

河川の蛇行に関する統一見解
Unified View on the Meandering of Rivers

埼玉大学 正会員 ○池田 駿 介
Univ. of Alberta Gary Parker
京都大学防災研究所 正会員 澤 井 健 二

1 序 論

河川の蛇行は沖積河川に見られる沖積蛇行 (alluvial meander) と岩盤や氷のような基盤を穿入する穿入蛇行 (incisional meander) に大別することができる。沖積蛇行では河床および河岸の侵食と堆積が交互におこり、さらに平衡河川である場合には蛇行の発達や移動があっても河幅や平均的な河床高はほぼ一定に保たれる。穿入蛇行では侵食が支配的であって、蛇行の発達や移動は側岸の侵食によってひきおこされ、この側方侵食が河床の侵食とバランスしている場合には河幅は一定に保たれる。

このような分類の他に側岸の拘束条件によって自由蛇行と拘束蛇行に分類できる。側方侵食に対し拘束がない場合には自由蛇行と呼ばれ、蛇行した河道を持つ。これに対し沖積蛇行であっても壁によって側方侵食を拘束される場合には流水の蛇行は発生しても河道の蛇行はおこらない。このような流水の蛇行をここでは拘束蛇行と呼ぶことにする。

直線の拘束壁を持つ移動床水路において流水の蛇行が発生しうることが最初に認識したのは木下 (1957) である。このような拘束蛇行流について数多くの線型不安定解析が行なわれ、Hansen, Callander, 足立 (1967), 林, 鮭川 (1970), Englund・Skovgaard (1973), Parker (1976), 林・尾崎 (1978) 等がその発展に寄与している。この理論は水流と河床の相互作用によって交互砂洲が発生し、その後に拘束壁の条件を取り除けば河道蛇行の発生を説明しうるという観点に立脚していると考えられる。しかし河道蛇行の発生と発達、特に発達を説明するには拘束蛇行の理論では不充分であろう。池田・日野・吉川 (1976) はこのような不充分さを補う為に蛇行が発達する条件を sine-generated curve の平面形状を持つ蛇行水路内の流れの解を用いて調べ、蛇行の発達条件や卓越波長などについて考察を行っている。この理論では前述の交互砂洲の発生理論との関連性が明らかでなく、又蛇行形状をあらかじめ与えねばならないという欠点を持っている。最近、長谷川・山岡 (1979) は同様な考えの下で交互砂洲との関連性について論じ、交互砂洲の持つ働きを明らかにしたが、蛇行形状を理論的に求めるには至っていない。

穿入蛇行については林 (1973) が交互砂洲の発生理論を論じたのと同様な手法を用いて Parker (1975) が氷河上の蛇行を論じている。

以上のような流体力学的な方法の外に各種のシミュレーション法を用いて蛇行形状を決定しようとする試みや、確率論的な考察から蛇行形状を決めようとする Langbein・Leopold (1966a) のような試みがなされている。特に後者は sine-generated curve を提案し、これが実際の形状を比較的よく表現することを明らかにしている。

地質学の分野では野外観測によって蛇行波長や蛇行振幅と水理量の関係が調べられているが、中でも Leopold・Wolman・Miller (1964) は数多くの野外測定値を整理し、沖積蛇行と穿入蛇行を比較すると流量のような水理量がほぼ同程度であれば後者の蛇行長が前者のそれと比較してはるかに大きくなるという極めて注目すべき事実を明らかにしている。又、芦田・澤井 (1977) は粘着性流路の三次元的な変化過程を実験的に追跡し、侵食性流路では交互砂洲を伴わずに蛇行が発生、発達することを明らかにしている。

本論文は以上の事実を統一的に説明することを試み、更に将来に残された課題の展望を行う。

2 交互砂洲の線型不安定理論 (alternate bar instability)

ここでは沖積河川で発生する沖積の場合 (alluvial case) と氷河上の穿入蛇行のような穿入の場合 (incisional case) について交互砂洲の線型不安定理論を展開する。直線の壁を持つ幅 $\tilde{B}$ の長方形断面水路を考え、河床のみが動きうると仮定する。水深方向に平均された $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ 方向の平均流速を夫々 $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, 河床の剪断力を $\tilde{\tau}_x$, $\tilde{\tau}_y$ とする。平均河床からの河床高を $\tilde{\eta}$, 水面高を $\tilde{\xi}$ とすると、ある地点における水深は $\tilde{h} = \tilde{\xi} - \tilde{\eta}$ である。このとき流体の運動方程式は

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -g \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\tilde{\tau}_x}{\rho \tilde{h}} \quad (1-a)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = -g \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{y}} - \frac{\tilde{\tau}_y}{\rho \tilde{h}} \quad (1-b)$$

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{h} \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{h} \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (1-c)$$

である。ここに ρ は水の密度である。河床に働く剪断力を $\tilde{\tau} = \rho C_f \tilde{U}^2$ のように表現すると、 $\tilde{\tau}_x$, $\tilde{\tau}_y$ は夫々

$$\tilde{\tau}_x = \rho C_f \tilde{U} \tilde{u}, \quad \tilde{\tau}_y = \rho C_f \tilde{U} \tilde{v} \quad (2)$$

