第24回水理講演会論文集　1980年2月

利水用貯水池における期間長特性の確率行列による推算
Estimation of first passage time in a reservoir for water supply by stochastic matrix

名古屋工業大学　正会員　長尾　正志
同大学院　学生員　梶間津洋志

1. 貯水池利用における期間長の特性解析

貯水池の治水・利水機能の評価や効率的運用には、目標とされた放流量がどの程度充足できるという量的側面と同時に、現在の貯水量状態に基づいて、何時の時点から目標が充足されなくなるかといった時間的側面もまた重要である。とくに後者は、続発する治水・利水上の警戒期を予想した比較的短期間における貯水池操作法の基礎資料となろう。

本研究は、任意の初期貯水量から出発し、出水期において洪水調節が無効に、あるいは渇水期に目標放流量の確保が不可能、ないし、そうした危険の考えられるある貯水量水準に到達する期間長の確率特性を、理論的・実証的に明確にすることを目的とした。その確率特性としては、今後予想される流量分布特性やあらかじめ設定された貯水池容量、目標放流量の下に、平均値、分散などの具体的な形で推定する手法を提示した。

数学的には、有限マルコフ連鎖を構成する貯水量系列が推移確率行列で表式化される形で理論を展開する。さらに、実際の計算には、電算を利用した行列演算を充てる。

1.1　従来の解析動向

上記の期間長の確率特性の推定は、従前には既往流量時系列による数値的・実証的検討に頼る以外では、ほとんど解析手段を持たなかったようである。しかし、1950年代末のMoranに始まるstochastic reservoir theoryの中で、いわゆるfirst passage time（初めて到達するまでの時間）の問題として、Weesakul[1]，Prabhu[2]らによって、独立流量系列の前提の下に、理論展開が始められた。最近では、相関流量系列に対する試みもみられる[3]がまだその成果は甚だ不満足なものである。

たとえば、その代表はPhatarfod，Mardia[4]による研究であるが、それも流量の存在範囲が0，1，2の3つの状態、および目標放流量が単位量というごく簡単な場合に過ぎず、しかも、期間長分布の直接的表現ではなく、その確率母関数の形での理論解しか得られていない。

もちろん、こうした手法も順次拡張を進めれば、理論的取扱いも不可能ではないと思えるが、上述のごとく単純な場合の解でさえも極めて複雑で、具体的な平均、分散などを得るには、さらに微分操作が要求されることからも、現状では、相関流量の扱いは、まだまだ実用化に遠いといわざるを得ない。そこで、以後では独立流量系列による解析を考えている。

2. 期間長の確率特性の確率行列による推算

2.1　基礎仮定

以下のような記号および仮定を使う。X_n：期間〔n，n＋1）（n＝0，1，2，・・・）での総流量、Z_n：時点nの直前の貯水量、k，m：有効貯水容量、目標放流量

さて、貯水池では、単位期間内でなるべく貯留し期末に目標放流量を満足するように放流すれば（いわゆる流量予測を考えないMoran流の放流操作によれば）、貯水量方程式は次式で与えられる。

$$Z_{n+1}=\min(k,\ Z_n+X_n)-\min(m,\ Z_n+X_n) \tag{1}$$

貯水池への流入流量は、独立系列かつ同一の離散分布　$\Pr\{X_n=j\}=g_j$　（j＝0，1，2・・・）に従うとする。これより、貯水量の移行は、（推移）確率行列

$$P = (p_{ij}) = \Pr\{Z_{n+1} = j \mid Z_n = i\} \tag{2}$$

による。とくに、そのi行ベクトルは、

$$p_i = (G_{m-i},\ g_{m-i+1},\ g_{m-i+2},\ \cdots,\ g_{m-i+j},\ \cdots,\ g_{k-i-1}, h_{k-i}) \tag{3}$$

である。ただし、$G_i = \Sigma_{j=0}^{i} g_j$ ， $h_i = \Sigma_{j=i}^{\infty} g_j$ （$i \geq 0$），または添字 i ，j の存在範囲は，1 ，2 ，⋯ ，k－m および g_i ，G_i ，h_i で添字が負のものはすべて零の値をとる。

