

遅延相関法による非線型流出核の同定法の一般化について

Generalization of the Identification Theory of Non-linear Runoff Kernels
by Cross-correlation山梨大学工学部 正員 ○砂 田 憲 吾
東京工業大学工学部 正員 日 野 幹 雄

1 はじめに

降雨-流出系はしばしば強い非線型性を示す。その非線型性は、確率統計的手法に基づいて non-parametric に表現される流出核によって有効に理解・評価し得る。非線型系からの出力の一般的表示に Volterra series があるが、入力に白色ガウス雑音とみなせる場合には Wiener-Hermite 展開された series を用いるのが都合がよく、その Wiener の核については Lee and Schetzen¹⁾, Hino²⁾らにより遅延相関を用いた同定法が得られている。ところが、実際の降雨-流出系では入力(降雨)は一般に非ガウス分布であり、本論文ではこの点を考慮して遅延相関法による Volterra 核の同定法を得ようとするものである。

以上の目的のために筆者らは先に、入力が非ガウス分布でかつガウス分布からのズレの小さい場合について遅延相関法を拡張する方法を発表している³⁾。その際には入力分布の歪みに関する補正係数を用いたが、その後、補正係数の意味を入力分布についての高次のモーメントで説明した⁴⁾。Volterra series に遅延相関法を応用する場合、Wiener series の核の同定法(通常法)とは異なり流出核が陽に記述されない形式となる。本論文では何ら特別な係数等を導入することなしに妥当な同定法を得るための検討を加えた。実流域データによれば入力分布の3次、4次モーメントは極めて大きい。これに対して、歪みの十分大きくない場合を扱った文献⁴⁾のように、通常法による核を1次近似として iteration すると歪みに関する修正項が効いて解(核)が発散することもある。ここでは、出力の平均値に関する線型核および非線型核の対称軸に沿う積分値の条件、を用いて iterationを進めることを試みた。

2 理 論

1) Volterra series による表示

いま、ある非線型系における入力、出力をそれぞれ $x(t)$, $y(t)$ とすれば、系が時間不変であるとき出力 $y(t)$ は Volterra series により次のように表わされる。

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int \cdots \int_{(n)} K_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \prod_{k=1}^n x(t-\tau_k) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_n \quad (1)$$

本論文では、式(1)を2次の項で打ち切って議論を進める。3次以上の項がある場合も同一の方法で高次核の同定が考えられるが、降雨-流出系では2次項までで実用上十分の精度の得られることが知られている^{5,6)}。

2) 入出力の平均

$x(t)$ を確率分布が非負非ガウス分布片振れのランダム変数とし、その平均を $\bar{x}$ と表して式(2)のようにおく。

$$x(t) = \bar{x}(t) + x'(t) = \bar{x} + x'(t) \quad (2)$$

ここに、 $x'(t)$ は白色雑音とみなせるものとする。

いま、入力がないとき、出力も零である条件から $K_0 \equiv 0$ とする。また、定常入力に対する出力を $\bar{x}_y$ と定義し、式(2)を2次の項まで考慮した式(1)に代入して書き直せば、次式ようになる。

$$y(t) = \bar{x}_y + y'(t) \quad (3)$$

ここに、

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_x \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau_1) d\tau_1 + \varepsilon_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} y'(t) = & \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau_1) x'(t-\tau_1) d\tau_1 + 2\varepsilon_x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau_1, \tau_2) x'(t-\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau_1, \tau_2) x'(t-\tau_1) x'(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (5)$$

$\overline{x'(t)} = 0$ を考慮すれば、式(5)より $y'(t)$ の平均は式(6)のようになる。

$$\overline{y'(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau_1, \tau_2) \overline{x'(t-\tau_1) x'(t-\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 = k_2 \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau_1, \tau_1) d\tau_1 \quad (6)$$

ここに、

$$k_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x'(t) x'(t-\tau)} d\tau \quad (7)$$

さて、 $y'(t)$ をあらためて、その平均 $\overline{y'(t)}$ と $y''(t)$ に分離して表わす。

$$y'(t) = k_2 \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau_1, \tau_1) d\tau_1 + y''(t) \quad (8)$$

すなわち、出力 $y(t)$ の平均 ε_y は次式で示される。

$$\overline{y(t)} = \varepsilon_y = \varepsilon_x \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau_1) d\tau_1 + \varepsilon_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + k_2 \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau_1, \tau_1) d\tau_1 \quad (9)$$

