

高粘度の振動流中で形成されるサンド・リップルと定常流れ Sand ripples and streaming in the oscillatory viscous flow

九州大学応用力学研究所 正員 ○金子 新

九州大学応用力学研究所 学生員 松永 信博

1. はじめに

作業流体としてグリセリン・水混合液を使用した高粘度の振動流中でサンド・リップルが形成されることが、著者の一人によって最近報告されている。¹⁾ 高粘度の振動流中で形成されるサンド・リップル上には、剝離渦が形成されず代りに層流理論で示される定常流れが形成される。波型底面上の粘性振動流は、Lyne²⁾ によつてはじめて解析され、宇田・日野³⁾ や Sleath⁴⁾ によつてサンド・リップル上の流れに応用され、底面に作用するせん断応力により卓越波長の議論も試みられている。本文は、高粘度の振動流中で定常的に形成された実際のサンド・リップルの波長を、固定波面上の粘性振動流の差分法による数値解析から得られた定常流れの議論によつて決定しようとしたものである。

2. 数値計算

図-1に示されたような直交座標系 (x, y) を用い、時間を t 流関数を Ψ' とする。関係諸量を次のように無次元化する。

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi' / u_{\infty} \delta & \xi &= x/L & \eta &= y/\delta \\ \tau &= \omega t & \delta &= (2\nu/\omega)^{1/2} & \varepsilon &= d_0/L \\ \alpha &= a/\delta & \beta &= L/\delta \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 δ は振動流境界層厚さ、 L は波型底面の波長で ν は作業流体の動粘性係数である。 $u_{\infty}(=d_0\omega/2)$ と ω は $\eta \rightarrow \infty$ における振動流の最大流速と角振動数である。この時、無次元化された二次元渦度方程式は次式で与えられる。

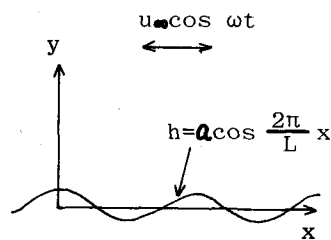


図-1 流れの模式図

$$2 \frac{\partial}{\partial \tau} (\Delta \Psi) - \varepsilon \frac{\partial (\Psi, \Delta \Psi)}{\partial (\xi, \eta)} = \Delta (\Delta \Psi) \quad (2)$$

ここに、 $\Delta = \partial^2 / \partial \eta^2 + 1/\beta^2 \partial^2 / \partial \xi^2$ 。波型底面の形状は次式で与えられる。

$$\eta_0 = \alpha \cos(2\pi\xi) \quad (3)$$

(2), (3) 式より波型底面上の粘性振動流は、三個の無次元パラメータ ε , α , β によつて完全に記述できることがわかる。著者の一人は、 $\varepsilon \ll 1$ の条件のもとで α を微小パラメータとした摂動法により解析を行い、 α の高次項を含む一般表示を得ている¹⁾。この結果 $\beta > 26$ において定常流れは二層構造をもつようになり、 α は二層構造の発生条件にはほとんど影響せず波面の谷の上で上層の渦対を下層の渦対の間に割り込ませるように作用することを報告している。ここでは、二層構造の発生におよぼす ε の影響を調べるため、 α については1次の項までを考慮するような定式化を行う。流関数 Ψ を次のようにおく。

$$\Psi = \Psi_0 + \alpha \phi \quad (4)$$

(4) 式を(2)式に代入して α^1 の項を整理すれば次式を得る。

$$2 \frac{\partial}{\partial \tau} (\Delta \phi) + \varepsilon \left[F \frac{\partial (\Delta \phi)}{\partial \xi} - G \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] = \Delta (\Delta \phi) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに, } F &= \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} = \text{Real} \left[\{ 1 - e^{-(1+i)\eta} \} e^{i\tau} \right] \\ G &= \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial \eta^3} = -\text{Real} \left[2i e^{-(1+i)\eta} e^{i\tau} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

