

平坦河床上の砂れきの運動機構解明における確率論的取り扱い

Significance of Probabilistic Considerations in Dynamics
of Bed Load Movements on Flat Beds

京都大学工学部 正 員 中 川 博 次
京都大学工学部 正 員 辻 本 哲 郎
運 輸 省 正 員 細 川 泰 廣
○京都大学大学院 学生員 村 上 正 吾

1. 序 論

平坦平衡河床における掃流砂量推定や長さスケールの大きい河床変動の解析の場合、従来の流砂量公式を用いても不合理を生じることはないが、河床波の発生や混合砂床の分級現象に代表される小さなスケールでの非平衡流砂状況を扱おうとすると、従来の流砂量式を流砂の運動方程式に代用する方法では不合理な点が生れてくる。たとえば最も簡単な非平衡状況である同一粗度の固定床に接続する移動床での流砂挙動ですら説明が困難となる。こうした場合、掃流現象をもう少し詳細にその構成要素にもどって見直す必要がでてくる。従来の流砂量式でもその誘導を見るとこうした構成要素を考慮してはいるのだが、対象が単に平衡状態の流砂量に限られていたため個々の構成要素の評価自体は必ずしも正当でないものが多い。掃流砂れきの運動を構成要素に分ける方法は Kalinske¹⁾ らによる「移動砂れき数密度」と「砂れきの運動速度」、Einstein²⁾ らの「pick-up rate」と「step length」の二通りがある。

移動砂れき数密度については佐藤・吉川・芦田³⁾ によって、pick-up rateについては著者ら⁴⁾ がほぼ妥当な推定式を導いているが、いずれも主として流体力の変動について確率論的考慮を行っている。これらはいわゆる河床砂れきの初期移動に関するものであり、確率論的取り扱いの必要性がいまや充分に認識されている。

一方、砂れきの運動速度やstep lengthは水流によって流送されている粒子の運動機構にもとづく特性量である。掃流過程において実際は粒子が運動・停止を繰り返し、絶えず河床材料と運動中砂れきの交換が行われているにもかかわらず、移動砂れき数密度と砂れきの速度を構成単位としたモデルではこの事実が考慮されていず、このためかえって砂れき速度の推定はみかけ上step lengthのそれより容易となっている。すなわち砂れきの速度は何らかの運動形式を仮定し、それに対する運動方程式から得られる平衡速度として推定された。しかし、先に述べた停止・運動を繰り返す実際現象と明らかに相違している上、推定値も当然過大になる。すなわち砂れきの運動速度の推定の精度向上には運動方程式の厳密化より運動形式をより現象に忠実なものとすること、とくに充分平衡状態に達しないまま停止する砂れきも数多くあることを考慮することが大事である。また、こうした立場は必然的に流送機構解明にも確率論的方法を持ち込むことになり、さらに現在その推定が移動床の不安定性解析をはじめ様々な問題で重要であることが認識されてきたstep lengthの検討へとつながるものである。

本研究は上述の点に鑑み、掃流砂れきの流送機構、とくに床面凹凸との衝突に起因すると考えられる急激な速度変動に着目し、16mmカメラ・ダイナミックフレームによる掃流砂運動の詳細な観察と併行して解析を試みたものである。

2. 掃流砂れきの流送過程の概要

こうした研究では現象の忠実かつ詳細な観察ならびに特性量の計測が第一歩と考えられ、ここでは平衡平坦河床での砂粒運動を16mmフィルム解析によって検討した。実験の詳細については文献5)を参照されたい。

さて、図-1は1step内での砂れき速度の場所的変動を調べた例である。もちろん図に示されたのは各runについての一つのサンプルでこうしたもののアンサンブル平均がそのrunの掃流砂挙動である。とはいっても