ここで、ある初期貯水量から始まって、最初にある危険な貯水量状態に到達するまでの経過時間について考察する。ところで、貯水池問題で、最も危険と目される貯水量状態に、迎洪水期において貯水池が満水になり以後の洪水制御が不可能になる場合と、迎渇水期において空水になり以後の放流需要の充足が不可能になる場合が挙げられる。以下、これらの両方について順を追って説明する。

2.2 満水に至る期間長の特性

1）満水に至る期間長の定義

以下、k－mをsと略記するとし、満水に至る期間長を、初期貯水量 $Z_0 = i$（$0 \leq i \leq s-1$）の下で満水に至る期間長 T_{is} として、次式で定義する。

$$T_{is} = \min\{n \mid Z_n = k-m \cap Z_0 = i\} \tag{4}$$

したがって、Tis の確率分布はつぎのように書ける。

$$f_{is}^{(n)} = \Pr\{T_{is} = n\}$$

$$= \Pr\{Z_r < s \ (r = 1, 2, \cdots, n-1) \cap Z_n = s \mid Z_0 = i\} \ (n \geq 1) \tag{5}$$

具体的に、$f_{is}^{(n)}$ は以下のように流量分布と関連づけられる。

$$\left.\begin{aligned} f_{is}^{(1)} &= p_{is} = h_{k-i} \\ f_{is}^{(n)} &= \Sigma_{j=0}^{s-1}\ p_{ij}\cdot f_{js}^{(n-1)} \\ &= G_{m-i}\cdot f_{0s}^{(n-1)} + \Sigma_{j=1}^{s-1}\ g_{m-i+j}\cdot f_{js}^{(n-1)} \quad (n \geq 2) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

2）満水に至る期間長の分布

もとの確率行列Pの i ＝ s ，j ＝ s に対する行、列を除外した行列（満水でない貯水量状態から満水でない貯水量状態への移行を表わす確率行列）をΔと記す。

つぎに、$f_{is}^{(n)}$ を要素とする列ベクトルを $\omega^{(n)}$ と書く。すなわち、

$$\omega^{(n)} = (f_{0s}^{(n)},\ f_{1s}^{(n)},\ \cdots,\ f_{is}^{(n)},\ \cdots,\ f_{s-1\,s}^{(n)})^t \tag{7}$$

ただし、A^t はAの転置行列であり、また、以下のように $\omega^{(1)}$ を ω と略する。

$$\omega^{(1)} = (h_k,\ h_{k-1},\ \cdots,\ h_{k-i},\ \cdots, h_m)^t \equiv \omega \tag{8}$$

この ω は、初期の非満水状態から満水状態への移行を表わす確率列ベクトルである。

このとき、簡単な演算によって、

$$\omega^{(n)} = \Delta\cdot\omega^{(n-1)} = \Delta^{n-1}\cdot\omega \quad (n \geq 1) \tag{9}$$

ただし、Δ^{n-1} は行列としての（n－1）乗の積で、

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= (\delta_0,\ \delta_1,\ \cdots,\ \delta_i,\ \cdots,\ \delta_{s-1})^t \\ \delta_i &= (G_{m-i},\ g_{m-i+1},\ g_{m-i+2},\ \cdots,\ g_{m-i+j},\ \cdots,\ g_{k-i-1}) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

および $\Delta^0 = I$（単位行列）と定義しておく。これより初期貯水量 i（≒ s）より出発して満水に至る期間長nの分布は次式で求められる。

$$f_{is}^{(n)} = \delta_i\cdot\Delta^{n-2}\cdot\omega \quad (n \geq 2) \tag{11}$$

したがって、$f_{is}^{(n)}$ の時間的推移は Δ^{n-2} で特性づけられることが分る。

3) 満水に至る期間長の平均、分散

まず、T_{is} の確率母関数(p. g. f.)を行列Δを使って表現すると、若干の演算によって、次式が得られる。

$$G_i(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_{is}^{(n)}\cdot z^n = f_{is}^{(1)}\cdot z+\sum_{n=2}^{\infty} f_{is}^{(n)}\cdot z^n$$
$$= h_{k-i}\cdot z + z^2\cdot\delta_i\cdot(I-z\Delta)^{-1}\cdot\omega \tag{12}$$