式(9)は ε_y が ε_x (平均入力) だけでなく、 k_2 (入力の 2 次モーメント) にも関係することを示し、これは線型系にない性質である。入出力データが与えられた場合には、平均値からの変動は容易に得られるので、 $\overline{y}$ からのズレ y'' を次式で定義しておく。

$$y''(t) = y(t) - \overline{y(t)} = y'(t) - k_2 \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau_1, \tau_1) d\tau_1 \quad (10)$$

3) 流出核

1 個および 2 個の遅延回路系からの出力を $x'(t-\sigma_1)$ および、 $x'(t-\sigma_1)x'(t-\sigma_2)$ とする。それぞれについて $y'(t)$ との積の平均をとる。

まず、

$$\begin{aligned} \overline{y'(t) x'(t-\sigma_1)} = & \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau_1) \overline{x'(t-\tau_1) x'(t-\sigma_1)} d\tau_1 + 2\varepsilon_x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau_1, \tau_2) \overline{x'(t-\tau_1) x'(t-\sigma_2)} d\tau_1 d\tau_2 \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau_1, \tau_2) \overline{x'(t-\tau_1) x'(t-\tau_2) x'(t-\sigma_1)} d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (11)$$

同様に、

$$\begin{aligned} \overline{y'(t) x'(t-\sigma_1) x'(t-\sigma_2)} = & \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau_1) \overline{x'(t-\tau_1) x'(t-\sigma_1) x'(t-\sigma_2)} d\tau_1 + 2\varepsilon_x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau_1, \tau_2) \overline{x'(t-\tau_1) x'(t-\sigma_2)} \\ & \cdot \overline{x'(t-\sigma_1) x'(t-\sigma_2)} d\tau_1 d\tau_2 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\tau_1, \tau_2) \overline{x'(t-\tau_1) x'(t-\tau_2) x'(t-\sigma_1) x'(t-\sigma_2)} d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、入力 x' に関する 2 次、3 次、4 次のモーメントは次のように表わされる。

$$\overline{x'(t-\tau_1) x'(t-\sigma_1)} = k_2 \cdot \delta(\tau_1 - \sigma_1) \quad (13)$$

$$\overline{x'(t-\tau_1) x'(t-\sigma_1) x'(t-\sigma_2)} = k_3 \cdot \delta(\tau_1 - \sigma_1, \tau_1 - \sigma_2) \quad (14)$$

$$\overline{x'(t_1)x'(t_2)x'(t_3)x'(t_4)} = (k_2)^2 [\delta(t_1-t_2)\delta(t_3-t_4) + \delta(t_1-t_3)\delta(t_2-t_4) + \delta(t_1-t_4)\delta(t_2-t_3) + T \cdot \mu(t_1-t_2, t_1-t_3, t_1-t_4)] \quad (15)$$

ここに、 $\theta(\sigma_1, \sigma_2)$ 、 $\mu(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ は $\delta(\sigma)$ の拡張であって次の性質をもつ。

$$\theta(\sigma_1, \sigma_2) \Big|_{\sigma=0}^{\infty} \quad (\sigma_1 = \sigma_2 = 0) \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 = \delta(\sigma_2) \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 = 1$$

$$\mu(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \Big|_{\sigma=0}^{\infty} \quad (\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0) \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) d\sigma_1 = \theta(\sigma_2, \sigma_3)$$

また、

$$k_3 = \int \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x'(t)x'(t-\sigma_1)x'(t-\sigma_2)} d\sigma_1 d\sigma_2 \quad , \quad T = \frac{k_4}{(k_2)^2} - 3$$

$$k_4 = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x'(t)x'(t-\sigma_1)x'(t-\sigma_2)x'(t-\sigma_3)} d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3$$

以上を考慮して、式 (10) , (11) , (12) より計算の結果、式 (16) , (17) を得る。

$$\overline{y''(t)x'(t-\sigma_1)} = k_2 [K_1(\sigma_1) + 2\mathcal{E}_x \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\sigma_1, \tau_2) d\tau_2 + \frac{k_3}{k_2} K_2(\sigma_1, \sigma_1)] \quad (16)$$

$$\overline{y(t)x'(t-\sigma_1)x'(t-\sigma_2)} = 2(k_2)^2 K_2(\sigma_1, \sigma_2) \quad (17)$$

ただし、

$$\widetilde{y}(t) = y''(t) - \left(\frac{k_3}{k_2}\right) K_1(\sigma_1) - 2\mathcal{E}_x \left(\frac{k_3}{k_2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\sigma_1, \tau_2) d\tau_2 - k_2 T \cdot K_2(\sigma_1, \sigma_1) \quad (18)$$

