

砂堆の波形勾配及び掃流砂量について
ON THE STEEPNESS OF DUNES AND THE SEDIMENT TRANSPORT

中央大学理工学部 正会員 林 泰造
中央大学大学院 学生員 〇矢内 栄二

1. はじめに

掃流砂量の計算にはまず有効掃流力を求めることが必要である。従来の有効掃流力 τ' の算定の方法はいずれも全掃流力 τ と、平坦河床面としての砂粒粗度を与えて求めるものであり、このようにして定められた有効掃流力を全掃流力から差し引いたものが河床抵抗“剪断力” τ'' であるとされてきた。しかし明らかに、 τ'' には河床形状と掃流砂量 g_B も関係する。従って、 $\tau \rightarrow \tau' \rightarrow g_B$ のように τ から τ' そして g_B を一方向的に算定する従来の計算方法では、 τ の実測値が極めて精度が高いものであるときには、原理的に正しい g_B の算定が可能であるが、 τ の測定値に誤差がある場合にはそのしわよせは増幅された形ですべて g_B の測定値に集まることになる。従って、従来の τ' の分離方法は原理的に正しいものであっても、実際上の目的のためには精度の上で不十分なものであったといえる。このような誤差の影響の一方向的な集中を避けるためには τ の内訳である τ' と τ'' を用い、これに g_B および河床形状（すなわち河床波の卓越波長・波高）の影響を加えて τ に feed back する式をたて系を閉じて問題を“全体的に”解くことが必要である。

本研究は、このような考え方に基づいて理論的研究を行なった。研究はまだ完成したものとなっていないが、本論文においてはこれまでに得られた結果と問題点について報告する。

2. 記号

本論文に使用する記号はつぎのようである。（Fig. 1参照）。

- D：水深
- h ：河床波の波高
- L：河床波の波長
- u_1 ：河床波頂断面での断面平均流速
- u_2 ：河床波底断面での断面平均流速
- g ：単位幅当り流量
- U_m ：断面平均流速
- s ：砂の比重
- S：エネルギー勾配
- d ：河床砂の粒径
- Fr：水流のフルード数
- τ_s ：砂の単位容積重量
- τ ：水の単位容積重量
- g_B ：単位時間単位幅当り掃流砂量
- ϕ ：無次元掃流砂量 = $g_B / \sqrt{(s-1)gd^3}$

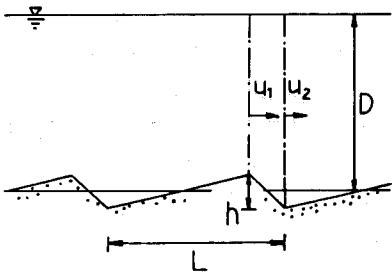


Fig.1 Notations

- ϕ_0 ：平坦河床での流速係数 = $7.66(D/d)^{\frac{1}{3}}$
- τ_* ：無次元全掃流力 = $DS / (s-1)d$
- τ'_* ：無次元有効掃流力
- τ_{*c} ：無次元限界掃流力

3. 系の基本式

τ' , τ'' , g_B , h , L の 5 個を未知量と考えると、これらの量からなる系を閉じるためには 5 個の式が必要である。それらの式を以下 (a) ~ (e) に記述する。

(a) 掃流力間の内訳式

$$\tau = \tau' + \tau'' \dots\dots\dots (1)$$

(b) 砂堆の波長, L

前報³⁾においては L として

$$L/d = 2\pi(s-1)\varphi_0 \tau_*' / 0.25 \dots\dots\dots (2)$$

を使用した, しかし $Fr=0.4$ 前後では L は殆ど D にのみ関係し, D/d と Fr には殆ど関係しないものとなる
ことが林・大西⁴⁾により理論的に示されたので, その理論に基づき, ここでは先に日野⁵⁾により求められ
たつぎの式を使用する。

$$D/L = 1/7 \dots\dots\dots (3)$$

(c) 形状抵抗⁶⁾ 掃流力 τ''

τ'' の式としては次式を使用する。

$$\tau_*'' = \frac{k^2}{L^2} \frac{\alpha L}{2(s-1)d} \frac{U^2}{gD} \dots\dots\dots (4)$$