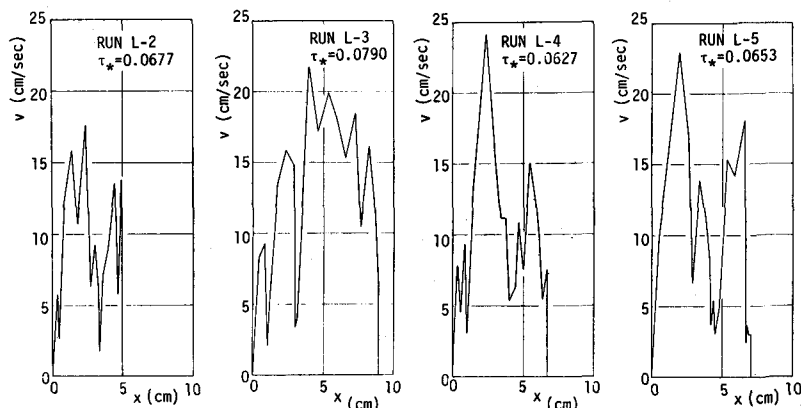


図-1 砂れきの速度の場所的変動の標本

のアンサンブル平均のみを対象とするとその本質が埋没してしまうし、アンサンブル平均自体説明し得ないことになる。著者らは各runについてこうしたサンプルを100個以上得、本論で展開した議論の検証に用いた。このような結果をみると仮に抗力係数、摩擦係数などを適確に推定しても単一の運動形式で運動方程式表示はできないことが良くわかる。すなわち単にゆらぎとしては扱えない大きな速度急減が間歇的に生じること、その際停止してしまうことがあることである。こうした急激な速度変化以外はゆらぎはあるもののそのアンサンブル平均は初速度さえ適確に与えれば確定論的な運動方程式で与え得ることも予想される。しかし、あくまでも掃流砂れきの1step内の挙動ということになればその中に散見される突発的な速度減少がその本質であり、その間隔や速度減少量は有意な確率変数である。こうした速度の変化は床面に散在する突起砂粒との衝突に起因するものであり、とくにlower regimeの平坦河床ではこれの果たす役割は重大である。一方、こうした衝突による急激な速度変化の間での砂粒運動の不規則性は流体力変動等に起因するほぼ均質なゆらぎでその振幅もずっと小さい。

以上の考察から掃流砂れきの流送過程の解析は上述したような床面突起との衝突現象に着目して行うことが適切な手段と言える。

3. 個々の砂れき挙動の確率的状態

前述したように掃流砂れきの運動は床面突起との衝突による急激かつ大きい変動と主として流体力の変動に起因するゆるやかな変動の複合体となっている。衝突を伴わない運動過程は初速度 v_0 （初期移動の場合は零、それ以外は前回の衝突後の突起乗り越し速度 v_3 ）と衝突後（または初期移動後）の移動距離 x の条件を付した砂れき速度の確率密度関数 $f_{v|x,v_0}(v|x, v_0)$ で適確に表示される。先にも述べたようにこの分布は狭く、変動もほぼ均質なものと考えられるのでその期待値 $E[v|x, v_0]$ は適当な運動方程式を確定論的に解いたもので与えられるだろうし、極端な場合掃流砂れきの運動の確率的状態はむしろ後述する衝突過程に強く依存し衝突間の小さな変動は衝突現象によってひき起こされる強い不規則性の中に埋没するのでこの部分は確定論的取り扱いをしてもさほど矛盾を産むことはない。

さて、衝突過程の不規則さは衝突位置と衝突の際の速度変化の不規則性による。前者は衝突間隔の確率密度 $f_X(\xi)$ 、後者は衝突によって砂れきの速度が v_1 から v_3 に変化する推移確率 $h(v_3|v_1)$ で表わされる。

これらを考慮し、いま衝突前後の速度に着目し、これらの確率的状況を検討する。第 i 番目の衝突前後の砂れき速度の確率密度をそれぞれ $g_1^i(v)$ 、 $g_3^i(v)$ と書くと、

$$g_1^1(v) = \int_0^\infty f_{v|x,v_0}(v|x, 0) f_X(\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$g_1^i(v) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_{v|x,v_0}(v|x, v_3) g_3^{i-1}(v_3) f_X(\xi) dv_3 d\xi \quad (i > 1) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$g_3^i(v) = \int_0^\infty g_1^i(v_1) h(v|v_1) dv_1 \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。第 $(i-1)$ 番目の衝突 $(i=1$ のときは初期移動)と第 i 番目の衝突の間での速度分布の密度関数 $f_{v|x}^i(v|x)$ は次式で与えられる。

$$f_{v|x}^i(v|x) = \int_0^\infty f_{v|x,v_0}(v|x, v_3) g_3^{i-1}(v_3) dv_3 \quad \dots\dots\dots (4)$$