ψ を次のように ε の級数に展開する。

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \psi_m \quad (7)$$

(7) 式を (5) 式に代入すれば ψ_m に対して次式を得る。

$$2 \frac{\partial}{\partial \tau} (\Delta \psi_m) + F \frac{\partial (\Delta \psi_{m-1})}{\partial \xi} - G \frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial \xi} = \Delta (\Delta \psi_m) \quad (m \geq 1) \quad (8)$$

ここで、渦度 Ω_m を導入する。

$$\Delta \psi_m = -\Omega_m$$

(9) 式を (8) 式に代入すれば次式を得る。

$$2 \frac{\partial \Omega_m}{\partial \tau} + F \frac{\partial \Omega_{m-1}}{\partial \xi} + G \frac{\partial \psi_{m-1}}{\partial \xi} = \Delta \Omega_m \quad (m \geq 1) \quad (10)$$

$$\text{ここに, } \psi_0 = \text{Real} \left[\frac{1+i}{\sigma - 2\pi/\beta} (e^{-\sigma\eta} - e^{-2\pi\eta/\beta}) e^{i\tau} \cos 2\pi\xi \right]$$

$$\Omega_0 = -\text{Real} \left[(1+i)(\sigma + 2\pi/\beta) e^{-\sigma\eta} e^{i\tau} \cos 2\pi\xi \right] \quad (11)$$

$$\sigma = \{ (2\pi/\beta)^2 + 2i \}^{1/2}$$

η に関する境界条件は、 $m \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned} \eta = 0 & : \quad \psi_m = 0 & \Omega_m = -\partial^2 \psi_m / \partial \eta^2 \\ \eta \rightarrow \infty & : \quad \psi_m = 0 & \Omega_m = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

ξ に関する周期的境界条件は、 $m \geq 1$ に対して

$$\psi_m(\xi, \eta, \tau) = \psi_m(\xi + 1, \eta, \tau) \quad \Omega_m(\xi, \eta, \tau) = \Omega_m(\xi + 1, \eta, \tau) \quad (13)$$

初期条件は、 $m \geq 1$ に対して

$$\psi_m(\xi, \eta, 0) = 0 \quad \Omega_m(\xi, \eta, 0) = 0 \quad (14)$$

定常流れに対する流関数 ψ_s を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \psi_s^{(p)} &= \frac{1}{2\pi} \int_p^{p+2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(\xi, \eta, \tau) d\tau \\ \psi_s^{(p)} &\longrightarrow \psi_s \quad (p \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (15)$$

Ψ_s によって波型底面上に誘起される壁面せん断応力 $\hat{\tau}_s$ は次式によって与えられる。

$$\hat{\tau}_s = \frac{\tau_s}{\rho u_{\infty} \nu / \delta} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=0} \quad (16)$$

τ_s を, x に関して半波長にわたって積分したものを τ_s^* とすれば,

$$\tau_s^* = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \tau_s \, dx \quad (17)$$

(16) 式を x に関して半波長にわたって積分し(17) 式を代入すれば,

$$\hat{\tau}_s^* = \frac{\tau_s^*}{\rho u_{\infty} \nu} = \beta \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\partial^2 \Psi_s}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=0} \, d\xi \quad (18)$$

$\hat{\tau}_s$ の方向は波面を登る向きであり, $\hat{\tau}_s$ による砂粒子の移動を考慮すればサンド・リップルを発達させるようにはたらく。宇田・日野³⁾ は, $(\hat{\tau}_s)_{\max}$ によってサンド・リップルの卓越波長を議論しようとしたが, リップル表面の砂移動の総量を見積るにはリップルの波長の影響を考慮した $(\hat{\tau}_s^*)_{\max}$ によって卓越波長を議論すべきであろう。