ただし、A^{-1} はAの逆行列である。

i) 平　均　値

T_{is} の平均値は、p・g・f・の定義より、次式で求められる。

$$E\{T_{is}\}=[dG_i(z)/dz]_{z=1}\equiv G_i'(1) \tag{13}$$

そこで、上式右辺で、逆行列の微分を要するが、これには、$dA^{-1}/dz=-A^{-1}\cdot(dA/dz)\cdot A^{-1}$ が用いられる[5)]。すなわち、

$$G_i'(z)=h_{k-i}+2z\delta_i(I-z\Delta)^{-1}\omega+z^2\ \delta_i(I-z\Delta)^{-1}\Delta(I-z\Delta)^{-1}\ \omega \tag{14}$$

より、平均値は結局次式で求められる。

$$E\{T_{is}\}=h_{k-i}+2\delta_i(I-\Delta)^{-1}\ \omega+\delta_i(I-\Delta)^{-1}\ \Delta(I-\Delta)^{-1}\ \omega \tag{15}$$

ii) 分　　散

前と同様に表記すると、期間長の分散は次式から求められるはずである。

$$V\{T_{is}\}=E\{T_{is}{}^2\}-[E\{T_{is}\}]^2$$
$$=G''_i(1)+G''_i(1)-\{G''_i(1)\}^2 \tag{16}$$

これに(14)式を代入すれば、結局、次式のように分散が表記される。

$$V\{T_{is}\}=h_{k-i}(1-h_{k-i})+4(1-h_{k-i})\delta_i(I-\Delta)^{-1}\Delta(I-\Delta)^{-1}\omega$$
$$+(5-2h_{k-i})\delta_i(I-\Delta)^{-1}\Delta(I-\Delta)^{-1}\ \omega$$
$$-[\delta_i\{2(I-\Delta)^{-1}+(I-\Delta)^{-1}\Delta(I-\Delta)^{-1}\}\omega]^2 \tag{17}$$

さらに、高次の統計量(たとえば歪係数など)も、同様な手順を繰り返せば容易に求められるが、紙数の関係上省略しておく。

2.3　渇水に至る期間長の特性

1) 期間長の分布

同様の手法を、貯水池の水量が空になりもはや下流への放流供給が難しい期間長について適用する。簡単に結果のみを記す。[6)]

$Z_0=i\ (1\leq i\leq s)$ の初期貯水量より出発して渇水に至る期間長を

$$T_{i0}=\min\{n\mid Zn=0\cap Z_0=i\} \tag{18}$$

と定義すれば、その確率分布はつぎのように書ける。ただし、$n\geq 1$,

$$f_{i0}^{(n)}=\Pr\{T_{i0}=n\}$$
$$=\Pr\{Zr>0\ (r=1,2,\cdots,n-1)\cap Zn=0\mid Z_0=i\} \tag{19}$$

これより、その時間的移行はつぎのように表現できる。

$$f_{i0}^{(n)}=\gamma_i\Gamma^{n-2}\phi\qquad(n\geq 2),\ f_{i0}^{(1)}=G_{n-i} \tag{20}$$

ここで、Γ はPの $i=0$, $j=0$ に対応する行、列を除外した行列、および

$$\left.\begin{aligned}\gamma_i&=(g_{m-i+1},g_{m-i+2},\cdots,g_{k-i-1},h_{k-i})\\ \phi&=(G_{m-1},G_{m-2},\cdots,G_0,0,\cdots,0)^t\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

2) 期間長の平均、分散

それぞれ、以下のようになる。

$$E\{T_{i0}\}=G_{m-i}+2\gamma_i(I-\Gamma)^{-1}\phi+\gamma_i(I-\Gamma)^{-1}\Gamma(I-\Gamma)^{-1}\phi$$
$$V\{T_{i0}\}=G_{m-i}(1-G_{m-i})+4(1-G_{m-i})\gamma_i(I-\Gamma)^{-1}\Gamma(I-\Gamma)^{-1}\phi$$

$$+(5-2G m i)\gamma_i(I-\Gamma)^{-1}\Gamma(I-\Gamma)^{-1}\phi$$

$$-[\gamma_i\{2(I-\Gamma)^{-1}+(I-\Gamma)^{-1}\Gamma(I-\Gamma)^{-1}\}\phi]^2 \tag{22}$$