4. 床面突起との衝突過程

まず掃流過程の不規則性に重大な効果を与える衝突間隔の分布及び衝突による砂れきの速度変化に関する推移確率について調べる。図-1に示したような実際の掃流砂の挙動の計測結果より、激しい速度減少のある位置で衝突が生じているものと考え、これより衝突間隔分布を調べた。その結果衝突間隔の平均値及び変動係数について次の結果を得た(d :粒径)。

$$\bar{X}/d = 5.0 \sim 7.0, \quad \alpha_X = 0.6 \sim 0.7 \quad \dots\dots\dots (5)$$

分布形としてはshape parameterが3のgamma分布に良く適合している(図-2参照)。ところで衝突間隔は床面に散在していると考えられる突起の間隔であり、河床の凹凸状況と密接な関係があることが予想される。そこで、実際にlower regimeの平坦河床でこれを実測しその性質を検討した。運動砂れきがこうした凹凸と衝突するのは砂れきの運動面が河床面を切る

ところであるが、その運動面は容易に推定できない。そこでこれを平均河床面から y 上方の平面と仮定し、河床面がこれを切る間隔分布ならびにそのときこの平面から突出する高さの分布を調べた。その結果 $y = 0.3d$ とすると平均突起間隔が先に求めた衝突間隔と一致し(図-3参照)、今回の実験の範囲では $y = 0.3d$ 程度に砂れきの平均運動面が存在するものと考えられる。勿論河床面せん断応力がより大きくなれば粒子運動が転動、滑動から小跳躍に移行し平均運動面がより上方になるものと推定され、今後の検討を要する。ところでこのとき突起高さは粒径の約0.25~0.3倍程度となりその分布は指数分布に良く適合する。以上の結果少なくとも今回の対象となるlower flat bedでは、

$$f_X(X_*) = \frac{27}{2} X_*^2 \exp(-3X_*) \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$f_H(d_*) = (1/d_{*0}) \exp(-d_*/d_{*0}) \quad \dots\dots\dots (7)$$

が推定される。但し $\{X_*\}$ は平均値で規格化した衝突間隔、 d_* は粒径で無次元化した突起高さ、 d_{*0} はその平均値で約0.3である。

さて、次に衝突時の砂れきの速度変化について検討する。衝突後の砂れきの速度 v_3 は衝突直前の速度 v_1 及び衝突する突起高さが与えられれば確定論的に衝突過程の力学によって与えられる。すなわち、力学モデルにより

$$v_3/\sqrt{gd} = \text{func}(v_1/\sqrt{gd}, d_*) \quad \dots\dots\dots (8)$$

が与えられる。今、 v_1 も d_* も実際には確率変数で v_3 はこれらの分布の複合体としての確率変数である。そして、ここで対象とする推移確率 $h(v_3|v_1)$ は v_1 を条件に付した v_3 の確率密度である。

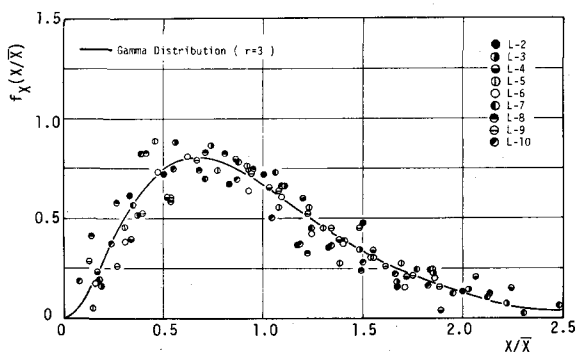


図-2 運動砂れきの衝突間隔分布

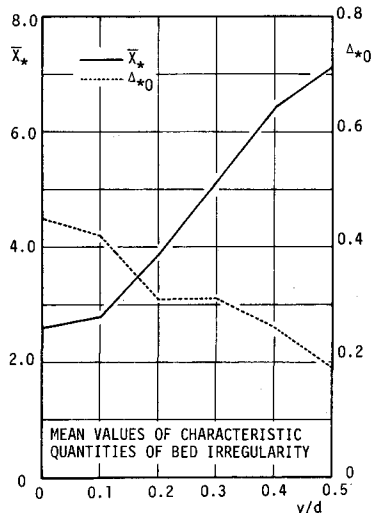


図-3 平坦砂河床の凹凸性状

$h(v_3|v_1)$ は式(8)を Δ_* について解いた式 $\tilde{\Delta}_*(v_1^*, v_3^*)$ ($v^* = v/\sqrt{gd}$) と Δ_* の確率密度関数を用いて次式で求められる。

