

ガラーキン有限要素法による多孔媒質内の塩水拡散解析

Galerkin's Finite Element Analysis of Salt-water Dispersion in Porous Media

室蘭工業大学 正会員 藤間 聡

1. まえがき

臨海域帯水層における塩水侵入は、淡水供給体系を破壊するため古くから論じられ、現在に至るまで多数の研究者によりその水理学的特性の解明および保全対策の検討がなされてきた。

この現象の理論的研究は、非混合密度流に基づくものと、混合密度流に基づくものとに大別される。前者は塩分の分散を無視し、塩水侵入を移動境界面問題として解析するもので既往の研究の大部分はこれに属する。後者は塩分の分散を考慮し、帯水層内の移動機構とその濃度を予測するものであり、塩分が高濃度の場合には、流速と濃度が密接な関連を有するため相互作用を考慮する必要がある。

本研究は、塩水侵入現象を混合密度流として取扱い、流速と塩分濃度を連成させ、帯水層内における流速分布および濃度分布を有限要素法により解析し、その結果を報告するものである。

2. 多孔媒質内の塩水拡散の基礎方程式

多孔媒質内における淡・塩水の流動が、Darcy則に従うと仮定すると、実流速は次式で与えられる。

$$\mathbf{V} = -\frac{k}{\lambda\mu} (\nabla p + \rho g \nabla y) \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{V}$ は実流速 (L/T)、 k は固有透過度 (L^2)、 p は圧力 (M/LT^2)、 g は重力加速度 (L/T^2)、 λ は有効空ゲキ率、 ρ は流体密度 (M/L^3)、 μ は粘性係数 (M/LT)、 y は基準面からの高さ (L)。

淡・塩水の質量保存は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2)$$

上式において、溶解塩分の移動は圧力変化の伝達に比して非常に遅いと考えられるので、密度の経時変化を表わす左辺第一項は無視する。

この結果 (2) 式は次式に変形される。

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (3)$$

溶解塩分に対する質量保存式は、分散による質量輸送がFickの第一則と同じ拡散型に従うものとすれば、次の拡散方程式を満足する。

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \rho_s \nabla \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho_s - \nabla \cdot (D \cdot \nabla \rho_s) = 0 \quad (4)$$

ここで、 ρ_s は溶解塩分の質量 (M/L^3)、 D は分散係数 (L^2/T)。

次に流速と塩分濃度を連成させるため、次式で表わされる状態式を導入する。

$$\rho = \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0) \frac{c}{c_1} \quad (5)$$

上式中、 ρ_0 は淡水密度、 ρ_1 は海水密度、 c は濃度 (M/L^3)、 c_1 は海水における塩分濃度を示す。

3. 有限要素法による定式化⁷⁾

一般に流体挙動を有限要素法により解析する場合、変分原理を見い出さねばならない。しかし、変分原理は基礎方程式が自己随伴偏微分方程式であるときのみ存在する。拡散問題の解析においては、変分原理は存在しないか、または明確な物理的意味を有しない。この理由により本研究では微分方程式の直接近似解法であるGalerkin法を使用する。この方法は微分方程式の厳密解と近似解との差が使用する近似関数と解析領域で直交性を持つように解を求めるものである。

(1)および(3) 式をそれぞれ次のように変形する。

$$L_1(V, p) = V + \frac{k}{\lambda\mu} (\nabla p + \rho g \nabla y) = 0 \quad (6)$$

$$L_2(V, \rho) = \rho \nabla \cdot V + V \cdot \nabla \rho = 0 \quad (7)$$

上式中、 L_i は微分演算子を表わす。

同様に、(5) 式を変形し、 ρ_s を c で置換えると次式が与えられる。

$$L_3(V, c) = \frac{\partial c}{\partial t} + c \nabla \cdot V + V \cdot \nabla c - \nabla \cdot (D \cdot \nabla c) = 0 \quad (8)$$

解析を行う領域を図-1に示す四節点アイソパラメトリック要素で分割を行う。一つの要素内における流速、圧力および濃度を線型補間関数を使用して次式で与える。

$$\bar{V} = \sum N_i(x, y) V_i, \quad \bar{p} = \sum N_i(x, y) p_i, \quad \bar{c} = \sum N_i(x, y) c_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (9)$$