時間, 場所に対してそれぞれ前進, 中央差分をとることにより(10) 式を差分化すれば,

$$\begin{aligned} Q_{mi,j}^{(n+1)} = & \left[1 - \left\{ \frac{1}{(\Delta \eta)^2} + \frac{1}{(\beta \Delta \xi)^2} \right\} \Delta \tau \right] Q_{mi,j}^{(n)} \\ & + \frac{\Delta \tau}{2(\Delta \eta)^2} (Q_{mi,i+1}^{(n)} + Q_{mi,j-1}^{(n)}) + \frac{\Delta \tau}{2(\beta \Delta \xi)^2} (Q_{mi+1,j}^{(n)} + Q_{mi-1,j}^{(n)}) \\ & - \frac{Fi,j^{(\eta)} \Delta \tau}{4 \Delta \xi} (Q_{m-1,i+1,j}^{(n)} - Q_{m-1,i-1,j}^{(n)}) - \frac{Gi,j^{(n)} \Delta \tau}{4 \Delta \xi} (\Psi_{m-1,i+1,j}^{(n)} - \Psi_{m-1,i-1,j}^{(n)}) \end{aligned} \quad (19)$$

ここに, 添字 n と (i, j) はそれぞれ時間の $n \Delta \tau$ と場所 $(i \Delta \xi, j \Delta \eta)$ に対応している。(19) 式の安定条件は,

$$\left\{ \frac{1}{(\Delta \eta)^2} + \frac{1}{(\beta \Delta \xi)^2} \right\} \Delta \tau \leq 1 \quad (20)$$

(9) 式による Ψ_m の算定は, SOR法により次式を繰り返して計算することにより求められる。

$$\begin{aligned} \Psi_{mi,j}^{(n,k+1)} = & \Psi_{mi,j}^{(n,k)} + \frac{w}{2 \left[1 + \left(\frac{\Delta \eta}{\beta \Delta \xi} \right)^2 \right]} \left[\Psi_{mi,j+1}^{(n,k)} + \Psi_{mi,j-1}^{(n,k+1)} \right. \\ & + \left(\frac{\Delta \eta}{\beta \Delta \xi} \right)^2 \{ \Psi_{mi+1,j}^{(n,k)} + \Psi_{mi-1,j}^{(n,k+1)} \} - 2 \left\{ 1 + \left(\frac{\Delta \eta}{\beta \Delta \xi} \right)^2 \right\} \Psi_{mi,j}^{(n,k)} \\ & \left. + (\Delta \eta)^2 Q_{mi,j}^{(n)} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

ここに, w は加速パラメータであり $w = 1.8$ が採用された。添字 k は繰り返し回数を示し, 次の条件を満たすまで反復される。

$$\frac{\max \{ \Psi_{mi,j}^{(n,k+1)} - \Psi_{mi,j}^{(n,k)} \}}{\max \{ \Psi_{mi,j}^{(n,k)} \}} < 10^{-4} \quad (22)$$

$\eta = 0$ における $\mathcal{Q}_m^{(n)}(\xi, 0)$ と $\hat{\tau}_s(\xi, 0)$ は(12), (16)式よりそれぞれ次式のように差分化される。

$$\mathcal{Q}_{mi,1}^{(n)} = -\frac{8\Psi_{mi,2}^{(n)} - \Psi_{mi,3}^{(n)}}{2(\Delta\eta)^2} \quad \hat{\tau}_{si,1} = \frac{8\Psi_{si,2} - \Psi_{si,3}}{2(\Delta\eta)^2} \quad (23)$$

ここで、 $j = 1$ は底面を示し、また $\eta \rightarrow \infty$ の境界条件は波型底面の波長の二倍程度とれば十分であることがわかった。他に定常流れを十分な精度で求めるためには、 $\Delta\eta < 1$ なる条件が課される。