$$h(v_3^*|v_1^*) = f_H(\tilde{\Delta}_*) \cdot |\partial \tilde{\Delta}_* / \partial v_3^*| \quad \dots\dots\dots (9)$$

ところで式(8)を与える力学モデルは固定床ではともかく移動床では衝突時に突起砂粒の周辺砂粒のずれ動きが生じる⁴⁾ため適切なものが未だ得られていずここでは便宜上次式で表わされる単純な非弾性衝突モデル⁴⁾を用いる。

$$v_3^{*2} = \{(1 + 4k_*^2 - 2\Delta_*) / (1 + 4k_*^2)\}^2 v_1^{*2} - 2\Delta_* B_* \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$B_* = (\sigma/\rho - 1) / \{(\sigma/\rho + C_M) \cdot (1 + 4k_*^2)\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

但し、 k_*d : 砂粒の回転2次半径、 σ/ρ : 砂の比重、 C_M : 付加質量係数である。

5. 衝突を伴わない運動過程

lower regime の平坦河床における掃流砂れきの運動は衝突と衝突の間に限れば何らかの単一の運動方程式で比較的良く表現できるものと推定される。著者らのこれまでの研究成果^{6),5)}によると、滑動形式による表示が適当であるが、この場合摩擦係数が砂れき速度に依存する。すなわち、砂れき速度がごく小さい間は静止摩擦係数(約1.0)程度であるが徐々に動摩擦係数程度になり、さらには砂面との接触度合が減ることで見かけ上もっと小さくなり得る。そこで、掃流砂れきの運動を16mmフィルム解析した資料から瞬時的(1/40秒程度)に摩擦係数を逆算し、その速度との関係を調べ次の実験式を得た(図-4参照)

$$\mu_R = 0.6 / \{(v/\sqrt{gd})^2 + 0.5\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(12)が成立する機構は未だ明らかではないが、これを認めると図-5に示すように初期移動から最初の衝突までの限度での砂れきの運動のアンサンブル平均、図-6に示すように衝突と衝突の間でのアンサンブル平均的挙動が適切に表示できる。なお図の縦座標 v_* は砂れきの速度を摩擦速度で無次元化したものである。とこ

