

塩水楔形状の計算法と内部抵抗係数の評価について

Calculation Method of Saline Wedge Profile and
Estimation of Internal Friction Coefficient

(株)アイ・エヌ・エー新土木研究所 正員 柴田正和

1. はじめに

塩水楔その他にみられるようなほぼ鉛直二次元と近似することが可能と考えられる密度流の研究は、初期の流速、密度ともに上下各層内で一様とする完全二成層流近似から次第に進み、二成層流の流速密度分布の内部構造を問題とするまでに至っている^{(1),(2),(3)}。一方この問題と密接に関連をもつ内部抵抗係数の評価についても、実用的にはともかく未だ理論的に満足のゆく統一された表現には到達していないように思われ、新たな表式が次々と発表されている^{(4),(5)}。著者は先に、現在までに報告されている実験及び現地観測データから運動方程式を介して算出された内部抵抗係数 f_i の値を各ケース毎に $f_i = aRe^b Fi^c$ の形に表わした場合の最適係数値 a, b, c を求めたが⁽⁶⁾、最適な a, b, c の値は各ケース毎に大幅に異っていた。又同時に計算されたこれらの説明変数 Re, Fi の f_i に対する重相関係数（寄与率の平方根）は、高いもので 0.9 を超えるものがある一方、0.5 という低い値を示すものすらあった。この結果は、抵抗係数 f_i の函数形を Reynolds 数 Re と内部 Froude 数 Fi のべき乗積という形に限定してしまった事にもその原因の幾分かを帰せられるかも知れないが、これとても従来の $f_i = a(ReFi^2)^n$ という函数形よりは自由度の大きいものであり、主要因とは考え難い。

Reynolds 数の小さい層流二層流では粘性抵抗の寄与が卓越し、Reynolds 数の大きい乱流二層流では界面での連行による有効抵抗の寄与が卓越するという内部抵抗係数の機構上の相違は早くから指摘されているが上述の係数 b, c の大きなバラツキをそれだけで説明することは困難である。データのバラツキその他の要因としては内部抵抗係数の値への Reynolds 数、内部 Froude 数以外の要因が考えられるが、それを検討するには個々の実験実測の詳細にたち入ることが必要になるのでここではそれをせず、実験実測で直接測定される水理量から内部抵抗係数を算出する方法を問題として採り上げることにする。

本論文で検討するのは次の二点である。第一は、従来の二層モデルに基く塩水楔形状の計算においては、自由水面の勾配を 0 と置いている^{(7),(8),(9)}。河口近くでは確かに自由水面の勾配は小さいが河床や内部抵抗に抗して河川の流れを維持しているのは一層流の場合と同様に自由水面勾配であるから、これがどのくらいのオーダーの微小量であるかを検討しておく必要があると思われる。これについて第二節で述べる。

さて、成層密度流は下層が層流流動の状態であれば典型的な Poiseuille 型流れになるし⁽¹⁰⁾、又塩水楔に見られるような上層が乱流になっている場合にはより複雑な流況を見せるが⁽²⁾、いずれにしても二層の内部に流速分布の構造が存在しており、更に相対流速が大きい場合には密度分布も単純な二成層から外れてくることが明らかにされている。そこで第三節ではミクロな運動方程式を各層内で（ y 座標について）積分することにより、内部構造を考慮し得る密度流の運動方程式を導きこれについて考察する。

2. 成層密度流の運動への自由水面勾配の影響

定常な塩水楔形状を決定するのに従来用いられている鉛直二次元の完全二成層流の運動方程式及び連続の式は二層流の言葉で次の形に表わされる。

$$-i_b + \frac{dh_1}{dx} + \frac{dh_2}{dx} + \frac{u_1}{g} \frac{du_1}{dx} + \frac{\tau_i}{\rho_1 g h_1} = 0 \quad (2-1)$$

$$-i_b + (1-\epsilon) \frac{dh_1}{dx} + \frac{dh_2}{dx} + \frac{u_2}{g} \frac{du_2}{dx} + \frac{\tau_b - \tau_i}{\rho_2 g h_2} = 0 \quad (2-2)$$

$$\frac{d}{dx}(u_1 h_1) = 0 \quad (2-3)$$

$$\frac{d}{dx}(u_2 h_2) = 0 \quad (2-4)$$

ここに、 h_1, h_2 は上層及び下層水深、 u_1, u_2 は上層及び下層流速であり、 $\epsilon = \rho_1 / \rho_2$ を上層及び下層密度とすると