この式は断面急拡による損失水頭の式

$$h_f = (u_1 - u_2)^2 / 2g \dots\dots\dots (5)$$

を砂堆背面における拡がり (Fig. 1) の損失計算に当てはめて, その損失水頭 $4H''$ を補正係数 $\alpha (\leq 1.0)$ を
導入して,

$$4H'' = \alpha \frac{(u_1 - u_2)^2}{2g} \dots\dots\dots (6)$$

とき, これに

$$u_1 = g / (D - \frac{h}{2}), \quad u_2 = g / (D + \frac{h}{2})$$

を代入し, さらに両辺に $(1/L)D/(s-1)d$ をかけて無次元掃流力の次元量に書き直したものである。

(d) 掃流砂のエネルギー 方程式

Engelund・Hansen¹⁾はBagnoldの考えを取り入れて次のような運動方程式をたてた。

掃流砂量 g_B を波高 h だけ持ち上げるのに要するエネルギーは $(r_s - r)g_B h$ に等しく, 同時間内に粒子に働ら
く力によってなされる仕事は $(\tau' - \tau_c)u_*' L$ に比例する。以上を式化すると

$$(r_s - r)g_B h = \alpha_1 (\tau' - \tau_c) u_*' L \dots\dots\dots (7)$$

ここに α_1 : 比例定数

(7)式は次のように無次元化される。

$$\begin{aligned} g_B h / L &= \alpha_1 (\tau' - \tau_c) u_*' d / (r_s - r) d \\ &= \alpha_1 (\tau_*' - \tau_{*c}) \sqrt{\tau_*'} \sqrt{(s-1)gd^3} \\ \phi \frac{h}{L} &= \alpha_1 (\tau_*' - \tau_{*c}) \sqrt{\tau_*'} \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

(8)式を本研究で使用する掃流砂のエネルギー方程式とする。

(e) 掃流砂量式

有効掃流力に対する掃流砂量式としてEinstein・Brown⁷⁾の式

$$\phi = 40 \tau_*'^3 \dots\dots\dots (9)$$

を使用する。

4. 系の解

基本式(1), (3), (4), (8), (9)の5個の式に基づき, 系の解を以下に求める。

(a) 有効掃流力

(4)式は

$$\begin{aligned}\tau_*'' &= \frac{h^2}{L^2} \frac{\alpha DS'}{2(s-1)d} \frac{Um^2}{\beta DS'} \frac{L}{D} \\ &= \frac{h^2}{L^2} \frac{\alpha}{2} \tau_*' \varphi_0^2 \frac{L}{D} \\ &= \frac{h^2}{L^2} \frac{\alpha}{2} \tau_*' \left\{ 7.66 \left(\frac{D}{d} \right)^{\frac{1}{4}} \right\}^2 \frac{L}{D}\end{aligned}$$

と書き直される。従って

$$\frac{h}{L} = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \sqrt{\frac{D}{L}} \frac{1}{7.66} \left(\frac{D}{d} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\tau_*''}{\tau_*'}} \quad \dots (10)$$

上式中の L/D には(3)式を代入し、また(4)

式の補正係数 α の値を

$$\alpha \sim 0.7$$

とすると、上式は次のように書き表わされる。

$$\frac{h}{L} = \sqrt{\frac{2}{4.9}} \frac{1}{7.66} \left(\frac{D}{d} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\tau_*''}{\tau_*'}} \quad \dots (11)$$

(8)式に(1)式、(9)式、(11)式を代入すると、

$$40 \tau_*'^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{4.9}} \frac{1}{7.66} \left(\frac{D}{d} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\tau_*'' - \tau_{*c}}{\tau_*'}} = \alpha_1 (\tau_*' - \tau_{*c}) \sqrt{\tau_*'} \quad \dots (12)$$

と表わされる。上式の両辺を2乗して τ_*' について書き直すと全掃流力 τ と有効掃流力 τ_*' との関係は次式で与えられる。

$$\tau_*' = \frac{\alpha_1^2 (\tau_*' - \tau_{*c})^2}{1600 C_1^2 \tau_*'^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{D}{d} \right)^{\frac{1}{2}} + \tau_*' \quad \dots (13)$$