結局、線型および非線型核は式 (19) , (20) で与えられる。

$$K_1(\sigma_1) = \frac{1}{k_2} [\overline{y''(t)x'(t-\sigma_1)} - 2\mathcal{E}_x k_2 \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\sigma_1, \tau_2) d\tau_2 - k_3 K_2(\sigma_1, \sigma_1)] \quad (19)$$

$$K_2(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2 \cdot (k_2)^2} \overline{\widetilde{y}(t)x'(t-\sigma_1)x'(t-\sigma_2)} \quad (20)$$

3 シミュレーション・データを用いた検討

1) データの作成

1次および2次の核 $K_{1*}(\tau_1)$ 、 $K_{2*}(\tau_1, \tau_2)$ を任意に設定し、乱数列 x を与えて2次項まで考慮した式(1)により出力 y をシミュレーションした。(データ個数512)

与えられた核は次式のようなものである。

$$K_{1*}(\tau_1) = A_1 \tau_1^2 \cdot \exp(-B_1 \tau_1) \quad (21)$$

$$K_{2*}(\tau_1, \tau_2) = A_2 (\tau_1 \cdot \tau_2)^2 \cdot \exp(-B_2 (\tau_1 + \tau_2)) \quad (22)$$

ここに A_i, B_i は定数であり、ここでは非線型項が過大になるよう与えた。

上式のうち K_{2*} を示せば Fig.1 のようである。(K_{1*} は Fig.5 に示されている。) 一方、入力 x の確率分布には Fig.2 に示されるような実降雨(神流川)の例を参考にして Fig.3 のように与えた。こうして得られるシミュレーション・データのうち定常とみなせる部分を用いた。

2) iteration法について

式(18)を用いて式(19), (20)より流出核が求まるが、これらの式では核が陽に与えられていないために、何らかの方法でiterationする必要がある。

入力分布の歪が大きくない場合は、

$$\tilde{y} = y''$$

として、式(18)の修正項(第2項以下)を無視し、第1近似として $\frac{y''x'x'}{y''x'x'}$ を求め、 K_2, K_1 を得て順次繰返す方法が考えられる。

他方、分布の歪が大きい場合は、これとは別に考慮する必要がある、ここでは以下のように行った。

式(16)はそのまま次式のように書かれる。

$$AK_1(\sigma) + B \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\sigma, \tau) d\tau + CK_2(\sigma, \sigma) = f_1(\sigma) \quad (23)$$

また、式(17), (18)より

$$PK_1(\sigma) + Q \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\sigma, \tau) d\tau + RK_2(\sigma, \sigma) = f_2(\sigma) \quad (24)$$

一方、式(9)より

$$UK_1(\sigma) + V \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\sigma, \tau) d\tau + WK_2(\sigma, \sigma) = G(\sigma) \quad (25)$$

ただし、

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma) d\sigma = \bar{y} \quad (26)$$

ここに、

$$A = k_2, \quad B = 2\mathcal{E}_x k_2, \quad C = k_3$$

$$P = k_3, \quad Q = 2(\mathcal{E}_x k_3 + (k_2)^2), \quad R = (k_2)^2 T$$

$$U = \mathcal{E}_x, \quad V = \mathcal{E}_x^2, \quad W = k_2$$

$$f_1(\sigma) = \overline{y''(t)x'(t-\sigma)}$$

$$f_2(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{y''(t)x'(t-\sigma)x'(t-\sigma_2)} d\sigma_2$$

式(23)~(25)は、

$$K_1(\sigma), \quad \int_{-\infty}^{\infty} K_2(\sigma, \tau) d\tau, \quad K_2(\sigma, \sigma)$$

に関する連立方程式を構成する。それらの係数および $f_1(\sigma)$, $f_2(\sigma)$ は入出力データから求まる定数および既知関数である。 $G(\sigma)$ は未知関数であるが、ここでは式(26)を満たしながらその形状のみを仮定するために、初回だけについて、系全体を線