$\epsilon = (\rho_2 - \rho_1) / \rho_2$ と表わされる。又 i_b は河床勾配 ($-i_b = dy_0/dx$)、 τ_i は界面抵抗、 τ_b は河床抵抗、 g は重力加速度である。但し自由表面での抵抗力は無視している。又 h_1, h_2, i_b を自由水面、内部境界面、河床の y 座標 y_2, y_1, y_0 で表わすと、

$$h_1 = y_2 - y_1 \quad (2-5)$$

$$h_2 = y_1 - y_0 \quad (2-6)$$

$$-i_b = dy_0/dx \quad (2-7)$$

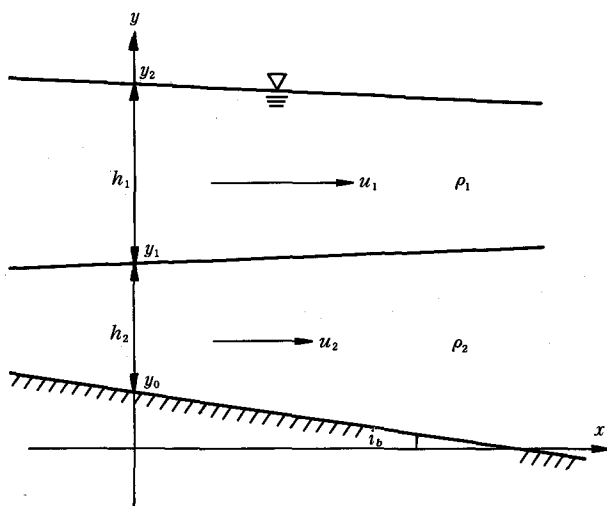


図 2-1 成層二層流の変数の定義

となり、式 (2-1) は次式となる。

$$\frac{dy_2}{dx} + \frac{u_1}{g} \cdot \frac{du_1}{dx} + \frac{\tau_i}{\rho_1 g (y_2 - y_1)} = 0 \quad (2-8)$$

以下、本節では河口密度流を念頭において、下層静止 ($u_2 = 0, \tau_b = 0$) を仮定する。式 (2-1) から式 (2-2) を差し引くと h_2 が消去され

$$\epsilon \frac{dh_1}{dx} + \frac{u_1}{g} \cdot \frac{du_1}{dx} + \tau_i \left(\frac{1}{\rho_1 g h_1} + \frac{1}{\rho_2 g h_2} \right) = 0 \quad (2-9)$$

又、式 (2-2) から式 (2-1) の $(1-\epsilon)$ 倍を差し引くと

$$-\epsilon i_b + \epsilon \frac{dh_2}{dx} - (1-\epsilon) \frac{u_1}{g} \cdot \frac{du_1}{dx} - \tau_i \left(\frac{1-\epsilon}{\rho_1 g h_1} + \frac{1}{\rho_2 g h_2} \right) = 0 \quad (2-10)$$

が得られる。

通常の計算では、水面勾配が非常に小さいのでこれを 0 と見做して、式 (2-9) のみを用いて塩水楔の形状を求めている。ところで式 (2-2) は、式 (2-1) から式 (2-8) を導いたのと同様にして次式に変形される。

$$\frac{dy_2}{dx} = \epsilon \frac{dh_1}{dx} + \frac{\tau_i}{\rho_2 g h_2} \quad (2-11)$$

式 (2-9) に式 (2-3) を適用すると

$$\left(\epsilon - \frac{u_1^2}{g h_1} \right) \frac{dh_1}{dx} + \tau_i \left(\frac{1}{\rho_1 g h_1} + \frac{1}{\rho_2 g h_2} \right) = 0 \quad (2-12)$$

即ち

$$\tau_i = \frac{\rho_1 \rho_2 g h_1 h_2}{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2} \cdot \epsilon (1 - Fi^2) \cdot \left(-\frac{dh_1}{dx} \right) \quad (>0) \quad (2-13)$$

と表わせる。ここに Fi は上層の流速、水深で作られる内部 Froude 数である

$$Fi = \frac{u_1}{\sqrt{\epsilon g h_1}} \quad (2-14)$$

式(2-13)を式(2-11)に代入すると

$$\frac{dy_2}{dx} = \epsilon \left\{ -1 + \frac{\rho_1 h_1}{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2} \times (1 - Fi^2) \right\} \left(-\frac{dh_1}{dx} \right) \quad (<0) \quad (2-15)$$

となる。式(2-13)、(2-15)は $\tau_i/\rho_i g h_i$ と自由水面勾配 dy_2/dx はともに $\epsilon \frac{dh_1}{dx}$ のオーダーであることを示している。あらかじめ水面勾配を0と仮定すると、式(2-1)、(2-2)から独立に内部抵抗係数が決定されてしまい、特に式(2-1)からは内部抵抗係数が負という結論が導かれるが、これは水面勾配0の仮定が不適当であったためである。⁽⁹⁾