と表わされる。ここに $\tilde{U} = \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}$ である。又、河床の高さの変化を表わす式として

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1}{1-p} \left(\frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{q}_y}{\partial \tilde{y}} \right) : \text{沖積の場合} \quad (3a)$$

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{E}_b(\tilde{T}) : \text{穿入の場合} \quad (3b)$$

が成立する。ここに p は空隙率、 $\tilde{q}_x$, $\tilde{q}_y$ は夫々 $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ 方向の体積流砂量、 $\tilde{E}_b$ は侵食速度である。 $\tilde{q}_x$, $\tilde{q}_y$ は $\tilde{T} = \sqrt{\tilde{\tau}_x^2 + \tilde{\tau}_y^2}$ とすると

$$\tilde{q}_x = \tilde{q}(\tilde{T}) \tilde{\tau}_x / \tilde{T}, \quad \tilde{q}_y = \tilde{q}(\tilde{T}) \tilde{\tau}_y / \tilde{T} \quad (4)$$

と表現され、 $\tilde{q}(\tilde{T})$, $\tilde{E}_b(\tilde{T})$ は $\tilde{T}$ の増加関数である。ここで等流な解からの摂動を考えると、

$$\tilde{u} = U_0 + u'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}), \quad \tilde{v} = v'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) \quad (5-a)$$

$$\tilde{h} = h_0 + h'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}), \quad \tilde{\eta} = \eta_0 + \eta'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) \quad (5-b)$$

とおくことができる。ここに suffix "0" は等流条件を表す。これらを基礎方程式に代入し、摂動部に関する線型方程式を導き、その後に速度スケールを U_0 , 長さスケールを h_0 , 質量スケールを ρh_0^3 で無次元化すれば、方程式 (1-a ~ c) は次式となる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = -F^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} - 2C_f u + C_f \xi - C_f \eta \quad (6-a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = -F^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} - C_f v \quad (6-b)$$

$$\frac{\partial (\xi - \eta)}{\partial t} + \frac{\partial (\xi - \eta)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6-c)$$

河床の変形方程式は同様に摂動部について

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\beta \left(N \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) : \text{沖積の場合} \quad (7-a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -E_b u : \text{穿入の場合} \quad (7-b)$$

となる。ここに $\beta = q_0 / (1-p) U_0 h_0$, $N = U_0 q_0 \cdot dq / dU_0$, $E_b = d\tilde{E}_b / d\tilde{u} \big|_{U_0}$ である。ここで河床の変化はゆっくりしているという疑似定常条件を用いれば式 (6-a, b) において時間に関する偏微分は無視できる。河床形状の振動は

$$\eta(x, y, t) = \hat{\eta} \cos \ell y e^{i(kx - \omega t)} \quad (8-a)$$

とおくことができる。ここに $k = 2\pi h_0 / \lambda_D$, $\ell = 2\pi h_0 / \lambda_L$ であり, λ_D, λ_L は夫々流下方向, 横断方向の波長である。 ω については $\omega = \omega_r + i\omega_i$ とおくことができ, $\omega_i > 0$ のとき砂洲が発達する。(8-a) 式の表現に対応して u, v, ξ を次のようにおくことができる。

$$u = \hat{u} \cos \ell y e^{i(kx - \omega t)}, \quad v = \hat{v} \sin \ell y e^{i(kx - \omega t)}, \quad \xi = \hat{\xi} \cos \ell y e^{i(kx - \omega t)} \quad (8-b, c, d)$$

側壁で $v = 0$ でなければならないことから

$$\ell B = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

であり, $B = \tilde{B} / h_0$ である。(6), (7), (8) の各式から複素円振動数 ω は次の方程式を満足しなければならない。すなわち,

$$\begin{vmatrix} ik + 2C_f & 0 & ikF^{-2} - C_f & C_f \\ 0 & ik + C_f & -\ell F^{-2} & 0 \\ 1 & -i\ell/k & 1 & -1 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} = 0$$

ここに

$$D_k = (\beta N, -i\beta \frac{\ell}{k}, 0, -\frac{\omega}{k}) : \text{沖積の場合}$$

$$D_k = (E_b, 0, 0, a - i\omega) : \text{穿入の場合}$$

である。この方程式から沖積の場合について ω_i と $C_r = \omega_r / k$ が次のように表わされる。

$$\omega_i = \beta C_f N_{Ai} / D, \quad C_r = \beta N_{Ar} / D \quad (9)$$

ここに

$$D = k^2 \Phi^2 + C_f^2 [G_1 L^4 + (G_2 L^2 + G_3 C_f^2) k^2 + G_4 k^4] \quad (10-a)$$

$$N_{Ai} = (H_1 L^4 + H_2 C_f^2 L^2) k^2 + (H_3 L^2 + H_4 C_f^2) k^4 + H_5 k^6 \quad (10-b)$$

$$N_{Ar} = -k^2 (Nk^2 + \ell^2) F^{-2} \Phi + C_f^2 (H_5 L^4 + H_6 L^2 k^2 + H_7 k^4) \quad (10-c)$$