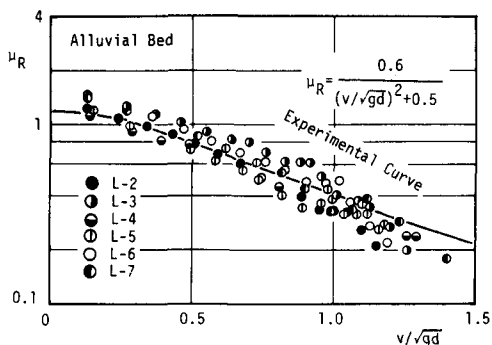


図-4 掃流過程の摩擦係数と砂れき速度との関係

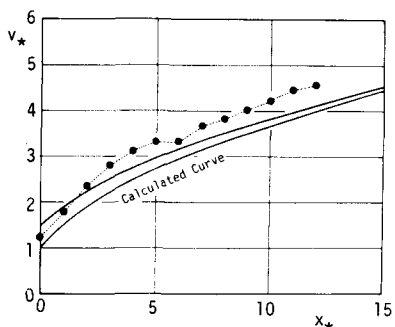


図-6 衝突を伴わない砂れきの運動過程のアンサンブル平均

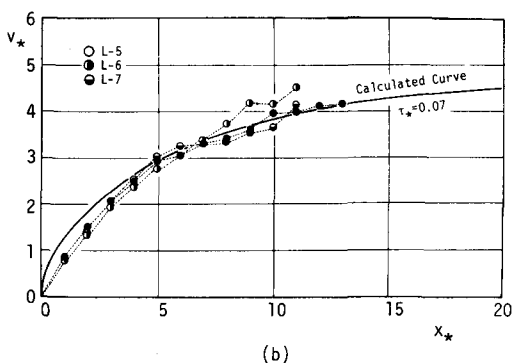
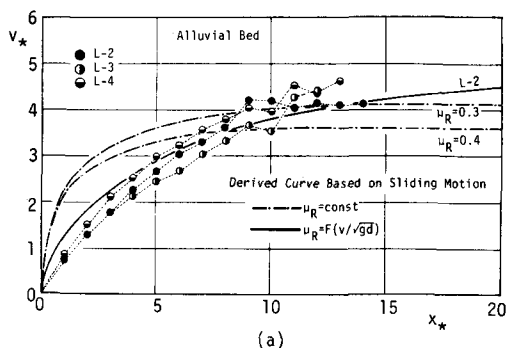


図-5 初期移動後最初の衝突までの砂れきの運動過程のアンサンブル平均

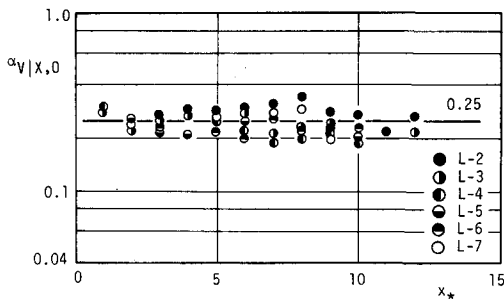


図-7 衝突を伴わない掃流砂れきの速度の変動係数

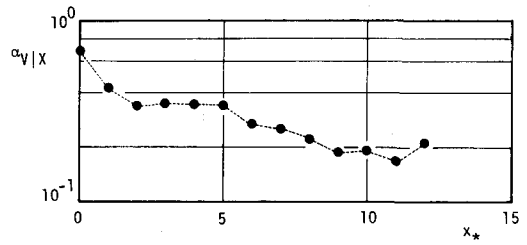


図-8 衝突後の砂れき速度の変動係数の場所的变化

ろでこうした運動の不規則性であるがまず図-7に初期移動からの運動における砂れき速度の変動係数 $\alpha_{v|x,0}$ を示した。これより衝突が伴わなければ変動は小さく ($\alpha_{v|x,0} \approx 0.25$)、また均質なものであることが認められた。また衝突間の資料について衝突後の移動距離の条件を付した砂れき速度の変動係数を図-8に示した。衝突直後は衝突現象によってもたらされた不規則性のため変動係数は大きい、流下に伴って衝突履歴は消えていくことがわかる。このような性質の変動は運動方程式を変動する流体力を揺動動力とした確率微分方程式として解くことによって得られるものと推測されるが、実際には運動方程式が非線型でその解を容易に得ることはできないし、一方掃流過程全体の不規則性からみればこのサブシステムのウェイトは大きくないので、本論文ではアンサンブル平均のみを確定論的に決定しその変動は実験的に調べることにした。

6. 16 mm フィルム解析結果との比較

図-1に示したような掃流過程の16 mm フィルム解析資料をもとにまず衝突前後の砂れきの速度分布を調べた。これらの平均値及び変動係数は表-1に示される通りで概ね次の結果が得られた。

$$\bar{v}_1/u_* \approx 3.2, \quad \alpha_{v1} = 0.40 \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\bar{v}_2/u_* \approx 1.2, \quad \alpha_{v3} = 0.73 \quad \dots\dots\dots (14)$$

これより衝突前後の速度分布はそれぞれ shape parameter が7及び2程度の gamma 分布で表示できるものと期待され、実際図-9, 10に示すようにその適合性は良好である。

さてこの結果によって第4章の後半に示した衝突過程の確率モデルを検討しよう。前述したように基礎となる力学モデルの精度は充分でないので v_1 の条件を付した v_3 の期待値

$E[v_3|v_1]$ を対象とする。式(9)に式(7), (10)