河道内での塩水楔の形状計算においては自由水面勾配0の仮定は、 dh_2/dx の決定に $\epsilon \frac{dh_1}{dx}$ のオーダーの誤差しか生じないので、式(2-12)から分るように $h_2 \approx 0$ (塩水楔の上流端付近)を除いて重要な誤差を生じない。しかし河口で一般に用いられている境界条件 $Fi=1$ は、式(2-13)から河口が $h_1(x)$ の特異点になっていることを示している。これは同時に式(2-15)より河口部が自由水面曲線 $y_2(x)$ の特異点になっていることを示している。河道部での塩水楔の内部境界面の勾配 $\frac{dy_1}{dx}$ はほぼ一定に近い値をとることが分っているので、河口部での内部境界面の座標 y_1 の誤差 Δy_1 が塩水楔遡上距離 l に $\Delta l \sim \Delta y_1 / \frac{dy_1}{dx}$ の誤差を生じ、通常 $dy_1/dx \sim 10^{-3}$ の値をとるのでこの Δl は実用上問題となり得る。以上の理由から河口部の境界条件を設定する際には自由水面勾配 dy_2/dx を無視することはできないと考えられる。

3. 鉛直方向の内部構造をとり入れた密度流の運動方程式

定常状態での流体の流下方向(x 方向)の運動方程式と連続の式は次の通りである。

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad (3-1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3-2)$$

式(3-1)を y_1 から y_2 まで積分すると次式を得る。(図2-1参照、但しこの場合任意の密度及び流速分布を認めるので、この段階では y_1 の位置は特に指定しない。)

$$\int_{y_1}^{y_2} \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy + \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial p}{\partial x} dy - \tau(y_2) + \tau(y_1) = 0 \quad (3-3)$$

第一の積分の第二項は部分積分と式(3-2)を用いて次のように変形される。

$$\int_{y_1}^{y_2} \rho v \frac{\partial u}{\partial y} dy = [\rho uv]_{y_1}^{y_2} - \int_{y_1}^{y_2} u \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy = [\rho uv]_{y_1}^{y_2} + \int_{y_1}^{y_2} u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dy \quad (3-4)$$

ゆえに式(3-3)は次式となる。

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) dy + \tau(y_1) + [\rho uv]_{y_1}^{y_2} = 0 \quad (3-5)$$

但し、自由表面での応力 $\tau(y_2)$ は無視している。又第一項 ρu^2 の係数が $\frac{1}{2}$ でなく1であることに注意されたい。

式(3-5)を密度流で普通用いられる諸量

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} u dy, \quad \frac{d\bar{u}_1}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} u dy \right) \quad \text{etc.} \quad (3-6)$$

で表わすためには、積分記号の内にある x の微分を外に出さねばならない。そこで次の関係を用いると

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy = \frac{d}{dx} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy - \frac{dy_2}{dx} f(x, y_2) + \frac{dy_1}{dx} f(x, y_1) \quad (3-7)$$

式(3-5)は次式に変形される。

$$\frac{d}{dx} \int_{y_1}^{y_2} (\rho u^2 + p) dy - \frac{dy_2}{dx} [\rho u^2 + p]_{y=y_2} + \frac{dy_1}{dx} [\rho u^2 + p]_{y=y_1} + \tau(y_1) + [\rho u v]_{y_1}^{y_2} = 0 \quad (3-8)$$

ところで $v(y_2)$ は y_2 が自由表面であるゆえ

$$v(y_2) = \frac{dy_2}{dx} u(y_2) \quad (3-9)$$

となり、同じく $v(y_1)$ も連行速度 v_e そのものではなく、これと上層流の境界に沿う流速の y 成分との和である。

$$v(y_1) = \frac{dy_1}{dx} u(y_1) + v_e \quad (3-10)$$

これらを用いると式 (3-8) は次式となる。

$$\frac{d}{dx} \int_{y_1}^{y_2} (\rho u^2 + p) dy + \frac{dy_1}{dx} p(y_1) + \tau(y_1) - \rho(y_1) u(y_1) v_e = 0 \quad (3-11)$$

同様に式 (3-1) を y_0 から y_1 まで積分すると式 (3-12) となる。

$$\frac{d}{dx} \int_{y_0}^{y_1} (\rho u^2 + p) dy - \frac{dy_1}{dx} p(y_1) + \frac{dy_0}{dx} p(y_0) - \tau(y_1) + \tau(y_0) + \rho(y_1) u(y_1) v_e = 0 \quad (3-12)$$