であり, $\Phi = k^2 - F^{-2} (k^2 + \ell^2)$, $L = F^{-1} \ell$, $G_1 = 4$, $G_2 = -10 + 4F^{-2}$, $G_3 = 9$, $G_4 = 10 - 2F^{-2} + F^{-4}$, $H_1 = N - 1$, $H_2 = 3(N - 3)$, $H_3 = -(N + 1) + 2F^{-2}(N - 1)$, $H_4 = -3NF^{-2}$, $H_5 = -2(N - 3)$, $H_6 = -9 + 4N + F^{-2}(3 + N)$, $H_7 = -NF^{-2}(1 - F^{-2})$ である。

Parker (1976) は沖積の場合について $\varepsilon = C_f / L \ll 1$ の条件下で交互砂洲の発達条件を考察し, ω_i は次の波数において最大となることを導いた。

$$k_M = a C_f^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} K_B \right)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

ここに $K_B = 2\pi h_0 / \tilde{B}$ である。 a は 0(1) の値であり, 経験的に定められる。実験値と比較することによって $a = 0.707$ を得ている。

同様に穿入の場合については ω_i , C_r は次のように表わされる。

$$w_i = E_b N_{1i} / D, \quad C_r = E_b C_f N_{1r} / D \quad (12)$$

ここに D は $(10-a)$ と同一であり、

$$N_{1i} = k^4 F^{-2} \phi + C_f^2 (I_1 L^4 + I_2 L^2 k^2 + I_3 k^4) \quad (13-a)$$

$$N_{1r} = I_4 L^4 + I_5 L^2 C_f^2 + (I_6 L^2 + I_7 C_f^2) k^2 + I_7 k^4 \quad (13-b)$$

となる。 $I_1 = 2$, $I_2 = -(4 + F^{-2})$, $I_3 = F^{-2} (1 - F^{-2})$, $I_4 = 1$, $I_5 = 3$, $I_6 = -1 + 2F^{-2}$, $I_7 = -3F^{-2}$ である。式 (12) において $C_f \ll \ell, k$ の条件下で ω_i が最大となる場合をさがすと、 $F = (k^2 + \ell^2) / k^2 + O(C_f/k)$ のとき

$$\omega_{iM} \simeq \frac{1}{6} E_b \frac{C_f}{k} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\ell^2}{k^2}\right)^{-1} \left\{1 + O\left(\frac{C_f}{k}\right)\right\}$$

となり、この場合は $C_r < 0$ である。従って交互砂洲の移動方向は上流である。特に長波で $C_f \rightarrow 0$ の極限では式 (12), (13) より

$$\omega_i = EF^{-2} \frac{k^2}{k^2 - F^{-2}(k^2 + \ell^2)}, \quad C_r = 0 \quad (14)$$

となる。この場合には明らかに $F \geq F_c = (1 + \ell^2/k^2)^{1/2}$ において三次元の河床波が発生する。この場合も流れは射流で、 ω_i は $F = F_c$, すなわち

$$k_M = \frac{F^{-1}}{\sqrt{1 - F^{-2}}} \ell \quad (15)$$

のとき最大となる。 $\ell \rightarrow 0$ となる二次元河床の場合について調べてみると、式 (12), (13) より、

$$\omega_i = E_b F^{-2} \frac{k^2 (1 - F^{-2})}{k^2 (1 - F^{-2})^2 + 9 C_f^2}, \quad C_r = -3 F^{-2} E_b C_f \frac{1}{k^2 (1 - F^{-2})^2 + 9 C_f^2}$$

となり、不安定はやはり射流でおこり、河床形状は上流へ向って伝播する。この二次元形状に関する結果は芦田・澤井 (1977b) によって得られている。このように穿入交互砂洲は射流条件で発生し、河床形状は上流側へ進行することが知られる。

3 河道の蛇行の発達に関する線型理論 (bend instability)

河道蛇行の発達を定式化するには蛇行水路内の流れを解く必要がある。ここで交互砂洲不安定理論で用いられた仮定、すなわち St. Venant の方程式を用いることができるということ、および河床の変化がゆっくりしているということの他に次のような仮定を置く。

(a) 河幅に較べて蛇行水路の曲率半径は充分大きい。

(b) 蛇行水路の幅は時間的、空間的に一定に保たれる。

(b) の条件は実際の沖積蛇行では二次流などの働きによって、穿入蛇行では底面の侵食と側岸の侵食がバランスしていることによって保たれていると考えられる。

図 1 を参照して $\tilde{s}$, $\tilde{n}$ 方向の水深方向に平均された流速成分を夫々 $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ とすると流体の運動方程式は

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{s}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{n}} + \frac{\tilde{u} \tilde{v}}{\tilde{r}} = -g \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{s}} + g i - \frac{\tilde{\tau}_x}{\rho h} \quad (16-a)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{s}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{n}} - \frac{\tilde{u}^2}{\tilde{r}} = -g \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{n}} - \frac{\tilde{\tau}_y}{\rho h} \quad (16-b)$$