3. 考 察

図-2は、 $\varepsilon = 0.5$, $\beta = 15$ の場合に波型底面上に形成された定常流れの時間的な発達過程を ε^5 の項まで考慮して計算した結果を示している。 $\xi = 0, 1$ は波面の山に $\xi = 0.5$ は谷に対応している。 ξ, η 方向のメッシュ数はそれぞれ11, 31, であった。時間の経過につれ二層構造の渦対が次第に発達し、8周期目でそれらの渦対はほぼ定常状態に達していることがわかる。下層の渦対の回転方向は、波面を登る向きであり、サンド・リップルの発達はこの渦対によって説明できる。 $\varepsilon \ll 1$ とした微小振動の理論¹⁾においては二層構造の発生条件は $\beta > 26$ であるから、 ε の増加により二層構造はより小さな β において発生することになる。図-3は、 $\nu = 1.20 \text{ cm}^2/\text{s}$ のグリセリン・水混合液を作業流体としてU字型振動流水槽¹⁾において実際に形成されたサンド・リップルを示す。サンド・リップル上の流れには剝離渦は存在せず代りに二層構造の定常流れが形成されていることがわかる。この定常流れは、グリセリンと水の密度差を利用したshadow graph 法⁵⁾によって可視化されている。サンド・ベッドとしては、比重2.43, 平均粒径0.034 cmの球形のガラス・ビーズを敷き詰めたものを用いている。無次元パラメータ ε , β はそれぞれ0.6, 18で

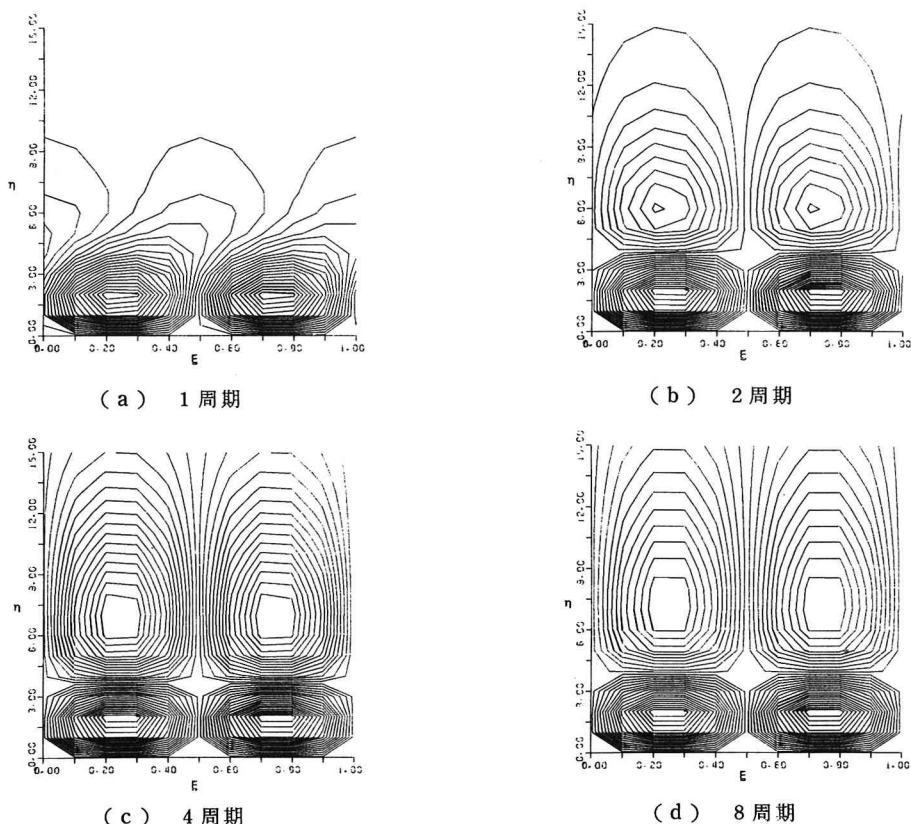


図-2 定常流れの発達過程 ($\varepsilon = 0.5$, $\beta = 15$)

あり、図-2の条件にかなり近いものとなっている。形成される定常流れのパターンも両者でよく一致しており、実際のリップル上の流れを固定波面上の流れでよく近似できることが知られる。