ここに、 $C_1 = \sqrt{2/4.9} / 7.66$

$\alpha_1 = 0.2$ として (13)式と Gilbert⁷⁾ および Guy等⁸⁾ の実験値と比較したのが Fig. 2 である。理論と実験との一致の度合はまだ十分によいとはいえないが、理論は実験のある程度の比較曲線になりえていると思う。図中でフルード数別にプロットしてあるが、(13)式からも分るように全掃流力 τ_* はフルード数にあまり関係しない。同図中には Engelund⁴⁾ の式

$$\tau_*' = \tau_{*c} + 0.4 \tau_*'^2 \quad \dots (14)$$

ただし、 $\tau_{*c} = 0.06$

および、岸・黒木¹⁰⁾ の式

$$\left. \begin{aligned}\tau_*' &= 0.21 \tau_*'^{\frac{1}{2}} \quad (\text{砂堆領域I}) \\ \tau_*' &= 1.49 (D/d)^{\frac{1}{4}} \tau_*' \quad (\text{砂堆領域II})\end{aligned} \right\} \quad \dots (15)$$

も併せて図示してある。これらはいずれも

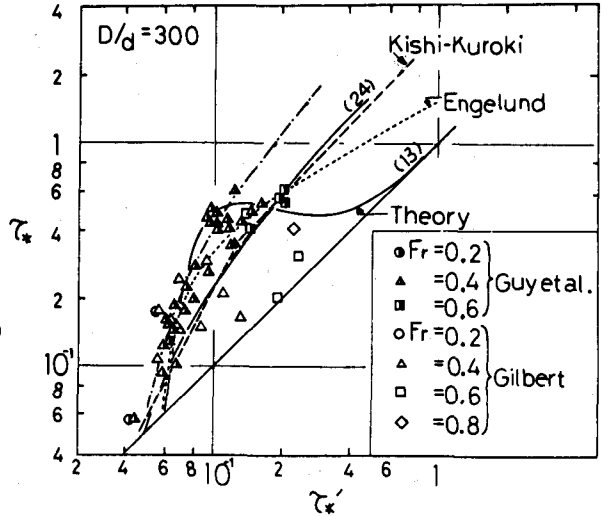


Fig. 2 Relation between normalized grain-roughness shear stress and normalized total shear stress

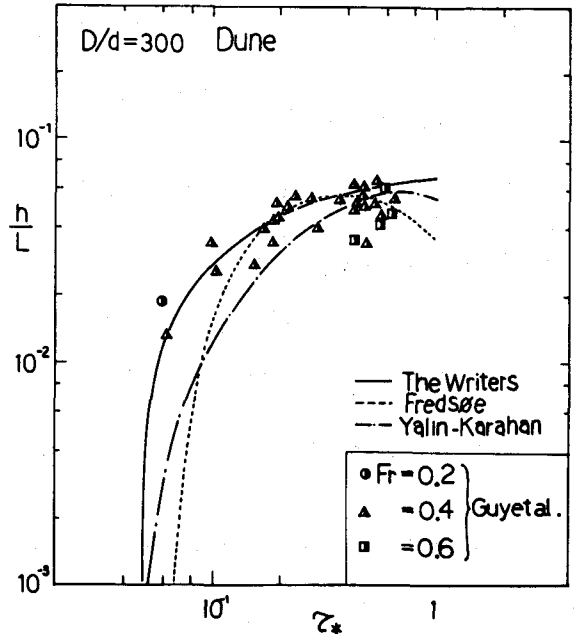


Fig. 3. Comparison of predicted and observed sand wave steepnesses

実験式であるが、限界掃流力付近の状態はこれらの式では正しく表わされない。例えば Engelund の式 (14) では

$$\tau_*' = \tau_{*c} \text{ のとき } \tau_* = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

となり理論的にはおかしいものとなり、限界掃流力付近では同式を使用することはできない。この点筆者らの (13) 式によれば、

$$\tau_*' = \tau_* \text{ のとき } \tau_* = \tau_*' \quad \dots\dots\dots (17)$$

となり、限界掃流力付近においても理論的な不合理は起きない。しかし、同式は τ_*' についての 5 次式であり、これを解析的に解くことは極めて困難である。このため同式の τ_*' と τ_* の関係を下に示す (18) 式で近似することとする。この関係式を図示したものが Fig. 2 の一点鎖線の曲線である。

$$\tau_* = 0.90 \left(\frac{D}{d} \right)^{\frac{1}{4}} (\tau_*' - \tau_{*c}) + \tau_*' \quad \dots\dots\dots (18)$$