であり、 $\tilde{\xi}$ は平均水面からの水面の高まりである (図1)。連続の方程式は

$$\frac{\tilde{v}\tilde{h}}{\tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{u}\tilde{h}}{\partial \tilde{s}} + \frac{\partial \tilde{v}\tilde{h}}{\partial \tilde{n}} = 0 \quad (16-c)$$

である。ここに $\tilde{r}$ は曲率半径であり、(a)の仮定から $\tilde{s}$ のみの関数となる。ここで方程式を簡略化する為に、(16-a)、(16-b)の両式の左辺のオーダーを見積ってみる。図1を参照して $\partial \tilde{u}/\partial \tilde{s}$ と $\tilde{v}$ は $1/4$ 蛇行長 L の区間で次のような大きさを持つ。

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{s}} \approx \frac{\tilde{u}_b}{2L}, \quad \tilde{v} \approx \frac{\tilde{u}_b}{2L} \times b$$

ここに $\tilde{u}_b$ は左岸側頂点付近における主流流速と平均流速の差である。この結果を用いて (16-a)、(16-b)の両式の左辺の大きさを見積る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{s}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{u}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{n}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}}, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{s}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{u}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{n}} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}} \\ \frac{\tilde{u}_b}{2L}, \quad \frac{\tilde{u}_b}{2L} \frac{\tilde{u}_b}{U_0}, \quad \frac{\tilde{u}_b b}{2L \tilde{r}}, \quad \frac{\tilde{u}_b b}{2L L}, \quad \frac{\tilde{u}_b}{2L} \frac{b}{2L U_0}, \quad \frac{\tilde{u}_b}{2L} \frac{U_0}{u_b} \end{aligned}$$

ここに b は河幅の $1/2$ であり、 U_0 は平均流速である。 b/L は充分小さいと考えてよいので仮定 (a)の他に $\tilde{u}_b/U_0$ が小さいという条件を付せば、慣性項は $\tilde{u}\partial \tilde{u}/\partial \tilde{s}$ および $\tilde{u}^2/\tilde{r}$ を除いて無視できることになる。ここで前節と同様に $\tilde{\tau} = \rho C_f \tilde{U}^2$ と表現し、 $\tilde{u}$, $\tilde{h}$ を等流部とそれからの摂動部に分けて表わせば、

$$\tilde{u} = U_0 + u'(\tilde{s}, \tilde{n}), \quad \tilde{h} = h_0 + \eta'(\tilde{s}, \tilde{n}) + \xi'(\tilde{s}, \tilde{n}) \quad (17)$$

となる。 $U_0 \gg u'$, $h_0 \gg \eta'$, ξ' とすると (16-a)、(16-b)の両式から摂動部に関する方程式が次のように得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial s} + 2C_f u = -F^{-2} \frac{\partial \xi}{\partial s} + C_f (\eta + \xi) \quad (18-a)$$

$$C = F^{-2} \frac{\partial \xi}{\partial n} \quad (18-b)$$

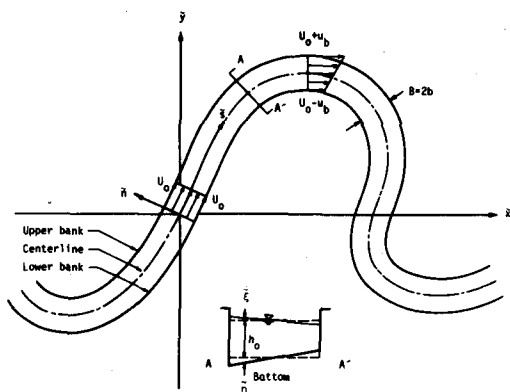


Figure 1. Definition diagram for meandering channel with erodible banks and beds.

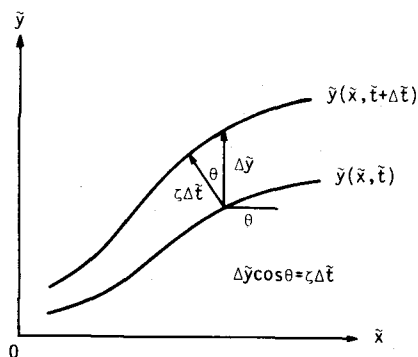


Figure 2. Diagram for derivation of the equation of bend erosion, (22).

ここに $C = h_0 / \tilde{r}$, $F = U_0 / \sqrt{gh_0}$ であり, u , η および ξ は U_0 , h_0 を用いて無次元化されている。 η は平均河床からの掘れであり, Engelund (1974), 池田 (1975) によって次のように表現されている。

$$\eta = A C n \quad (19)$$

ここに A は池田によれば抵抗係数と掃流力の関数となるが, Engelund は $A = 7 \tan \phi \simeq 4.0$ となるとしている。 ϕ は砂粒の水中安息角である。須賀 (1963) は日本の河川について曲率半径, 河幅, 洗掘深などの資料を集めているが, これを用いて A の値を見積ると図 3 のような分布を与えた。この平均値は,

$$A = 2.89 \quad (20)$$

である。(18-b) 式を積分し (18-a) 式に代入すれば流水に関する方程式,

$$\frac{\partial u}{\partial s} + 2 C_f u = - \left(\frac{\partial C}{\partial s} - C_f F^2 C - C_f A C \right) n \quad (21)$$