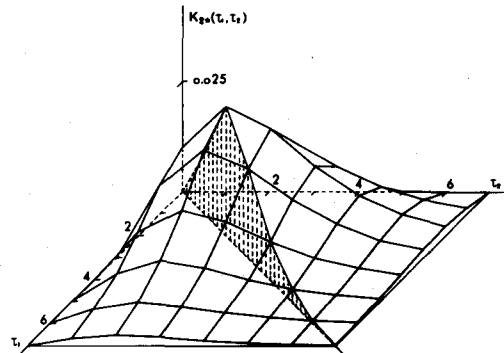


Fig. 1 シミュレーションデータに与えられた非線型核

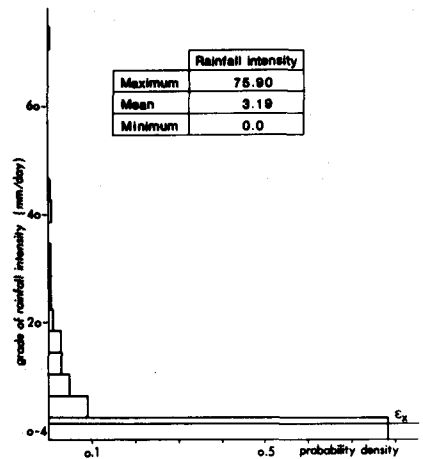


Fig. 2 降雨の確率分布(神流川・S.27)

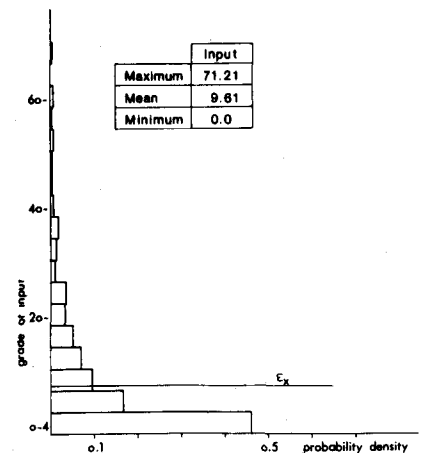


Fig. 3 入力データの確率分布

型とした場合の核を近似的に用いることにした。第2近似以降はそのステップで求まる $K_1(\sigma_1)$ 、 $K_2(\sigma_1, \sigma_2)$ を使用して繰返しを進めた。

Fig.4は計算途中で得られる各段階での $G(\sigma)$ を示したもので、収束の状態・真値との近似はほぼ妥当なものとなっていることが判る。

3) 同定結果

Fig.5は得られた線型核 $K_1(\sigma_1)$ を示しており、通常法 (White-Gaussianを仮定) による場合と比較されている。後述する非線型核とも関連して若干バラツキが生じている。

Fig.6は求められた非線型核 $K_2(\sigma_1, \sigma_2)$ である。非線型性が強く、iteration を行ううちに、遅れに対して振動する結果となったが、通常法ではオーダーの違いが生じたのに対し、Fig.1の所与の核 K_{2*} と同程度を示している。

Fig.7は得られた核を用いての出力推定値と所与の出力とを示したものである。十分な一致に達していないが、通常法に比較するとはるかに良好な推定値が得られているといえる。なお、Fig.6に求められた非線型核を簡単なフィルターで平滑化したのちに計算した出力推定値もほぼ同様な結果を示した。