を考慮し $E[v_3^*|v_1^*]$ を数値計算した結果を実線で図-11に実験結果と共に示した。

この場合 v_1 は条件として固定しているので確率的要素は突起高さのみであるがこれを平均値に対応する確定量として扱えば図の点線が得られ実験値とは異なる結果しか得られない点は注目すべきであろう。なお $\{v_3|v_1\}$ の変動係数は v_1 にかかわらず 0.5 程度で、 $E[v_3|v_1]$ の理論結果が

$$E[v_3^*|v_1^*] = 0.08v_1^{*2} + 0.3v_1^* \quad \dots\dots\dots (15)$$

表-1 衝突前後の砂れき速度の実測結果

RUN	$\bar{v}_{*1}$	α_{v1}	$\bar{v}_{*3}$	α_{v3}
L-2	3.14	0.41	1.44	0.71
L-3	2.91	0.47	1.16	0.73
L-4	3.42	0.40	1.30	0.76
L-5	3.44	0.33	1.27	0.70
L-6	3.14	0.35	1.09	0.73

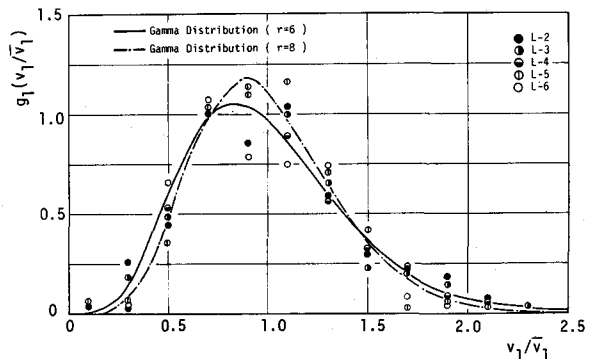


図-9 衝突直前の砂れきの速度分布

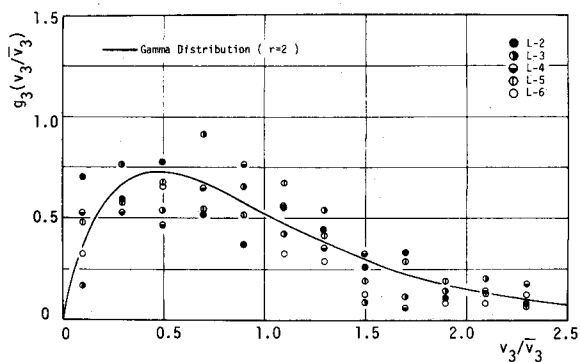


図-10 衝突直後の砂れきの速度分布

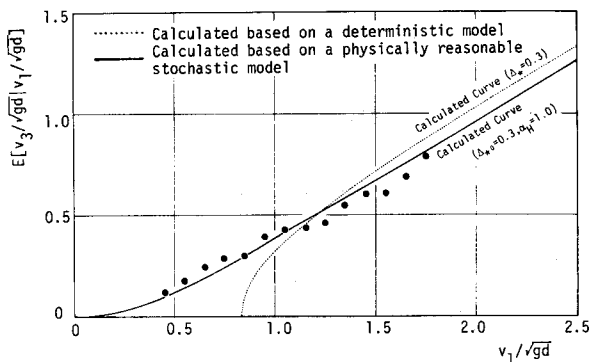


図-11 衝突直前速度の条件を付した衝突直後速度の期待値

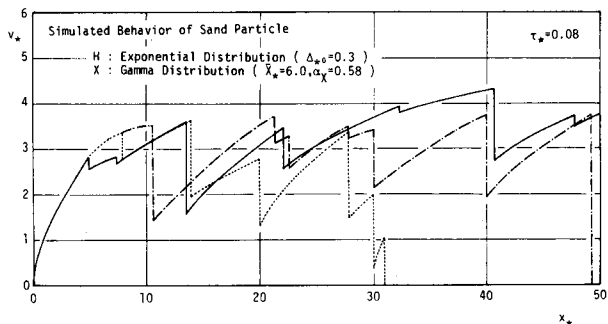


図-12 掃流過程のシミュレーション例

で良好に近似されることを考慮すると、衝突による速度変化を与える推移確率は次式で近似表現できる。

$$h[v_3^* | v_1^*] = \frac{128 v_3^{*3}}{3 (0.08 v_1^{*2} + 0.3 v_1^*)^4} \exp\left(-\frac{4 v_3^*}{0.08 v_1^{*2} + 0.3 v_1^*}\right) \quad \dots\dots\dots (16)$$

