

河床波の発生時における流砂と河床形状の相互作用系の
確率過程としての性質

Stochastic Properties of Interrelation between Bed Load
Transport and Incipient Disturbance of Sand Beds

京都大学工学部 正 員 中 川 博 次
○京都大学工学部 正 員 辻 本 哲 郎

1. まえがき

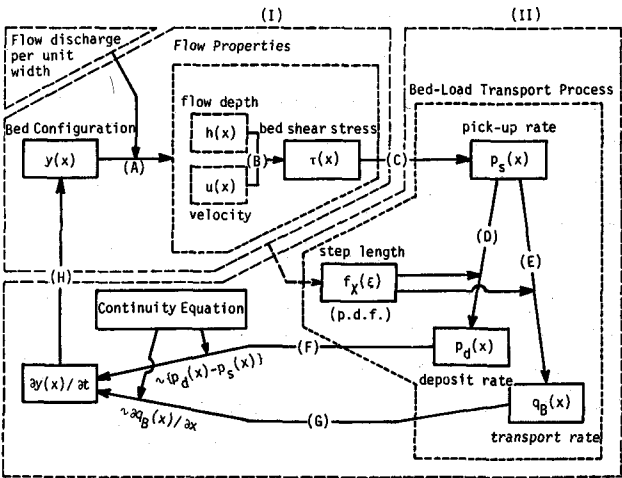
移動床の砂面近傍では流れの乱れ、掃流砂運動、河床形状が微妙に相互作用を及ぼし合っており、それぞれの不規則性状を助長したり抑制したりして興味深い系を形成している。とくに小規模河床形態の発生はこうした相互作用系の固有の性質に関連しているものと考えられ、これを明らかにすることが砂面不安定機構を明確なものとするために必須のものと考えられる。そこで本論文では、いわゆる初期微小擾乱を対象としてこうした不規則性の強い相互作用系についての考察、検討を行なう。本研究では比較的低いFroude数の条件で、流砂形態が掃流形式で扱えるものを対象とする。

2. 微小擾乱時における移動床の相互作用系

移動床における相互作用系を模式的に示すと図－1 のようである。河床形状を表わすものとして平均河床面からの砂面高さ $y(x)$ 、流れの性質としては水深 $h(x)$ 、流速 $u(x)$ 、底面せん断応力 $\tau(x)$ 、掃流過程を表現するものとしては、砂れきの pick-up rate $p_s(x)$ 、step length を介して deposit rate $p_d(x)$ や流砂量 $q_B(x)$ が挙げられる。これらはいずれも変動を伴った不規則量で各量は確率過程と見なせる。掃流過程を単に $q_B(x)$ のみで表わさず $p_s(x)$ を介しているのは $p_s(x)$ は $\tau(x)$ に対し概ね一意的（確定的にという意味ではない）に決定されるのに対し $q_B(x)$ は流砂の非平衡性により $\tau(x)$ の一意的関数ではないからである。このため従来 $p_s(x)$ を介しない解析では流砂の緩和距離を名目とした遅れ距離という曖昧な量の導入が必要となっている。ところでこうした各量を図では便宜的に水路方向の距離 x の関数として表示しているが正確には時間 t の関数でもある。

図に示した各量はそれぞれ矢印の方向に循環的に関連していると考えてよく、各矢印は①～⑥の記号を付して示している。例えば①は pick-up rate の推定であり、②③は流砂の連続の関係を示す。なお step length は図にも破線の矢印で示したように流れの性質と河床形状の両方に支配されるが、これまでの研究で明らかにされているように水理量の変化に対しては pick-up rate に比べずっと鈍感である。ここでは微小擾乱時のみを対象とするので平均水理量に対応した不変の確率量と考えられる。

さて、①～⑥で関係づけられる過程自体はいずれも確率過程と見なせる不規則性の顕著なものであるが、①～⑥の関係の中にはその関係式中にせん断応力の分布を含む②や step length の分布が入ってくる③、④な



図－1 移動床における相互作用系

どのように関係自体が確率的事象に影響されるもの、⑥、⑦のように関係自体は確定論的なものの二通りがある。とくに前者の取り扱いでは stochastic な手法が必須であり、せん断応力や step length を確定量として扱うと関係式自体が得られなかったり、得られた関係式が現象と全く異なったものとなることが多い。

3. 確率的な相互作用系の取り扱い

図-1 に示したように移動床では各量がそれぞれ確率過程で④～⑦に示される各種の関係で関連している。こうした関係の一部を抽象化して示したのが図-2 である。過程 $X(x)$, $Y(x)$ とも確率過程でそれぞれ平均値のまわりに変動している。このような過程の性質としては平均値以外にその変動特性が重要であり、それを概