を得る。

次に河岸の変形について考える。河岸変形の方程式は図 2 を参照して

$$\cos \theta \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} = \tilde{\zeta}(\tilde{s}, \tilde{n}) \quad (22)$$

となる。 $\tilde{\zeta}$ は $\tilde{n}$ 方向への侵食速度である。一般に蛇行水路は程度の大小はあるが, 粘着性を持つ河岸材料から成り立っている。粘着性土の侵食特性は芦田・澤井 (1977a) によって調べられており, 侵食速度は局所的な剪断力の増加関数となることが知られている。ここでは側岸近傍の局所主流流速の関数とおけば, 侵食速度は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}(\tilde{u}(\tilde{s}, \tilde{n})) &= \tilde{\zeta}(U_0) + \left. \frac{d\tilde{\zeta}}{d\tilde{u}} \right|_{\tilde{u}=U_0} u'(\tilde{s}, \tilde{n}_*) \\ &= E u'(\tilde{s}, \tilde{n}_*) \end{aligned}$$

ここに $E = d\tilde{\zeta}/d\tilde{u} \big|_{\tilde{u}=U_0}$ は流速が U_0 のときの侵食速度, $\tilde{n}_* = \tilde{B}/2$ である。さらに流れの速度が U_0 となる場合は等流条件となり, 河幅は変化しないと考えているので, $\tilde{\zeta}(U_0) = 0$ である。 $y = \tilde{y}/h_0$, $t = \tilde{t} U_0/h_0$, $u_b = u'(\tilde{s}, \tilde{n}_*)/U_0$ とおくと上式は

$$\cos \theta \frac{\partial y}{\partial t} = E u_b \quad (23)$$

となる。ここで幾何学的条件から次の関係が存在する。

$$C = - (1 + y_x^2)^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \frac{ds}{dx} = (1 + y_x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \cos \theta = (1 + y_x^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (24)$$

(21) 式において $n = n_*$ のとき $u = u_b$ であることを考え, (23), (24) の両式を (21) 式に代入すれば,

$$\frac{\partial}{\partial x} r \frac{\partial y}{\partial t} + 2 C_f \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} r^3 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + r^2 C_f (A + F^2) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (25)$$

を得る。但し $t = E n_* t$ としてあり, $r = (1 + y_x^2)^{-1/2}$ である。本論文では (25) 式を蛇行方程式と名付ける。(25) 式は蛇行振幅が小さいとき, すなわち $r \simeq 1$ のとき次の形の解を持つ。

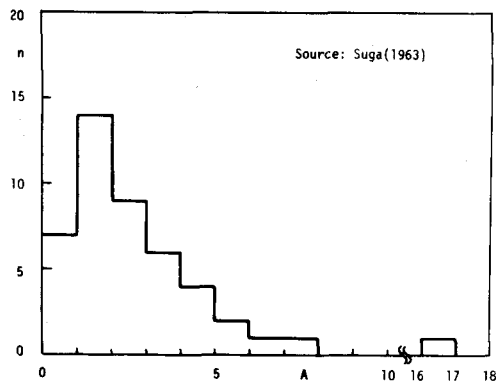


Figure 3. Frequency distribution of A found in Japanese river.

$$y = \varepsilon e^{at} (kx - \omega t) \quad (26)$$

ここに ε は無次元化された蛇行振幅であり、 $\varepsilon \ll 1$ である。 a は蛇行振幅の増幅係数、 k および ω は無次元化された波数および円振動数である。(26) 式を $\gamma = 1$ とおいた (25) 式に代入すると

$$\omega = \frac{2C_f k^3 \{1 + (A + F^2)/2\}}{k^2 + 4C_f^2}, \quad a = -\frac{k^4 - 2C_f^2(A + F^2)k^2}{k^2 + 4C_f^2} \quad (27-a, b)$$

を得る。 a は次の条件のとき正となる。

$$k < \sqrt{2} C_f \sqrt{A + F^2}$$

従ってこれよりも大きな波数の蛇行は存在しえない。 a を最大にする条件から卓越波数として

$$\begin{aligned} k = k_M &= 2C_f \sqrt{-1 + \{1 + (A + F^2)/2\}^{1/2}} \\ &= \beta C_f \end{aligned} \quad (28-a)$$

を得る。この値に対し、 a および ω は次のようになる。

$$a_M = \frac{\beta^2}{4} k_M^2, \quad \omega_M = \frac{\beta(\beta^2 + 4)}{8} k_M^2 \quad (28-b, c)$$

ここで特に A の値として 2.89 を採用し、 $A \gg F^2$ とすれば

$$k_M = 1.50 C_f, \quad a_M = 0.564 k_M^2, \quad \omega_M = 1.17 k_M^2 \quad (29-a, b, c)$$

となる。

一方 芦田・澤井 (1977b) は粘着性流路で実験を行い、横断方向に水路床が平坦であっても蛇行が発生、発達することを見出し、又 Leopold・Wolman・Miller (1964) は穿入蛇行では砂洲 (point bar) が発生しにくいことを報告している。このような場合には $A = 0$ 、 $F^2 \ll 1$ とおいて

$$k_M = C_f F, \quad a_M = k_M^2 F^2 / 4, \quad \omega_M = k_M^2 F / 2 \quad (30-a, b, c)$$