これまでの検討により、掃流砂れきの挙動をその確率的状態を含めて記述するための基礎となる諸分布、すなわち $f_{v|x,v_0}(v|x, v_0)$, $f_X(X)$, $h(v_3|v_1)$ がすべて明らかにされた。第3章の議論によって砂れきの速度分布等が定められるが、ここではまず衝突前後の速度分布をこれらの議論にもとづいた数値計算で求めた。その結

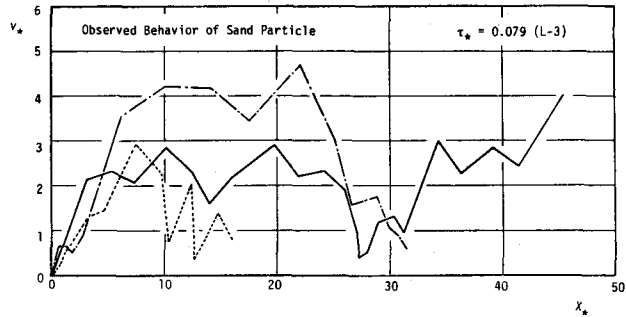


図-13 実際の掃流砂の挙動例

果衝突回数による差異は殆んど認められず（数回で平衡状態となる），

$$\bar{v}_{*1} \doteq 2.80, \quad \alpha_{v1} = 0.36 \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\bar{v}_{*3} \doteq 1.20, \quad \alpha_{v3} = 0.77 \quad \dots\dots\dots (18)$$

が得られ、式(13)、(14)に示す実験結果と概ね一致した。衝突前後のみならず、あらゆる状態での速度も原理的には計算し得るが、この場合は本論文のモデルにもとづくシミュレーションが有利であろう。シミュレーションの例は図-12に示される。これがそのまま実際の砂粒運動（図-13）を表わすわけではないが、本論文で検討した種々の量の確率的状態がほぼ2次のオーダーまで同一なモデルが得られたことになっている。

7. 結 論

掃流過程の本質的特徴ともいえる不規則性の内部構造を詳しく調べ、一般には確定論的議論の対象となる運動機構を解明しようとする際でも確率論的考慮が不可避であることを示した。とくに掃流砂運動の不規則性に対して主役を為す衝突過程に注目し力学モデルと確率モデルの結合により掃流過程を適確に表現するモデルの雛型を得た。また本モデルによって運動砂れきを任意抽出した際の運動速度は運動方程式から得られる平衡速度よりかなり小さく今回の実験範囲では摩擦速度の2.5～3.0倍程度、変動係数は0.5程度である（実験結果は既に文献7）に示してある）ことが得られる。さらに著者らが河床波の発生などの研究で有力としている stochastic model における step length に対しても有益な情報を与える。すなわち衝突過程の力学モデルより、突越乗越しのための衝突直前速度 v_{1c} が Δ_* の関数として与えられ、第 i 番目の突越での停止確率 p_t^i が

$$p_t^i = \int_0^\infty \int_0^{v_{1c}(\Delta_*)} g_1^i(v) dv f_H(\Delta_*) d\Delta_* \quad \dots\dots\dots (19)$$

で与えられる。これより、第 n 番目の突起で停止する確率が求められ、衝突間隔の分布を考慮して次式で step length の分布の密度関数 $f_S(\xi)$ が求められることになる。

$$f_S(\xi) = f_X(\xi) p_t^1 + \sum_{i=2}^\infty \left[f_X^{n*}(\xi) p_t^i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - p_t^j) \right] \quad \dots\dots\dots (20)$$

この結果は平均 step length が粒径の50倍程度に達し、変動係数は0.8程度となり、従来の実験的結果に概ね近いものの満足できるものではない。これは前述したように移動床での衝突の力学モデルの不備に起因するもので今後詳しく検討する予定である。

以上のように本モデルによって掃流機構がより明確になるとともに砂れき速度、step length など利用度の高い流砂モデルの構成パラメータの評価等にも有用である。今後流体力の大きい場合の運動様式ならびに衝突過程の変化についての研究を続ける予定である。

参考文献

- 1) Kalinske, A. A.: Movement of Sediment as Bed Load in Rivers, Trans. AGU, Vol. 28, No. 4, pp. 615-620, 1947.