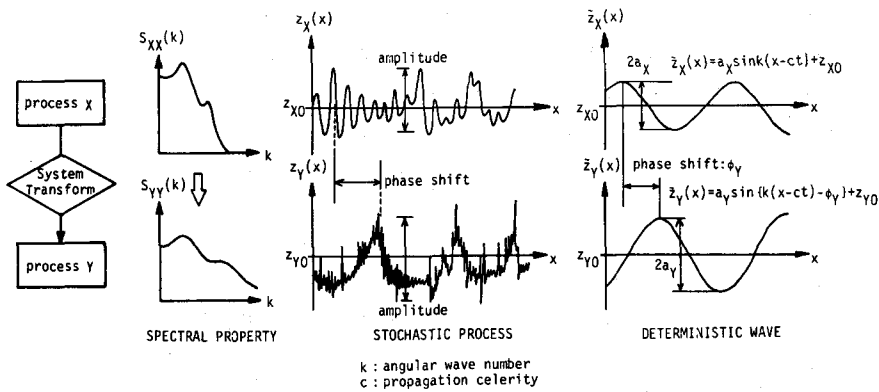


図-2 相互作用系の取り扱い説明図

略的に捉えると変動幅と変動周期と言えよう。これらは厳密には各過程のスペクトル密度で表現されるが、概略的には代表的な波長、振幅を有する正弦波で近似できる。それでも平均値だけで表わすよりは適切な変動過程の表現となる。一方、2過程間の関連となるとさらに概略的に位相差として示される量が特性量となり、確率過程そのものを考えるとクロススペクトルによって表示されるものである。

ところでこのような考えから、各過程は波数 k (角波数) と時間 t との関数と見なすのが都合が良く、これはその過程の Fourier 変換に他ならない。これを用いることで確率過程の性質を生かしたままの解析が可能となる。またその一つの代表的 Fourier 成分についての解析が確定的な正弦波を用いた解析となる。

4. 掃流砂れきの不規則運動による砂面の変動

まず、図-1 に示した相互作用系のうちの一部分(Ⅱ)について検討する。すなわち掃流砂れきの不規則運動に伴う砂面変動の問題である。16 mm フィルム解析にもとづく詳細な実験の結果、ここで扱う程度の軽微な非平衡流砂状況でも次の諸式で流砂挙動及びそれに伴う砂面高の変化が適確に表示できる^{1), 2)}。これは Einstein によって始められた掃流過程に対する stochastic model³⁾ を Euler 的に解釈したものと言える。

$$p_d(x) = \int_0^{x-x_0} p_s(x-\xi) f_X(\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$q_B(x) = (A_3 d / A_2) \int_{x_0}^x p_s(x') \int_{x-x'}^{\infty} f_X(\xi) d\xi dx' \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial y(x)}{\partial t} = A_1 d \{ \int_0^{x-x_0} p_s(x-\xi) f_X(\xi) d\xi - p_s(x) \} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$f_X(\xi) = (1/A) \exp(-\xi/A) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに $f_X(\xi)$, A はそれぞれ step length の確率密度関数及びその平均値, d は粒径, A_1, A_2, A_3 はそれぞれ 1-, 2-, 3 次元の砂の形状係数である。また, x_0 は流砂の原点で、本論文の対象に対しては $x_0 \rightarrow -\infty$ と考えられる。なお、図-1 に示したように $\partial y / \partial t$ は $p_d(x)$ と $p_s(x)$ の差として式(3)で表わすこともできるが、式(2)を流砂の

連続式に代入することによっても得られる⁴⁾。いずれにせよ、上記の式で掃流砂に固有の非平衡性が損われずに表現されており、非平衡性を司どるのは step length であり、その分布が重要であることが示される。ところでここで用いる step length は単一の saltation の飛距離として定義されるようなものでなく初期移動から次の確実な停止までの距離⁵⁾であり、従来 Lagrange 的な stochastic model を対象として tracer 実験等^{6)~10)}で得られたような平均値が粒径の 80~250 倍程度のものである。このような step length を式(1)~(3)に考慮することで今対象とする非平衡流砂状況が適確に表わせることは、最も単純な非平衡状況である同一粗度の固定床に接続する移動床部での掃流砂運動の特性量計測資料で確認されている^{1),2)}。

さて、各量を平均値と変動分に分け、変動分に'を付して示すと p_s と p_d は平均値が等しいと考えられるので式(1)及び(3)は p_d , p_s を p_d' , p_s' に置き換えても成立する。式(1)の Fourier 変換をとると、

$$\mathcal{F}[p_d'(x)] = \mathcal{F}[p_s'(x) * h(x)] = \mathcal{F}[p_s'(x)] \cdot H(i\kappa) \quad (5)$$