2.4　任意の貯水量変化に対する期間長の特性

上述の方式は、任意の貯水量状態を出発点とした満水または空水といった、いわば貯水池の治水・利水への本質的な貯留・放流機能が期待できない事態に至るまでの期間についての考察結果であった。しかし、現実の貯水池操作では、このような最悪事態に到達する以前に、たとえば、洪水警戒期に予備放流を実施して貯水量を満水位以下に保つとか、渇水を警戒して給水制限を課して目標放流量を削減させて貯水量の余裕を少しでも残すように努力するであろう。したがって、これらを総合して、より一般的に、任意の初期貯水量 i から出発して、始めて任意の貯水量 j（出水期には $i<j$，渇水期には $i>j$）に到達する期間長 T_{ij} を考察の対象としよう。

さて、数学的にいって、いまの貯水量過程は、状態数が有限な非周期で既約（どの状態からどの状態への移行も可能）なマルコフ連鎖であるから、T_{ij}の平均や分散が必ず存在することが知られている。この一般的表現は、有限マルコフ連鎖についての行列演算によって行なわれる[7]。ここでは、簡単に、以後の計算に必要な結果のみを、貯水量の定常分布の導出を基礎として記述する。

1）貯水量の定常分布

貯水量の定常分布を、確率ベクトルとして $u=(u_0, u_1, \cdots, u_s)$ とすれば、u は次式を満足しなければならない。　　$(s\equiv k-m)$

$$u\cdot P=u,\quad \sum_{i=0}^{s} u_i=1 \tag{23}$$

上式の内容を満足する u は以下のようにして求められる。

まず、I を P と同じ次元の正方単位行列とし、$I-P$ で作られた行列の最後の列に 1 を代入した行列 S，および行ベクトルとしての $s+1$ 次の零ベクトルの最後の要素に 1 を代入したベクトル w を使うと、次式で u は計算できる。

$$u=w\cdot S^{-1}\quad (S^{-1}:S\text{の逆行列}) \tag{24}$$

2）期間長の平均と分散

期間長 T_{ij} の平均、分散の行列をそれぞれつぎのように M，V で定義する。

$$M\equiv(E\{T_{ij}\}),\quad V\equiv(E\{T_{ij}^2\}-E^2\{T_{ij}\}) \tag{25}$$

さらに、期間長の二乗を意味する行列 $W=(E\{T_{ij}^2\})$ を使うと、分散行列 V はつぎのように表現できる。

$$V=W-M_{sq}\quad (M_{sq}=(E^2\{T_{ij}\})) \tag{26}$$

ただし、M_{sq} は平均行列 M の各要素の平方を要素とする行列である。

まず平均行列 M は次式で与えられる。

$$M=(I-Z+J\cdot Z_{dg})D,\quad Z\equiv(I-P+U)^{-1},\quad U\equiv u^t \tag{27}$$

ここで、Z は、確率行列 P で決定されたマルコフ連鎖に対する基本行列といわれる。また、J は、そのすべての要素が 1 の $s+1$ 次の正方行列、つぎに Z_{dg} は、Z の対角線要素をその対角線要素とするが、それ以外の要素はすべて零である正方行列（対角行列）、および、$D=(d_{ij})$ は、その対角線要素が $d_{ii}=1/u_i$ $(i=0, 1, \cdots, s)$ であるが、それ以外の要素はすべて零の対角行列である。