(b) 砂堆の波形勾配

(18) 式から τ_*' を τ_* で書き表わすと、

$$\tau_*' = \frac{[(\tau_*/\tau_{*c}) + 0.90 (D/d)^{\frac{1}{4}}]}{1 + 0.90 (D/d)^{\frac{1}{4}}} \tau_{*c} \quad \dots\dots\dots (19)$$

(19) 式を (15) 式に代入すると、砂堆の波形勾配は次式で表わされる。

$$\frac{h}{L} = \sqrt{\frac{2}{4.9}} \frac{1}{7.66} \left(\frac{D}{d} \right)^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{(0.90(D/d)^{\frac{1}{4}} + 1) \tau_{*c}}{\tau_* + 0.90 (D/d)^{\frac{1}{4}} \tau_{*c}}} - 1 \quad \dots\dots\dots (20)$$

(20) 式と実験値との比較を、Yalin and Karahan⁹⁾, Fredsøe¹⁰⁾ の曲線とともに Fig. 3 に示してある。

(20) 式は他の 2 式と全体として似たような傾向を示し、最大波形勾配は 3 式ともほぼ同じ値を見積っている。

(c) 掃流砂量

(19) 式を Einstein・Brown の式 (9) 式に代入すると、全掃流力 τ_* に対する掃流砂量式として次の (21) 式が与えられる。

$$\phi = 40 \left(\frac{\tau_* + 0.9 (D/d)^{\frac{1}{4}} \tau_{*c}}{0.9 (D/d)^{\frac{1}{4}} + 1} \right)^3 \quad \dots\dots\dots (21)$$

(21) 式と実験値との比較は Fig. 4 に点線で示すようになり意外なことに実験値とは全く合わない。Fig. 4 の実線のような関係、すなわち式で表示すれば、

$$\phi = 12 \left(\frac{[(\tau_*/\tau_{*c}) + 0.37 (D/d)^{\frac{1}{4}}] \tau_{*c} - \tau_{*c}}{1 + 0.37 (D/d)^{\frac{1}{4}}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \dots\dots\dots (22)$$

なる関係式をうむための $\tau_* \sim \tau_*'$ の関係式を、林・尾崎¹⁴⁾ の式を簡単化した式

$$\phi = 12 (\tau_*' - \tau_{*c})^{\frac{3}{2}} \quad \dots\dots\dots (23)$$

を基として逆算すると、

$$\tau_* = 0.37 \left(\frac{D}{d} \right)^{\frac{1}{4}} (\tau_*' - \tau_{*c}) + \tau_*' \quad \dots\dots\dots (24)$$

あるいは

$$\tau_*' = \frac{[(\tau_*/\tau_{*c}) + 0.37 (D/d)^{\frac{1}{4}}]}{1 + 0.37 (D/d)^{\frac{1}{4}}} \tau_{*c} \quad \dots\dots\dots (25)$$

となり、Fig. 2 の実線のようになるが、これは

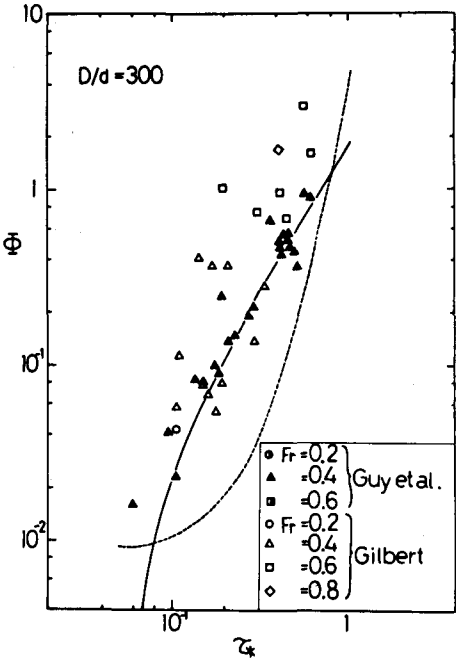


Fig. 4. Plot of normalized bed-load discharge against normalized total shear stress

岸・黒木の式(15)式の砂堆領域ⅠとⅡの両式を曲線でつなげたようなものとなっている。しかし同図にみられるようにこの曲線は Gilbert の実験値とはかなり合っているといえるが、Guy らの実験結果とは非常に合わなくなっており不思議である。