となる。ただし、 $\mathcal{F}[\cdot]$ は Fourier 変換を示し、 $*$ は畳み込み積分を表わす。また、

$$h(x) = f_X(x)U(x) \quad (6)$$

$$H(i\kappa) = \mathcal{F}[h(x)] \quad (7)$$

である。 $U(\cdot)$ は unit step 関数である。また、 $h(x)$ は $p_s'(x)$ を input, $p_d'(x)$ を out put とする系の impulse 応答、 $H(i\kappa)$ はその system 関数と考えられる。さて式(2)はこの結果より、

$$\mathcal{F}[\partial y / \partial t] = A_1 d \cdot \mathcal{F}[p_s'(x)] \{1 - H(i\kappa)\} \quad (8)$$

となる。これより河床高の波数スペクトル $S_{yy}(\kappa)$ と $p_s'(x)$ のそれ $S_{ss}(\kappa)$ と間の関係式が次のように求められる。

$$S_{yy}(\kappa) = (A_1 d)^2 t \cdot \{1 - H^*(i\kappa) - H(i\kappa) + |H(i\kappa)|^2\} \cdot S_{ss}(\kappa) \quad (9)$$

上式中 $H^*(i\kappa)$ は $H(i\kappa)$ の complex conjugate で、式(4)より、上式の $\{ \}$ 中が求められ結局

$$S_{yy}(\kappa) = (A_1 d)^2 t \cdot [\kappa^2 / \{(1/A)^2 + \kappa^2\}] \cdot S_{ss}(\kappa) \quad (10)$$

が得られる。この式は異なる誘導で文献2)で得たものと同じである。この式により pick-up rate の場所的変動が河床面擾乱を産み出す可能性のあることが示される。初期砂面擾乱が仮定されれば当然それに応じた底面せん断応力の変動場が形成され $p_s(x)$ も変動するが、平坦河床でも水流の乱れ等により底面せん断応力は場所的相関を有する変動を示し、そのため、 $S_{ss}(\kappa)$ が有限の大きさで存在する。この点に砂面擾乱の初生の鍵がある。

歪ゲージと片持梁を組み合わせて著者らが試作した抗力測定装置¹¹⁾により、固定床粗面上の単一粒子に働く抗力の時間変動の自己相関係数 $\rho(\tau)$ を求めると、図-3 ($H_e/d = 1.0$ の場合、 H_e : 粗面からの露出高さ)のようになる。これによると、相関係数の値が $1/e$ となる時間を相関の時間スケール T_e とする時、

$$T_e U_* / d \doteq 0.3 (h/d) \quad (11)$$

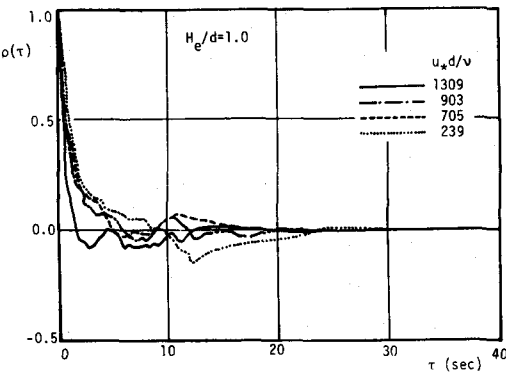


図-3 河床れきに働く抗力の自己相関係数

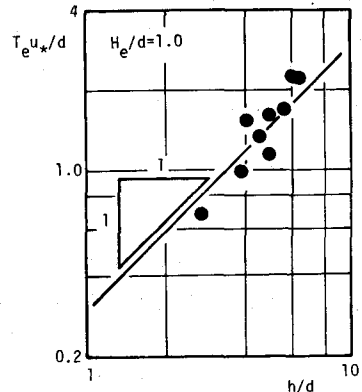


図-4 河床れきに働く流体力変動の相関時間スケール

が成立することが認められる(図-4 参照)。ここに U_* は摩擦速度、 h は水深である。これより場所的相関のスケールは水深のオーダーとなり、この程度の規模の相関距離の存在が類推された。しかし、移動床流れの床面近傍の流れの擾乱はこれ以外に砂粒運動によって下流に伝播されることも考えられ、step length 程度の相関距離の存在も類推できる。こうした点については今後さらに検討を進めねばならないが、いま、上述の考察からの類推により、pick-up rate の場所的変動の相関関数が次式で与えられるものとする。

$$R_{ss}(\xi) = p_s \exp(-\alpha_0 \xi) \quad (12)$$

α_0^{-1} は pick-up rate の場所的相関の緩和距離、 p_s は pick-up rate の平均値である。このとき、

$$S_{yy}(k) = 4\alpha_0 p_s (A_1 d)^2 \kappa^2 t / \{ (\kappa^2 + \alpha_0^2) \{ \kappa^2 + (1/A)^2 \} \} \quad (13)$$