2) Einstein, H. A.: Formulas for the Transportation of Bed Load, Trans. ASCE, Paper No. 2140, pp. 561-597, 1942.

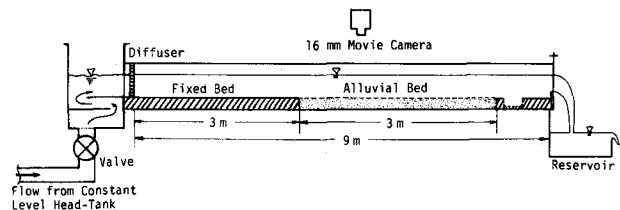
3) 佐藤清一・吉川秀夫・芦田和男：河床砂礫の掃流運搬に関する研究(1)，建設省土木研究所報告，第98号，pp. 13-30，1957.

4) 中川博次・辻本哲郎：水流による砂れきの移動機構に関する基礎的研究，土木学会論文報告集，第244号，pp. 71-80，1975.

5) 中川博次・辻本哲郎・細川泰廣：移動床における掃流砂れきの不規則運動性状について，京都大学防災研究所年報，第22号B-2，pp. 553-573，1979.

6) 中川博次・辻本哲郎・細川泰廣：床面に沿って転動する粒子の運動と流体力について，第23回水理講演会論文集，pp. 323-330，1979.

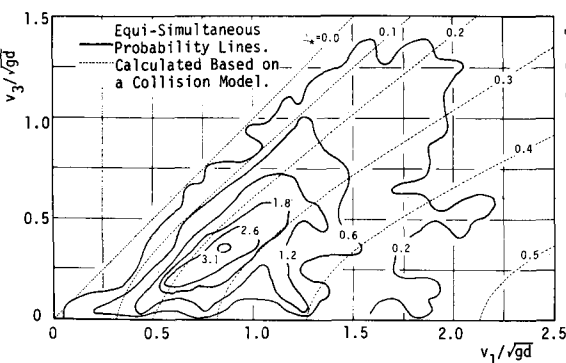
7) 中川博次・辻本哲郎・宮本博司：16mm撮影による掃流砂運動の特性量解析と流砂の平衡状態について，京都大学防災研究所年報，第21号B-2，pp. 407-421，1978.



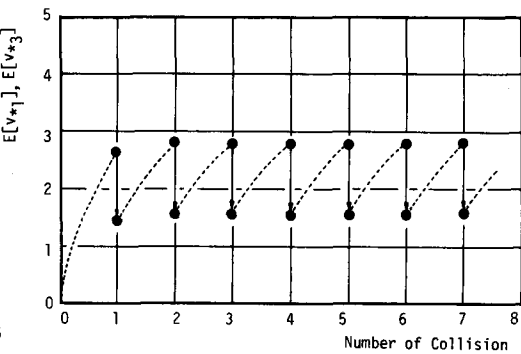
付図- 1 実験水路

付表- 1 実験条件

Run No.	$d_{50}(\text{cm})$	I_e	$h(\text{cm})$	$u_* (\text{cm/sec})$	τ_*	Fr	h/d	Re_*
L- 1	0.185	0.00250	5.95	3.82	0.0488	0.503	32.2	70.7
L- 2		0.00250	8.27	4.50	0.0677	0.541	44.7	83.3
L- 3		0.00255	9.63	4.86	0.0790	0.432	53.1	89.9
L- 4		0.00361	5.30	4.33	0.0627	0.612	28.6	80.1
L- 5		0.00415	4.80	4.42	0.0653	0.711	25.9	81.8
L- 6		0.00417	5.59	4.78	0.0764	0.703	30.2	88.4
L- 7	0.276	0.00786	4.56	5.85	0.0778	0.705	16.5	132.3
L- 8		0.00624	5.50	5.80	0.0754	0.788	19.9	124.4
L- 9		0.01077	2.96	5.59	0.0701	1.205	10.7	126.5
L-10		0.01083	3.61	6.19	0.0858	0.814	13.1	140.0



付図- 2 衝突前後の砂れき速度の同時分布



付図- 3 衝突前後の砂れき速度の期待値