5. 残された問題点

τ' , τ'' , β_B , ϵ , L の 5 個の未知量をとくためには 5 個の式が必要である。この 5 個の式として、一般に承認されていると考えられる 4 個の式(1), (3), (4)および(9)の他に掃流砂のエネルギー方程式(7)式を 5 番目の式として加えて系を閉じ解を求めた。しかし、この掃流砂のエネルギー方程式には物理的にまだ検討の必要が残されているように思われる。ところで、固定した河床波形上の剪断力分布をプレストン管で測定することにより求められている河床波上の τ' についての Ranga Raju の計算式等(7)式に代えて第 5 番目の式として使用することも考えられる。しかし、そのような式の中には β_B の影響を表わす項が直接的には入っていないので、それではこの系の中に β_B は単に τ' の従属変数としてのみ入っていることになり、疑問が残る。

また τ'_* と τ_* との関係を図示した Fig. 2 において、理論式(13)の精度についてはさらに検討が必要であるが、改めて従来の実験値の再整理も必要のように思われる。Fig. 2 と Fig. 4 とを見比べるとき、Fig. 2 における Guy らの τ'_* と τ_* との関係からはこのままでは Fig. 4 の掃流砂量を正しく説明することが難かしいが、その原因を検討中である。なお、掃流砂量式としては今回は Einstein・Brown 式を使ったが、より正しくはこれを改良した林・尾崎の式(23)式を用いて計算する方が良いと考え、この点でも計算を改良してゆきたい。

付記

本研究の遂行に当り、電力中央研究所河川環境研究室尾崎幸男氏および中央大学大学院後期博士課程大西光陽君から有益な討議を受けた。また図面の作成にあたり同大学学部土木工学科学生井上伊佐男、原清高、吉田浩二の 3 君から熱心な協力をえた。記して謝意を表する。

6. 引用文献

- 1) 林泰造・矢内栄二：河床波の Steepness に関する研究，第 3 4 回年次学術講演会講演集第 2 部，1979 年 10 月，pp.187 ~ 188.
- 2) 林泰造・大西光陽：小規模河床波の卓越波数について，第 2 4 回水理講演会論文集，1980 年 2 月。
- 3) Hino, M. : Equilibrium - rangespectra of sand waves formed by flowing water, Jour. Fluid Mech., vol. 34, pp.565 ~ 573, 1968.
- 4) Engelund, F. : Hydraulic resistance of alluvial streams, Jour. Hyd. Div., ASCE, Vol. 92, No. HY2, pp. 315 ~ 326, Mar. 1966.
- 5) Engelund, F. : Closure, Hydraulic resistance of alluvial streams, Jour. Hyd. Div., ASCE, Vol. 93, No. HY4, pp. 287 ~ 296, July, 1967.
- 6) Brown, C.B. : Engineering Hydraulics, edited by H. Rouse, John Wiley & Sons, 1950, pp. 796 ~ 799.
- 7) Gilbert, G.K. : Transportation of debris by running waters, USGS professional Paper 86, 1914.
- 8) Guy, H.P., Simons, D.B., and Richardson, E.V. : Summary of alluvial data from flume experiments, 1956 - 61, USGS Professional Paper 462 - 1, 1966.
- 9) Yalin, M.S. and Karahan, E. : Steepness of sedimentary dunes, Jour. Hyd. Div., ASCE, Vol. 105, No. HY - 4, April, 1979.

- 10) Fredsøe, J. : The friction factor and height - length relations in flow over a dune - covered bed, Prog.Rep. 37, Institute of Hydrodynamics, Technical University of Denmark, Dec, 1975.
- 11) 岸 力・黒木幹男：移動床流れにおける河床形状と流体抵抗(I), 北大工学部研究報告, 1972.
- 12) Kishi, T. : Bed forms and hydraulic relations for alluvial streams, Proc.of U.S.-Japan Binational Seminar on Erosion and Sedimentation, 1978.
- 13) 土木学会水理委員会移動床流れの抵抗と河床形状研究小委員会：移動床流れにおける河床形態と粗度, 土木学会論文報告集第 210 号, 1973 年。
- 14) 林泰造・尾崎幸男：掃流砂量に関する基礎的研究, 第 23 回水理講演会論文集, 1979 年 2 月。
- 15) Vittal, N., RangaRaju, K.G., and Garde, R.J.: Resistance of two dimensional triangular roughness, Jour. Hyd. Res., 15, No. 1, 1977.