つぎに、以上によって平均行列 M が計算できれば、分散行列 V は次式の行列 W から、（26）式により求められる。

$$W=M(2Z_{dg}\cdot D-I)+2\{ZM-J\cdot(ZM)_{dg}\} \tag{28}$$

ただし、$(ZM)_{dg}$ は、行列の積 ZM の対角線要素をその対角線要素とし、他の要素はすべての零である対角行列である[8]。

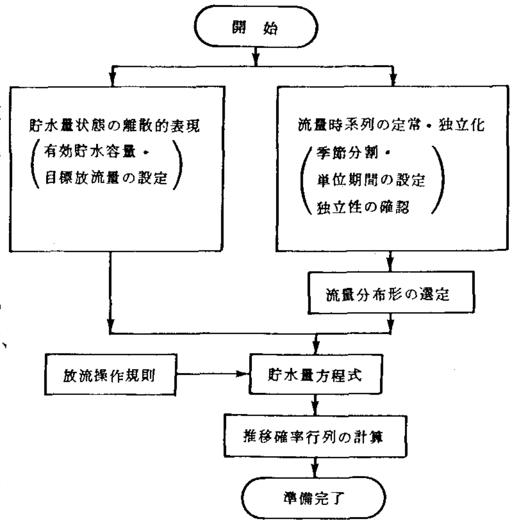
ところで、従来このような行列演算は、その煩雑さのために、とかく敬遠され勝ちであった。しかし、最

近の電算の進歩は目覚ましく、とくに BASIC 語の機種では、配列の四則演算、行列の乗算、逆行列、転置行列、単位行列化、初期値設定などの機能が具備され、計算が迅速・容易に実施できるようになった。

3. 適用計算

3.1 基礎条件の整備

計算を行なうに際しての基礎の諸条件の整備手順を、推移確率行列の導出という形で図－1に示す。これらの詳細は文献[9]を参照されたい。

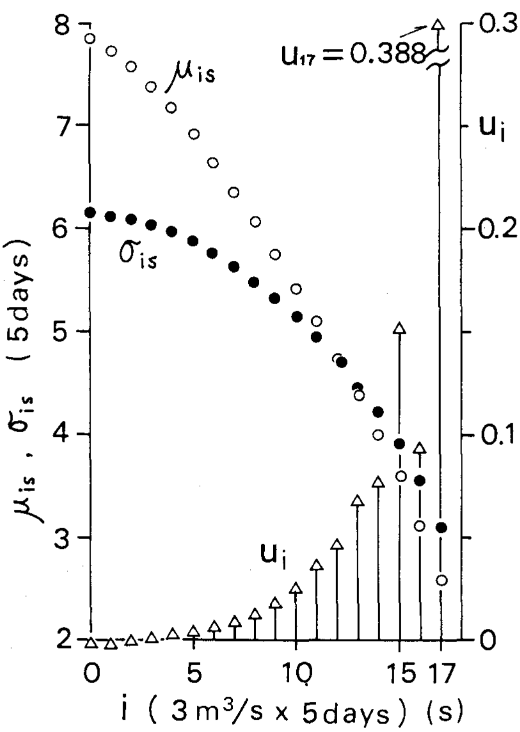


図－1　推移確率行列の計算

3.2 適　用　例

理論を、四国銅山川水系、柳瀬ダム（集水面積約 146 ㎢、年雨量約 1,900 ㎜、総貯水容量 3,200 万㎥）の日流量データ（1954～1962）を使って、検討した。なお、この流域の季節区分は、ほぼ冬期（11～2月）、春期（3～5月）、梅雨期（6～7月）、台風期（8～10月）とした。単位期間を 5 day，水量単位を 3 ㎥／s × 5 day，有効貯水容量 $k = 20$，目標放流量 $m = 3$、したがって貯水量上限 $s = k - m = 17$ とする。流量分布には、対数正規分布に近い経験分布を採用した。

まず、図－2は、台風期で初期貯水量 i に始まり満水に至る期間長の平均 μ_{is}，標準偏差 σ_{is} を、貯水量の定常分布 u_i とともに示す。このように、i が満水に近いほど、より早くまた確実に満水に至る模様が読みとれる。

