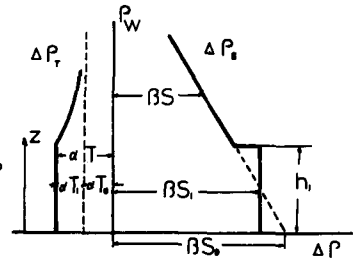


Fig-5

ii) 混合層の上部境界面を通しての熱の拡散量が多い場合、若しくは、熱が多量に拡散した後に混合層が形成された場合 ($h_1 < f$) は次の関係式が得られる。

$$h_1 = 0.8585 \sqrt{\frac{\alpha Q}{\rho c \beta (dS/dz)}} , \quad -\Delta \rho_s = 0.2146 \sqrt{\frac{\alpha \beta (dS/dz) Q}{\rho c}} \quad (17)$$

1) の場合に (16) 式の第 2, 3 式より Turner²⁾ が実験的に見出した関係式 $\alpha T_1 = -\beta \Delta \rho_s$ が得られる。図-6, 7, 8 は下面から加熱した場合について、実験値と、(16), (17) 式を比較したものである。実際には界面の変動があるのでかなりのばらつきはあるが、(16), (17) 式は実験値をよく説明しているものと思われる。

ここまでは、熱・塩二重拡散系を下部より加熱して不安定要因を与える形で実験の検討を進めてきた。しかしながら、実際の貯水池の大循環時における境界条件はこれとは異なるので、次の段階では、実際の条件と相似な形で実験を与えた。図-9 は上面から冷却した場合のもので、図-10 は初期密度勾配が濁質に T_1

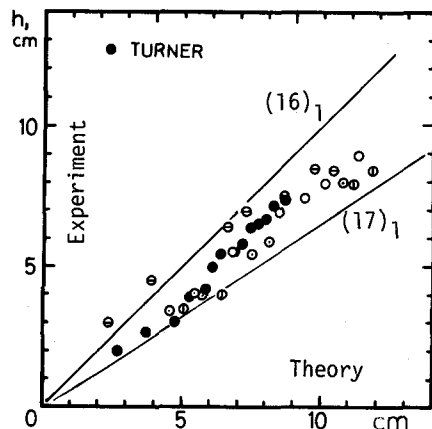


Fig.-6

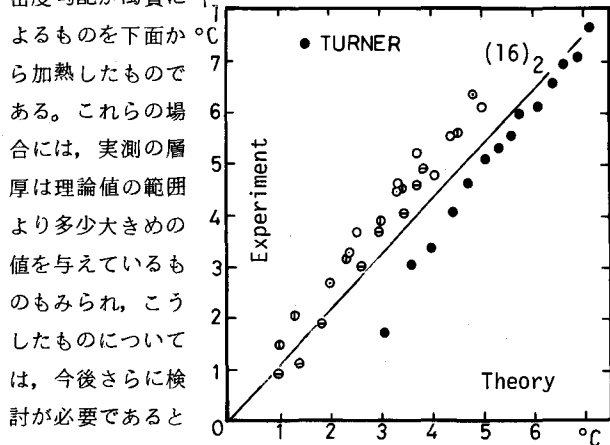


Fig.-7

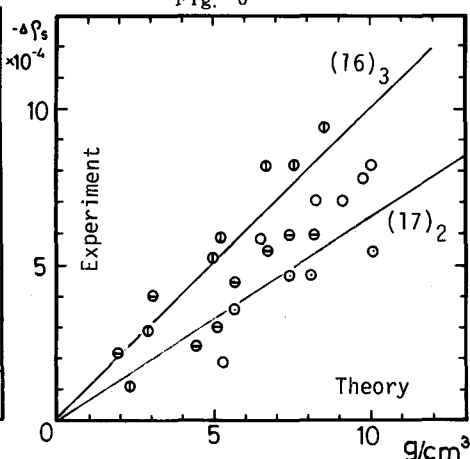


Fig.-8

いずれの場合も、ほぼ理論値に近くなっており、(16) 式がこうした場合でも成立し得ること、および、下面からの加熱が特異性をおびていないことがわかる。

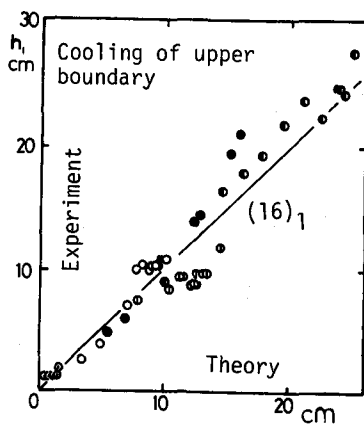


Fig.-9

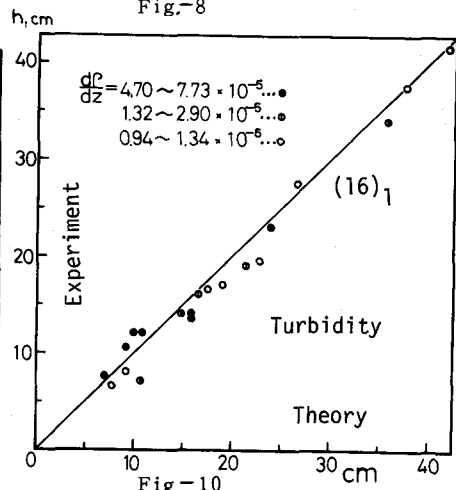


Fig.-10

6. おわりに

貯水池内で起こると考えられる二重拡散現象の第一段階として、主として熱・塩二重拡散について取り扱い、一様な密度場が形成されていく過程は不連続的に進行していくことが明らかとなった。また、混合の開始限界、混合層の水理量について予測することがほぼ可能であることが確かめられた。また、濁質を用いる実験および上部を冷却するという実際に出現する場合と同一形式の実験についても手掛け、熱・塩二重拡散系と大局においては差がないことを示唆する結果が得られた。今後は、熱・濁二重拡散過程との相違点、ならびに境界面での混合機構の詳細について明らかにして行く予定である。

最後に、本研究を行なうにあたり、鹿島学術振興財団の助成を得、またデータ整理にあたっては、本学学生、紺野義仁、服部邦男両君の協力を得たことを記し、感謝の意を表す。

参考文献

- 1) Veronis, G. (1965) J. Mar. Res., 23, 1-17
- 2) Turner, J. S. (1968) J. Fluid Mech., 33, 183-200
- 3) Watson, P. M. (1968) J. Fluid Mech., 32, 399-512
- 5) Shirtcliffe, T. G. L. (1969) Int. J. Heat Mass Transfer, 12, 215-222