ここで、 $-$ は近似値を表わし、 N_i は形状関数であり、 i は一要素の節点に反時計回りにそれぞれ1から4まで通し番号を付したときの節点を示す。

形状関数 N_i は一般に次式で与えられる。

$$N_i = (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)/4 \quad (10)$$

ここで、 ξ および η は自然座標系の変数を示す。

(9)式で示される流速、圧力および濃度の近似値をそれぞれ(6)～(8)式に代入し、その結果生ずる残差 ϵ_i は次式で与えられる。

$$\epsilon_1 = L(\bar{V}, \bar{p}) - V - \frac{k}{\lambda\mu} (\nabla p + \rho g \nabla y) \neq 0 \quad (11)$$

$$\epsilon_2 = L(\bar{V}, \rho) - \rho \nabla \cdot V - V \cdot \nabla \rho \neq 0 \quad (12)$$

$$\epsilon_3 = L(\bar{V}, \bar{c}) - \frac{\partial c}{\partial t} - c \nabla \cdot V - V \cdot \nabla c + \nabla \cdot (D \cdot \nabla c) \neq 0 \quad (13)$$

Galerkin 法を適用し、残差 ϵ_i に重味関数 W_i を乗じて領域 R で零とする。

$$\int_R \epsilon_1 W_1 dR = 0 \quad (14)$$

$$\int_R \epsilon_2 W_1 dR = 0 \quad (15)$$

$$\int_R \epsilon_3 W_1 dR = 0 \quad (16)$$

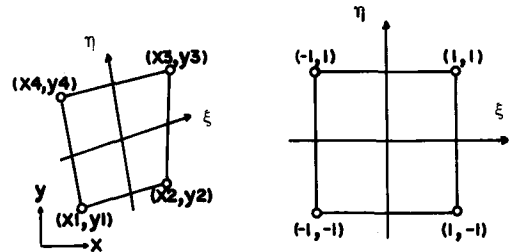
上式における重味関数 W_i は(10)式で示される形状関数 N_i を用いる。

(8)式には濃度 c に関する二階微分が存在するため c の微係数の連続性が要求される。一方、(9)式で与えられる近似多項式は1次でありこのままでは要素間の連続条件が満たされないことになる。

このため、部分積分により L_3 の階数を下げることにより、制限をとり除いて連続条件を満たし、併せて境界条件を得る手法をとる。

一つの要素について得られた(14)、(15)式をマトリックス表示すると次式が得られる。

$$[A] \{X\} = \{F\} \quad (17)$$



Descartes coordinate system Natural coordinate system

図-1 四節点アイソパラメトリック要素

(17)式において、

$$A_{ij} = \iint \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^4 (\rho_n N_n \frac{\partial N_j}{\partial x} + \rho_n \frac{\partial N_n}{\partial x} N_j) N_i & \sum_{n=1}^4 (\rho_n N_n \frac{\partial N_j}{\partial y} + \rho_n \frac{\partial N_n}{\partial y} N_j) N_i & 0 \\ N_i N_j & 0 & N_i \frac{k}{\mu} \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ 0 & N_i N_j & N_i \frac{k}{\mu} \frac{\partial N_j}{\partial y} \end{pmatrix} dx dy$$

$$X_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ p_i \end{pmatrix} \quad F_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\iint \frac{kg}{\mu} \sum_{n=1}^4 \rho_n N_n dx dy \end{pmatrix}$$

同様に (16) 式は次式に変形される。

$$[B]\{C\} + [D]\{dC/dt\} = \{G\} \quad (18)$$

ここで、

$$B_{ij} = \iint \sum_{n=1}^4 \{ (u_n \frac{\partial N_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial N_n}{\partial y}) N_i N_j + (u_n N_n \frac{\partial N_j}{\partial x} + v_n N_n \frac{\partial N_j}{\partial y}) N_i \} + (D_x \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x}) + (D_y \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y}) dx dy$$

$$D_{ij} = \iint N_i N_j dx dy \quad G_i = \iint V_m \cdot n N_i ds$$

上式中、 V_m は境界面 s を横切る質量流束、 n は境界面に立てた外向き法線単位ベクトル、 u および v は水平流速成分、鉛直流速成分、 D_x は水平方向分散係数、 D_y は鉛直方向分散係数。

(18)式中に存在する時間微分は、計算機容量および演算時間の軽減を図るため、差分法の中の次式で示される陽解法を使用して処理した。

$$([B] - (1/\Delta t)[D])\{C\}_t + (1/\Delta t)[D]\{C\}_{t+\Delta t} = \{G\}_t \quad (19)$$