となる (実際には F の値が 3 程度まで式 (30) でよく近似できる)。

蛇行の移動については (28c) 式において $\omega_M > 0$ であるので移動速度は正となり、蛇行形状はフルード数の如何にかかわらず下流側へ向って伝播することが知られる。

4 蛇行波長に関する理論値と実測値の比較

(11) 式, (15) 式, (28-a) 式, (29-a) 式を夫々波長 λ (次元量) に直せば,

$$\lambda = \frac{2\sqrt{\pi}}{a} \sqrt{\widetilde{B}h_0} C_f^{-1/2} \quad (31)$$

$$\lambda = 2\widetilde{B}F \sqrt{1 - F^{-1}} \quad (32)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{1.5} \frac{h_0}{C_f} \quad (33)$$

$$\lambda = 2\pi \frac{h_0}{C_f F} \quad (34)$$

となる。野外の実測値と比較する場合にはどの段階の水量 (水深や流量) が蛇行現象に支配的であるかを

知る必要がある。Schumm (1969) は蛇行波長と各種水理量間の関連性について調べ、流量と流砂の型式が支配的な要素であることを見出し、更に蛇行波長と各種流量の相関を調べた結果、蛇行波長は年平均洪水流量 (mean annual flood) と最も緊密な関係にあることを明らかにしている。Harvey (1975) は交互砂洲の波長と各種流量との相関を調べ Q_5 (全時間の5%の時間がこの流量以上となる流量) が最も相関が強く、一年に一度おこるような大きな流量との相関性は低いことを見出ししている。このように蛇行波長は年平均洪水流量程度の流量と強くかかわり合っていると考えられる。

図4, 5, 6 は年平均洪水流量に対応する各河川の水深と河幅を用いて計算された理論値と実験値および野外測定値を蛇行波長 (又は交互砂洲波長) について比較したものである。これらの内、Chitale (1970), Langbein・Leopold (1966 a, b), Leopold・Wolman (1957) のデータについては Bankfull discharge (Chitale によればインドでは最大流量の約2/3) を用いて計算を行っている。これらのデータは沖積の場合 (alluvial case) のものであり穿入の場合 (incisional case) のものは含まれていない。図4は Parker (1976) が交互砂洲の不安定理論を用いて得た交互砂洲の波長に関する理論値を比較したもので、小さなスケールの実験水路で得られた交互砂洲から非常に大きい河川までよく一致しており、これから沖積河川の蛇行波長は交互砂洲の不安定理論でよく説明できることがわかる。

図5は蛇行方程式の線型解から得られた蛇行波長の式, (33) と実測値を比較したもので、平均的な蛇行波長は表現するものの、ばらつきがやや大きいことが知られる。この原因は理論式の誘導の過程で蛇行水路の幅を無視したこと (仮定 (a)), 及びAの値を一定としたことにあると考えられる。

図6は河床が平坦である条件から得られた式, (34) と沖積蛇行波長 (又は交互砂洲波長) を比較したものである。これから理論値は実際の値の約6倍の波長を予測していることがわかる。以上から沖積蛇行においては河床の洗掘、堆積の過程 (交互砂洲) が蛇行波長の決定に大きい役割を果たしていることが結論される。

一方、河川の穿入蛇行では既に述べたように流れはほとんどの場合常流であり、交互砂洲や point bar の発生が抑制されている。このような場合には河道蛇行の不安定理論から得られた式 (34) と実測波長を比較するのが妥当である。図7は 芦田・澤井 (1977b) が粘性流路で得た穿入蛇行長を式 (34) と比較したものである。同図には穿入交互砂洲理論から得られる波長、式 (32) も比較の為に示しているが、河

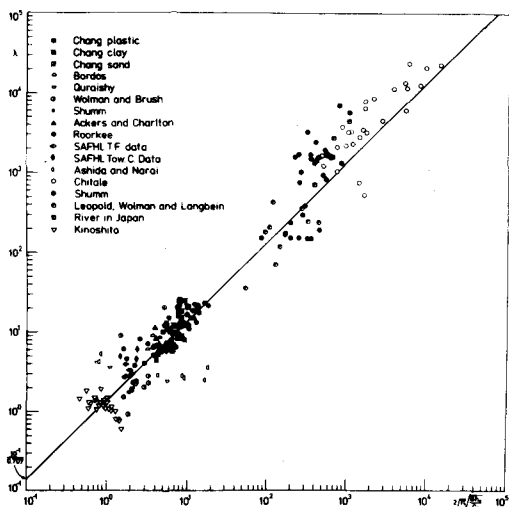


Figure 4. Test of equation (31) for alluvial data (units are meters).