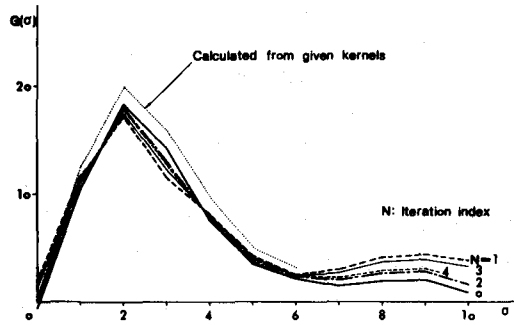


Fig. 4 $G(\sigma)$ の仮定

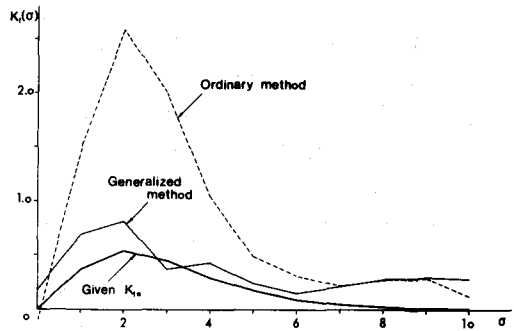


Fig. 5 同定された線型核

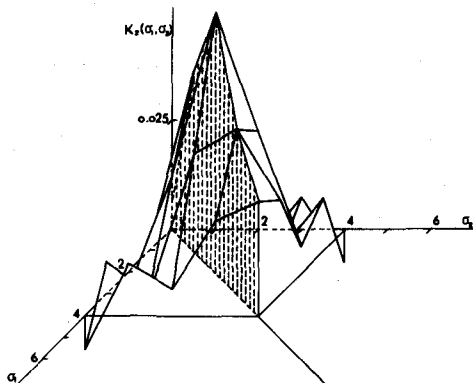


Fig. 6 同定された非線型核

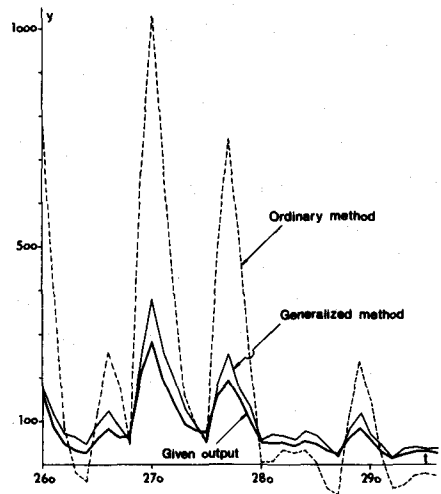


Fig. 7 出力推定結果

4 実流域への適用

一般化法の実流域への適用性を調べるために、神流川の日雨量流量データ(S27年)を用いた。降雨入力分布は前掲Fig.2のようであり、極めて歪んでいる。

Fig.8は得られた非線型流出核である。拡張法³⁾で得たと同様 $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ (day) 付近で非線型性の強いことが判る。

Fig.9は流出推定計算値を示しており、通常法に比較した場合、Fig.7の場合と同様に、推定精度がかなり向上していることが知れる。

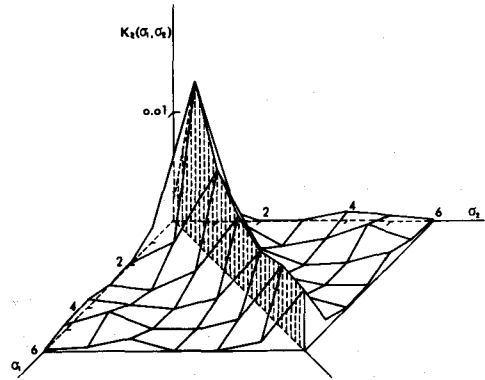


Fig. 8 一般化法による非線型流出核(神流川・S.27)

5 おわりに

一般化法は、通常法に較べはるかに良好な出力推定結果を示す。しかし一方で、計算流出核の過度な振動もみられた。得られる核を各種流域の流出特性把握のために利用するには、シミュレーション・データの核のより完全な同定法を得ておく必要がある。今後も、同定アルゴリズムに多用される積分の精度・iteration法の改善などを中心に、更に検討したいと考えている。

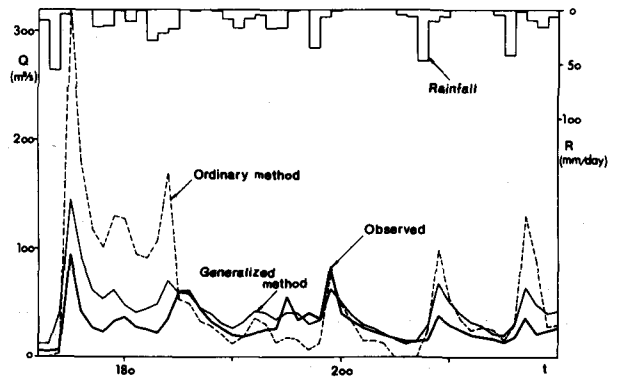


Fig. 9 流出推定結果(神流川・S.27)

参考文献

- 1) Lee, Y.W. & M. Schetzen : Measurement of non-linear system by cross-correlation, Int. J. Control, Vol.2, No.3, 237-254 (1965)
- 2) Hino, M., T. Sukigara & H. Kikkawa : Nonlinear runoff kernels of hydrologic system, Proc. 1st U.S.-Japan Semi. in Hydrol., W.R.P., Colorado, 102-115 (1971)
- 3) 日野・砂田 : 非線型応答系の同定における遅延フィルター相関法の拡張と実河川の流出予測への適用(速報), 東工大土木工学科研究報告, No. 20, 31-48 (1976)
- 4) 藤野・日野・砂田 : 流出解析における遅延フィルター相関法の一般化, 第32回土木学会年講, 159-160 (1977)
- 5) 日野 : 非線型降雨流出系における流出予測 — 情報理論的水文学への序説Ⅲ —, 東工大土木工学科研究報告, No. 6, 145-154 (1968)
- 6) 畠山・北見・江口 : ボルテラ汎関数級数による河川出水動特性の解析および予測, 第21回水講演文集, 189-194 (1977)