ここで、 t は任意時間、 Δt は時間刻み。

本解析は、流速と塩分濃度を連成させるため、方程式系は非線型となり繰返し法により解を順次収束させなければならない。解析過程を述べると、最初に帯水層内に初期濃度を割りつけ (17) 式により水平、鉛直両流速成分を決定する。得られた流速を (19) 式に代入し塩分濃度を算定する。この濃度と流速とは適合しないため (5) 式を介して密度を修正し再び流速を決定する。こうして濃度が一定の許容値以内の変動差に入るまで繰返す。その後次の時刻に移動し同様の操作を繰返し濃度分布の経時変化を追跡する。なお、(17)、(19) 式の積分は直接行うことが出来ないで、ここでは Gauss の (3×3) 求積法で算定した。

4. 解析例および考察

幾何学的に単純化された均質等方性の臨海域帯水層⁸⁾における塩水拡散の解析結果を図-2に示す。

帯水層の大きさは高さ 31.0cm、長さ 200.0cmであり、透水係数 $K=0.29\text{cm/sec}$ 、空ゲキ率 $\lambda = 0.40$ 、縦方向分散係数 $D_L=0.020\text{cm}^2/\text{sec}$ 、横方向分散係数 $D_T=0.002\text{cm}^2/\text{sec}$ 、淡水密度 $\rho_0=1.000\text{g/cm}^3$ 、塩水密度 $\rho_1=1.025\text{g/cm}^3$ である。

同図中の濃度は海域の塩分濃度を基準にして無次元化してある。この解析の初期および境界条件は、帯水層内と左側端境界面において塩分濃度 $c=0$ 、右側端境界面の塩水侵入部において $c=1$ を与えた。また、同図中には淡・塩水の拡散を考慮しない非混合密度流解析結果を拡散解析結果と比較する目的で併せて掲げてある。

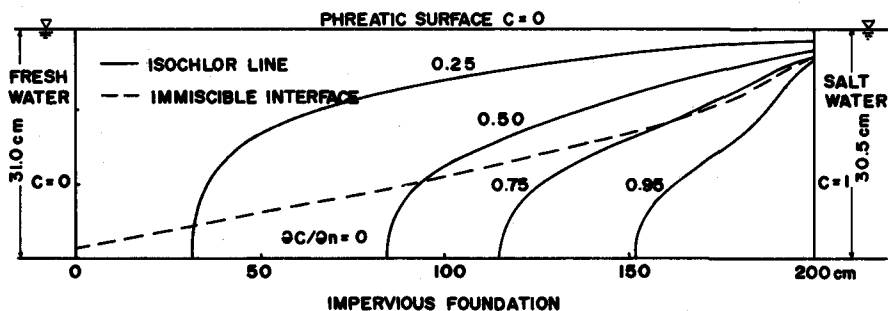


図-2 定常塩分濃度分布

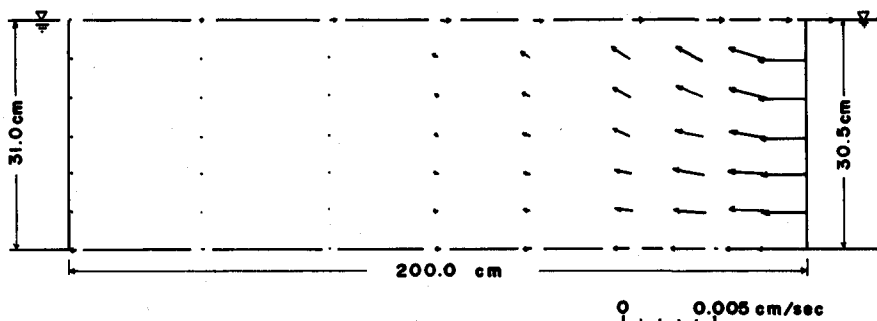


図-3 定常塩・淡水流速分布

定常流の塩分等濃度線の配置から、帯水層内はほぼ全域にわたり塩水化していることが認められる。一方、非混合密度流解析結果のシャープな塩・淡水界面は帯水層を貫通して左方淡水域に塩分を輸送するが、帯水層内には比較的広範囲に淡水が存在する。塩・淡水は混合しやすいことを考慮すると、塩・淡水界面の存在はこの解析では物理的根拠が乏しい。

図-3は、図-2の解析における定常塩・淡水流速分布を示すものである。この図から塩水循環流が形成されていることが認められる。右方塩水域から侵入した塩水は始め水平方向に流動し、淡水との混合により希釈され次第に密度を減少させ上方に順次流向を転ずる。このため溶解塩分は淡水流により再び塩水域に流送される。