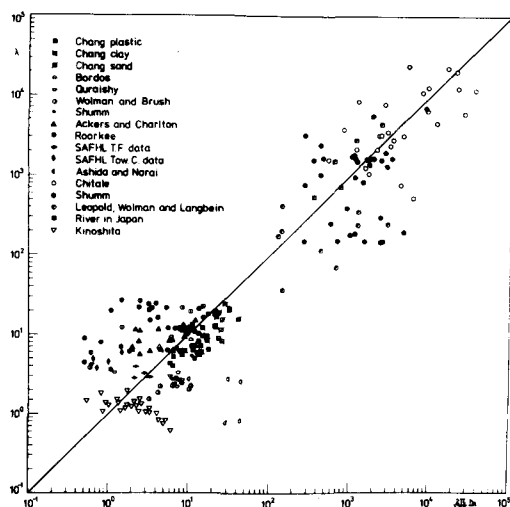


Figure 5. Test of equation (33) for alluvial data (units are meters).

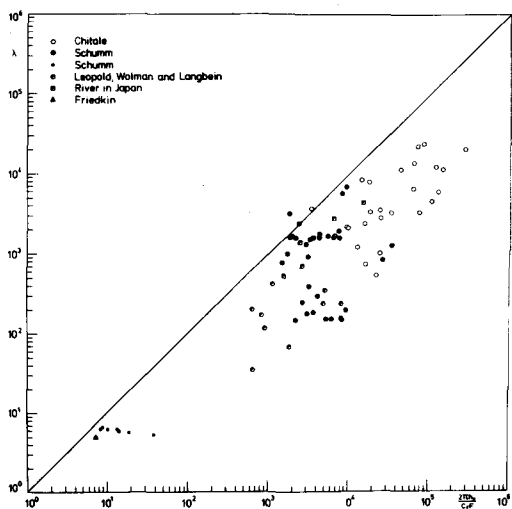


Figure 6. Test of equation (34) for alluvial data.

Figure 8. Test of equations (32) (circles) and (34) (black circles) for data on supra-glacial meltwater stream meandering (units are meters).

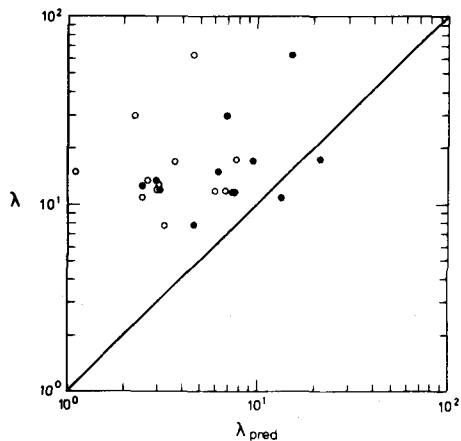
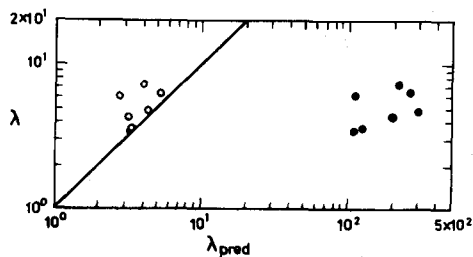


Figure 7. Test of equations (32) (circles) and (34) (black circles) for data on incised rill meanders (units are cms).



道蛇行不安定理論から得られる値の方がよい一致を示していることがわかる。さらに芦田・澤井によれば流れは一般に射流であつたにもかかわらず、蛇行形状が上流へ向って伝播した例はなかったことおよび河床の横断方向への傾きは全く観測されなかったことから蛇行の発生は河道蛇行不安定によるものであることが結論される。野外測定値については Leopold・Wolman・Miller (1964) は岩盤中の河川蛇行波長は沖積蛇行波長と較べて 5~10 倍程度大きいことを数多くのデータから明らかにしているが、この測定結果では水深やその他の水理量が不明で式 (34) の妥当性を検証することはできない。しかし式 (34) は沖積蛇行波長の約 6 倍の値を与えることから傾向としては一致する方向にある。

図 8 は氷河上の水流による穿入蛇行波長 (Parker, 1975) を穿入交互砂洲理論から得られた式 (32) と比較したものである。この実測では流れは全て射流 (F は 2.5~3.8) で蛇行形状が下流へ向って伝播する現象は観測されなかったことおよび河床の横断方向への顕著な傾きが観測されたことから、この蛇行は穿入交互砂洲に起因するものであることが結論される。

5 結 語

沖積蛇行では河床の洗掘と堆積の過程が蛇行の発生に重要な働きをなしており、拘束蛇行流における交互砂洲の不安定理論によって実際の蛇行波長をよく説明しうる。これに対し、蛇行方程式から導かれる蛇行波長は実測値を平均的には表わすものの、理論式の誘導過程で導入された仮定の為に式 (31) の交互砂洲不安定理論よりも精度が低く、ばらつきが見られる。しかし河道蛇行の発達を調べるには蛇行方程式は有効であり、非線型理論にまで拡張が可能である。

一方、穿入蛇行については二つの型式が存在することが確認された。すなわち一つは河道の蛇行不安定に起因するもので蛇行は常流、射流に関係なく発生し、蛇行形状は下流側に向って伝播する。一般に岩盤を穿