図-4は、 $\varepsilon = 0.3$ において β を種々変えた時の定常流れのパターン変化を示す。計算においては ε^3 の項までが考慮されており、 ξ 、 η 方向のメッシュ数はそれぞれ11、51であった。また、計算は9周期目まで行なわれている。

図-4(a) ($\beta = 15$) において一層であった定常流れが β の増加につれ二層構造に変化していきことが知られる。 $\varepsilon = 0.5$ においては、図-2で

示されたように $\beta = 15$ ですでに二層構造が形成されていたのに、 $\varepsilon = 0.3$ においては図-4(b) ($\beta = 18$) になるまで二層構造にならない。図-5(a)は、微小振動の理論¹⁾によって α^7 の項まで計算した $\hat{\tau}_s^*$ の値を示している。どの α に対しても $\hat{\tau}_s^*$ の値は β とともに増加し、(↓)印で示された二層構造の発生位置あたりでその増加は鈍り、 $\beta = 3.2$ で最大値に達している。二層構造の発生位置および $(\hat{\tau}_s^*)_{\max}$ の位置は α にはほとんど依存していないことが知られる。同図には $\alpha = 0.1$ に対する数値計算結果も示されているが、よく理論値に一致している。図-5(b)は、数値計算によって得られた $\hat{\tau}_s^*$ の値を ε をパラメータとして示している。二層構造および $(\hat{\tau}_s^*)_{\max}$ の発生位置は、 ε の増加につれ漸次 β の小さい方向に移動していくことがわかる。 $(\hat{\tau}_s^*)_{\max}$ は、サンド・リップルの最大の発達率を与え観測されるリップルに対応しているものと考えられる。また、 $(\hat{\tau}_s^*)_{\max}$ の存在は、二層構造の発生と密接に関連しているようだ。二層構造および、 $(\hat{\tau}_s^*)_{\max}$ の発生位置は、ここで考えている領域に対してそれぞれ次式によって良く近似できる。

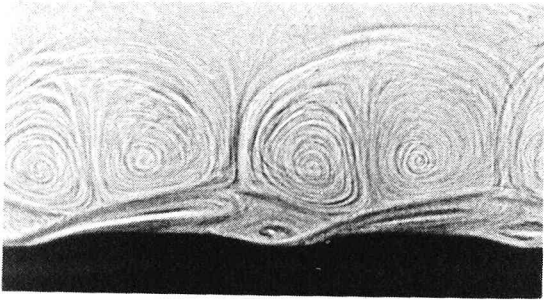
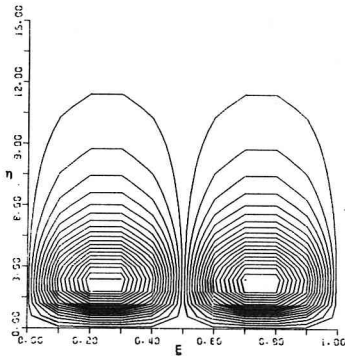
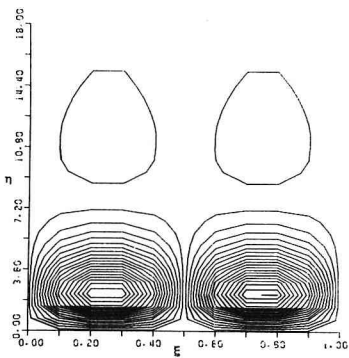


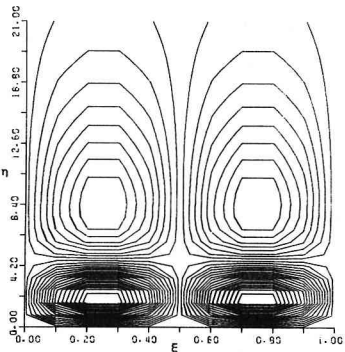
図-3 サンド・リップルと定常流れの可視化
($\varepsilon = 0.6$, $\beta = 18$, $\alpha = 0.6$)