図-4は縦方向分散係数 $D_L = 0.20 \text{ cm}^2/\text{sec}$ 、横方向分散係数 $D_T = 0.02 \text{ cm}^2/\text{sec}$ を与えた場合の 0.5-等濃度線の経時変化を示すものである。但し初期条件は帯水層内の塩分濃度を零とし、時間刻み $\Delta t = 40.0 \text{ sec}$ を与えた。

この場合、時間の経過とともに侵入速度が減少しつつ定常解に近似していく。

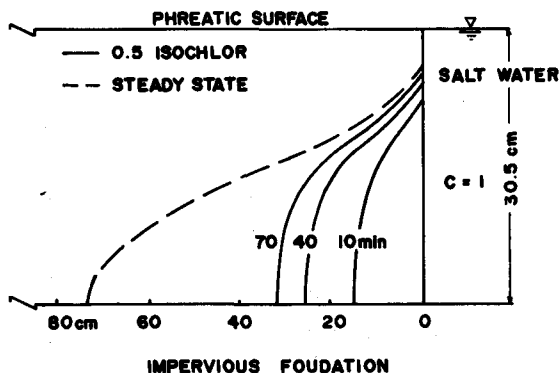


図-4 0.5等濃度線の経時変化

本解析においては分散係数をあらかじめ既知として与えた。しかし、分散係数は塩・淡水の流動パターン、多孔媒質体の特性および Peclet 数等に影響される。このため図-3に示すような帯水層内の場所により流速が変化する場合には、分散係数は一定値として与えることができない。いま得られた最大流速を基準にして解析結果を考察していく。解析で得られた最大流速は $V=0.003\text{cm/sec}$ であり非常に緩慢な流動状態である。また、多孔媒質体を構成している砂粒子の直径を $d=0.1\text{cm}$ 、塩分の分子拡散係数を $D_m=1.5 \times 10^{-5}\text{cm}^2/\text{sec}$ として、分子拡散に対する分散の比を表わすPeclet数、 $Pe=Vd/D_m$ を求めると $Pe=20$ が得られる。Bear等の既往の研究から $Pe=20$ は分子拡散より分散が卓越している状態にある。このとき縦方向分散係数と分子拡散係数との間には、次式が成立する。

$$D_L / D_m = \alpha(Pe)^m, \quad \alpha = 0.5 \quad 1 < m < 1.2 \quad (20)$$

上式に $m=1.2$, $Pe=20$ を代入すると $D_L=0.0003$ を得、本解析では分散係数を過大に見積ったことになる。

5. あとがき

Galerkin有限要素法による多孔媒質体内の塩水拡散の解析法を述べ、簡単な帯水層モデルを使用した解析例を示し、その適用性を調べた。しかし、分散係数に対する検討が不十分であり、今後分散係数の特性の解明と実験による検証を行う所存である。

終りに、この研究に際し終始適切な御指導をいただいた室蘭工業大学 近藤仁郎教授に深く謝意を表します。

本研究の数値解析計算には北海道大学大型計算機センターのFACOM230-75を使用したことを付記する。

参 考 文 献

- 1) 島 裕之：地下水（密度流的諸問題）、1971年水工学に関する夏期研修会講義集、A-8, 1971
- 2) 川谷 健：海岸帯水層内の地下水位と淡塩水境界面に関する数値計算、土木学会論文報告集 No.238, PP.89-98, 1975
- 3) Raudkivi, A.J., and R.A. Callander, Analysis of Groundwater Flow, Edward Arnold, PP.171-189, 1975
- 4) Huyakorn, F., and C. Taylor, Finite Element Models for Coupled Groundwater Flow and Convective Dispersion, Finite Element in Water Resources, FE1, PP.131-151, 1976
- 5) Pinder, G.F., and W.G. Gray, Finite Element Simulation in Surface and Subsurface Hydrology, Academic Press, PP.169-183, 1977
- 6) Desai, C.S., and D.N. Contractor, Finite Element Analysis of Flow, Diffusion, and Salt Water Intrusion in Porous Media, Formulations and Computation Algorithms in Finite Element Analysis, PP.958-985, 1977
- 7) Segerlind, L.J., Applied Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, PP.345-347, 1976
- 8) 尾島 勝：揚水による塩水化現象の変化に関する解析、第24回海岸工学講演会論文集 PP. 553-557, 1977
- 9) Bear, J., Dynamics of Fluids in Porous Media, American Elsevier, PP.606-609, 1972