又連続の式 (3-2) は次式となる。

$$\frac{d}{dx} \int_{y_1}^{y_2} \rho u dy = \rho(y_1) v_e \quad (3-13)$$

$$\frac{d}{dx} \int_{y_0}^{y_1} \rho u dy = -\rho(y_1) v_e \quad (3-14)$$

式 (3-11)、(3-12) が内部構造をもつ密度流の上層及び下層の運動方程式であり、図 2-1 の完全二成層流ではこれらが各々式 (2-1)、(2-2) に帰着することが容易に示される。式 (3-11)、(3-12) を導くに当っては如何なる近似も用いておらず、大気圧 $p(y_2)$ は一般性を失うことなく 0 としている。

さて、著者は既に上層流速が u 、下層静止で ϵ が 1 より十分小さい一般的な塩水楔に発達している中間層の厚さ d を求める式を得ているので⁽³⁾ (図 3-2)

$$d = \frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \cdot \frac{u^2}{g} \quad (3-15)$$

中間層の中心を境界面 ($y = y_1$) と見做した場合の式 (3-11) を密度流の諸量で表現することを考えると可成煩雑な計算の後、式 (3-11) は次の形をとることが分る。

$$\begin{aligned} \frac{dy_2}{dx} + \left(2 - \frac{59}{48} Fi^2\right) \frac{u}{g} \cdot \frac{du}{dx} \\ + \frac{\tau(y_1)}{\rho_1 g (y_2 - y_1)} + \frac{1}{8} \frac{dy_1}{dx} Fr^2 = 0 \end{aligned} \quad (3-16)$$

ここに Fi は上層の内部 Froude 数 (式 (2-14))、 Fr は Froude 数

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh_1}} \quad (3-17)$$

である。

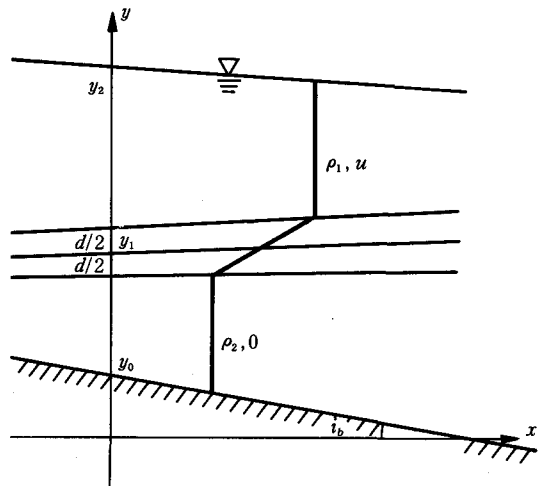


図 3-2 中間層の発達している密度流の変数の定義

この結果は、完全二成層流の上層の運動方程式 (2-8) と比較されるべきものである。

$$\frac{dy_2}{dx} + \frac{u}{g} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\tau(y_i)}{\rho_1 g (y_2 - y_1)} = 0 \quad (2-8)$$

式 (3-16) は、中間層が存在している塩水楔では完全二成層流の界面抵抗 τ_i を計算する表式 (2-8) の慣性項の係数が変化していると同時に界面勾配と Froude 数の二乗の積に比例する項が加わっていることを示している。

式 (3-12) から式 (2-11) に対応する式が導かれるが、これ自身が更に煩雑な形をしていると同時に、完全二成層流の場合に比べ d, v_e 等の独立でない諸量が式中に現われるので式 (2-12) のような簡潔な τ_i の表式は得られない。ここでは式 (3-16) の結果を示すだけに留める。

参考文献

- (1) 岩崎敏夫、江原昌彦：二成層二次元ジェットの界面抵抗について、第24回海岸工学講演会論文集、519, 1977.
- (2) 日野幹雄：密度流の流速分布および界面抵抗について、第23回水理講演会論文集、347, 1979.
- (3) 柴田正和、大西外明：海底地形急変部に基く内部境界面擾乱機構、第23回水理講演会論文集、356, 1979.
- (4) 玉井信行、浅枝隆：淡塩2層流境界面における抵抗係数について、土木学会論文報告集、271, 1978.
- (5) 江頭進治、芦田和男：成層密度流の界面抵抗係数に関する研究、第34回年次学術講演会講演概要集第2部、251, 1979.
- (6) 柴田正和、宮崎洋三：密度流の抵抗係数の水理量依存性、第34回年次学術講演会講演概要集第2部、253, 1979.
- (7) Streeter, V. L. (ed.): *Handbook of Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1961.
- (8) 柏村正和：河川水の海上への拡がり、第11回水工学に関する夏期研修会講義集、B-7, 1975.
- (9) 水理委員会密度流研究小委員会：成層密度流の界面現象(1)、第2編3節、土木学会論文報告集、242, 84, 1975.
- (10) Lofquist, K.: Flow and Stress near an Interface between Stratified Liquids, *Phys. Fluids*, 3, 158, 1960.