入する蛇行河川はこの型式をとっていると考えられる。他の一つは穿入交互砂洲不安定に基づくもので蛇行は射流域においてのみ発生し、蛇行形状は停止しているか又は上流に向って伝播する。このような例は氷河上の流れの蛇行で見られる。以上の二つの型式がどのような場合に選択されるかは明らかではないが、図8に示されているように河道蛇行不安定による波長と穿入交互砂洲不安定による波長は全く異っており、異なった波数域で発生する現象であることが推論される。

今後は蛇行河道内の三次元流れ、侵食・堆積の状況の詳細な実測が必要であり、特に穿入蛇行河川についてはデータの蓄積が充分でなくこれらの観測を行うことが望まれる。

この研究に際して文部省科学研究費総合研究(A)、河川の高水計画と河道形状に関する研究(代表者吉川秀夫早稲田大学教授)、の補助を受けた。又、関陽太郎埼玉大学教授より有益な文献を紹介いただいた。記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 木下良作 : 河床における砂礫堆の形成について, 土木学会論文集, 42号, 1957.
- 2) Hansen, E.: The formation of meanders as a stability problem, Hydraul. Lab., Tech. Univ. of Denm., Basic Res. Prog. Rep., no.13, 1967.
- 3) Callander, R. A.: Instability and river channels. JFM, vol. 36, 1969.
- 4) Adachi, S.: A theory of stability of streams, Proc. 12th Congr. IAHR, 1967.
- 5) 林泰造 : 河川蛇行の成因についての研究, 土木学会論文報告集, 180号, 1970.
- 6) Sukegawa, N.: Conditions for the occurrence of river meanders, J. Faculty of Eng., Univ. of Tokyo vol. 30, 1970.
- 7) Engelund, F. and skovgaard, O.: On the origin of meandering and braiding in alluvial streams, JFM, vol.57, 1973.
- 8) Parker, G.: On the cause and characteristic scales of meandering and braiding in rivers, JFM, vol.76, 1976.
- 9) Hayashi, T. and Ozaki, S.: Formation of alternating bars and braids, Proc. US-Japan Semi. on Sedimentation, 1978.
- 10) 池田駿介, 日野幹雄, 吉川秀夫 : 河川の自由蛇行に関する理論的研究, 土木学会論文報告集, 255号, 1976.
- 11) 長谷川和義, 山岡勲 : 蛇行流路の発達条件に関する解析と実験, 土木学会年次学術講演会, 1979.
- 12) Parker, G.: Meandering of supraglacial melt streams, WRR., vol.11, 1975.
- 13) Langbein, W. B. and Leopold, L. B.: River meanders-theory of minimum variance, USGS. Prof. Paper, 422 H, 1966 a.
- 14) Leopold, L. B., Wolman, M. G. and Miller, J. P.: Fluvial processes in geomorphology, W. H. Freeman and Company, 1964.
- 15) 芦田和男, 澤井健二 : 粘着性流路の侵食と横断形状に関する研究, 土木学会論文報告集, 266号, 1977 a.
- 16) 芦田和男, 澤井健二 : 裸地斜面における流路の形成過程に関する研究(3)一流路の三次元形状一. 京都大学防災研究所年報, 20-B2, 1977 b.
- 17) Engelund, F.: Flow and Bed topography in channel bends, J. Hyd. Div., Proc. ASCE, vol.100, no. HY11, 1974.
- 18) Ikeda, S.: On secondary flow and bed profile in alluvial curved open channel, Proc. 16th Congr. IAHR, 1975.

- 19) Schumm, S. A. : River metamorphosis, J. Hyd. Div., Proc. ASCE, vol.96, no. HY1, 1969.
- 20) Harvey, A. M. : Some aspects of the relations between channel characteristics and riffle spacing in meandering streams, Am. J. of Science, vol.275, 1975.
- 21) Chitale, S. V. : River channel patterns, J. Hyd. Div., Proc. ASCE, vol.96, no. HY1, 1970.
- 22) Leopold, L. B. and Langbein, W. B. : River meanders, Sci. Am., June, 1966b.
- 23) Leopold, L. B. and Wolman, M. G. : River channel patterns : braided, meandering and straight, USGS Prof. Paper, 282B, 1957.
- 24) Wolman, M. G. and Brush, L. M. Jr. : Factors controlling the size and shape of stream channels in coarse noncohesive sands, USGS Prof. Paper, 282G, 1961.
- 25) 木下良作 : 石狩川河道変遷調査, 科学技術庁資源局資料, 36号, 1961.
- 26) 荒木正夫 : 肝属川の河床平衡に関する考察, 建設省直轄工事第6回技術研究報告, 1953.
- 27) Quirashy, M. S. : The origin of curves in rivers, Current sci. vol.13, 1944.
- 28) Schumm, S. A. and khan, H. R. : Experimental study of channel patterns, Geol. Soc. of Am. Bull. vol.83, 1972.
- 29) 芦田和男, 奈良井修二 : 河床形態の変動特性に関する研究 — その統計的構造について —, 京都大学防災研究所年報, 12-B, 1969.
- 30) 須賀堯三 : 河川のわん曲部における洗掘について, 土木技術資料5-4, 1963.