(a) $\beta = 15$



(b) $\beta = 18$



(c) $\beta = 21$

図-4 種々の β に対する定常流れ ($\varepsilon = 0.3$)

$$\frac{L}{d_0} = \frac{3.92}{(d_0/\delta)^{1.48}} \quad (24)$$

$$\frac{L}{d_0} = \frac{6.00}{(d_0/\delta)^{1.65}} \quad (25)$$

図-6は、作業流体の粘性を種々変えて実際に形成された、パーティクル・ウェーブ⁶⁾とサンド・リップルの測定例を示す。ただし砂層の流動の著しい sheet flow に近い状態のリップルは除外されている。横軸の $d_0/\delta (= \varepsilon\beta)$ は、滑らかな平板上の粘性振動流に対する Reynolds 数とも解釈でき、 $d_0/\delta < 10$ の領域で、測定値は (21) および (22) 式のどちらにも良く一致している。 d_0/δ が増加するにつれ、測定値は計算値より大きくなり始めるが、これは剥離渦の発生と関係しているようだ。

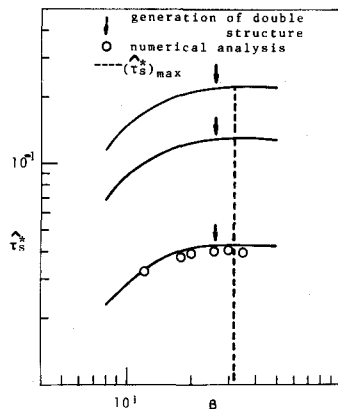
4. おわりに

固定波面上の粘性振動流を数値解析し壁面せん断力を議論することによって、 $d_0/\delta < 10$ の領域で形成されるサンド・リップルの波長を説明することができた。 d_0/δ がより大きくなり剥離渦が発生しはじめる領域へこの種の計算を拡張することが今後の課題である。

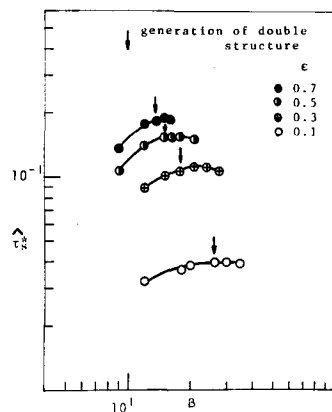
最後に、実験および図面作成を援助された本研究所技官白石洋二氏に心から謝意を表します。なお、数値計算は本研究所の Melcom-Cosmo 900 を使用して行なわれた。

参考文献

- 1) Kaneko, A. & Honji, H. (1979)
J. Fluid Mech., Vol. 93, 727-736.
- 2) Lyne, W. H. (1971)
J. Fluid Mech., Vol. 50, 33-48
- 3) 宇田・日野(1975) 土木学会論文報告集,
第237号, 27-36
- 4) Sleath, J. F. A. (1976) J.
Hydraulic Res., Vol. 14, 69-81
- 5) Hino, M. & Fujisaki, H. (1977)
Int. Symp. on Flow Visualization,
Tokyo, 229-234.
- 6) Kaneko, A. & Honji, H. (1979)
Sedimentology, Vol. 26, 101-113.



(a) 微小振動理論 ($\varepsilon = 0.1$)



(b) 数値計算 ($\alpha = 0.1$)

図-5 $\hat{\tau}_s^*$ の算定

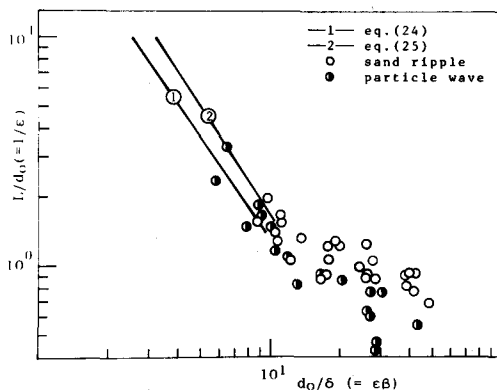


図-6 サンド・リップルの波長