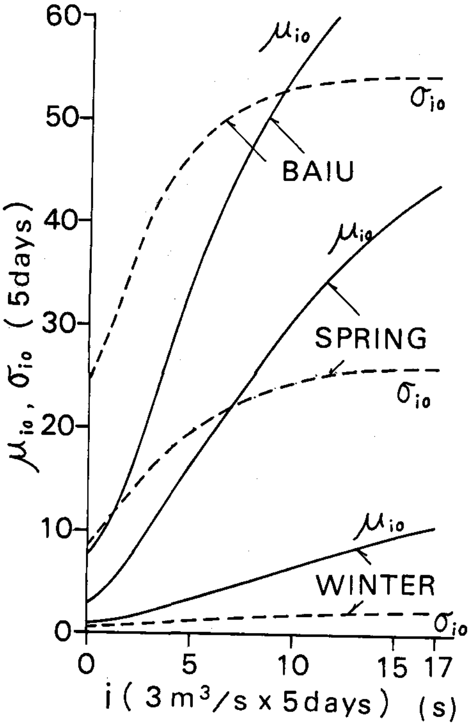


図－2　台風期の貯水量定常分布、満水に至る期間長の平均、標準偏差

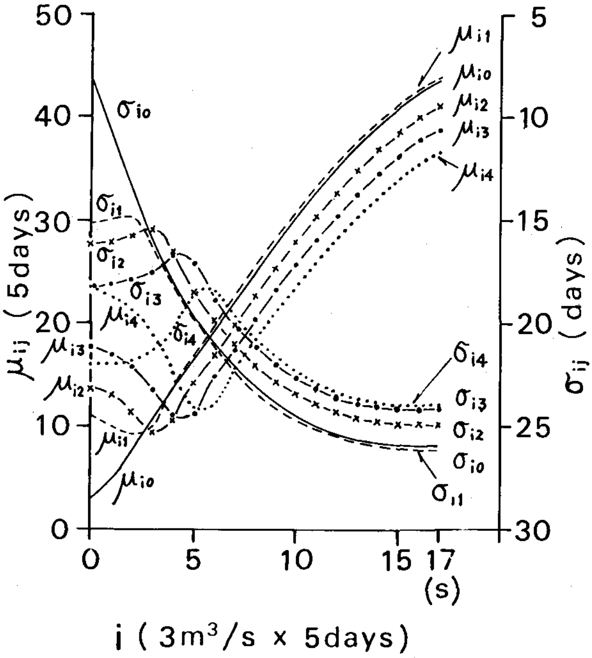
図－3は、各季節の渇水に至る期間長の同様な特性で、冬、春、梅雨期の順で渇水が起り難くなることが分る。

図－4は、春期で、空水に近い貯水量状態に至る期間長の特性である。最終貯水量 j が空水状態より離れるにつれて、j に至る期間長 T_{is} の平均や標準偏差が最小となる初期貯水量 $i = i_m$ について、$i_m > j$ かつ差（$i_m - j$）が次第に増加してくる。その理由は、春期では、平均流入量が採用した目標放流量に比して若干少なく、したがって、概括的にいって、貯水量の純増分が負となり、貯水量変化は減少傾向にあるからと考えられる。

最後に、本研究は昭和54年度文部省科研費・一般研究(C)の援助を受けたことを記しておく。



図－３　冬、春、梅雨期の渇水に至る期間長の平均、標準偏差



図－４　春期の空水に近い貯水量状態に至る期間長の平均、標準偏差

参考文献

1) B. Weesakul : First emptiness in a finite dam, J. R. Statist . Soc., B23, 1961, pp. 343~351

2) N. V. Prabhu : Time dependent results in a storage theory, J. Appl. Prob., vol. 1, 1964, pp. 1～46

3) J. Gani : A note on the first emptiness of dams with Markovian inputs, J. Math. Anal. & Appl., vol. 26, 1969, pp. 270～274

4) R. M. Phatarfod & K. V. Mardia : Some results for dams with Markovian inputs, J. Appl. Prob., vol. 10, 1973, pp. 166～180

5) 北川敏男編：多変量解析論、共立出版、p. 114

6) 長尾正志・梶間津洋志：貯水池で水不足に至る期間長の確率的特性の推定、第34回土木学会年次講演会概要、Ⅱ, 1969, pp. 9～10

7) たとえば、J. G. Kemeny & J. L. Snell : Finite Markov chains, Springer-Verlag, 1976, pp. 79～83

8) これらの証明は、たとえば、北川敏男編：マルコフ過程、共立出版、1967, pp. 37～39

9) 長尾正志：利水用貯水池の取水機能の信頼性評価に関するマルコフ連鎖理論の応用、水理講演会論文集、22回、1978, pp. 135～137