が得られる。便宜的に $\alpha_0 = 1/A$ と置くと図-5 に示すように初期砂面擾乱の波数スペクトルが概ね良く表示できる。

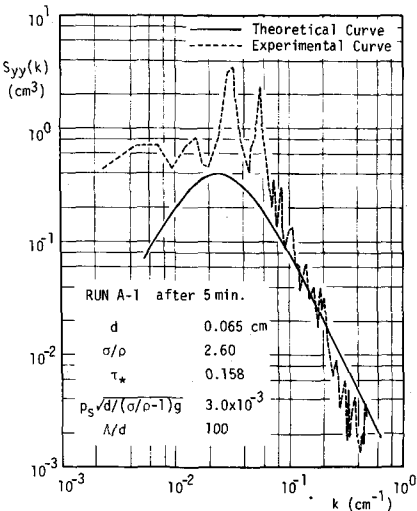


図-5 初期砂面擾乱の波数スペクトル

5. 初期砂面擾乱時の移動床相互作用系

本章では主として図-1の(I)に示される枠内の相互作用系の検討を行なう。砂面を表わす $y(x, t)$ の Fourier 変換を $Y(\kappa, t)$ と表わすと、水面変動 $\xi(x, t)$ 、床面近傍の擾動流速 $u(x, t)$ はポテンシャル流理論を用いると次式で与えられる。

$$\xi(x, t) = \mathcal{F}^{-1} [R_*(\kappa) \cdot Y(\kappa, t)] \quad (14)$$

$$u(x, t) = \kappa \mathcal{F}^{-1} [F_*(\kappa) \cdot Y(\kappa, t)] \quad (15)$$

$$R_* = Fr^2 \kappa h_0 \operatorname{sech} \kappa h_0 / (Fr^2 \kappa h_0 - \tanh \kappa h_0) \quad (16)$$

$$F_* = (1 - Fr^2 \kappa h_0 \tanh \kappa h_0) / (\tanh \kappa h_0 - Fr^2 \kappa h_0) \quad (17)$$

ここに h_0 は非擾乱流水深 $Fr = U_0 / \sqrt{gh_0}$ (U_0 : 非擾乱流速) である。また $\mathcal{F}^{-1}[\cdot]$ は Fourier 逆変換を示す。Jain & Kennedy¹²⁾ はこれを用い、林¹³⁾ が採用した遅れ距離と inclination factor を導入した流砂量式によって砂面波数スペクトルの不安定解析を行なっている。この研究は従来の不安定性解析と統計的アプローチの結合をねらった点で画期的なものと言えるが、不安定性解析の内容は遅れ距離等の導入など流砂機構の面から見ると問題が残されたままである。本章は著者らがとくに掃流砂の固有の性質に着目して行なった不安定性解析^{2), 4)} をこのようなスペクトルを対象としたものに改良するための基礎となるべきものである。

さて、著者らはポテンシャル流理論を修正し、次のような底面せん断応力を与える式を用いている。 $\tau'(x)$ を変動分、 τ_0 を平均値とし、更に線型化して式(14), (15)を考慮すると

$$\tau'(x)/\tau_0 = 2u(x)/U_0 - (\tau_2/Fr^2) \{ \partial(\xi - y)/\partial x \} = 2\kappa \mathcal{F}^{-1} [F_*(\kappa) Y(\kappa, t)] - \frac{i\kappa\tau_2}{Fr^2} \mathcal{F}^{-1} [\{ 1 - R_*(\kappa) \} Y(\kappa, t)] \quad (18)$$

ここで τ_2 は一つのパラメータである。これより容易に水面変動、流速変動、底面せん断応力の変動の波数スペクトルが初期砂面擾乱の波数スペクトルと関連づけられ、移動床相互作用系の確率過程としての性質が比較的明瞭なものとなった。従って初期擾乱の発生から不安定機構までを統一的に、しかも統計的性質を含めて明らかにするための展望が開けたと言える。

6. 移動床砂面の不安定性

第5章に示した考察の継続として移動床砂面の不安定性が論じられるはずであるが、位相差の表現などに若干の問題点が残っており、ここでは単一成分について検討することとする。不安定性を生じ擾乱が成長する初期の段階を記述する場合には単一波の解析では充分でないが、不安定性を生じるか否かの問題ではこれで充分である。

砂面及びその上のせん断応力分布を

$$y(x, t) = a \sin \kappa(x - U_b t) \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\tau'(x, t)/\tau_0 = r_\tau a \sin \{ \kappa(x - U_b t) - \phi_\tau \} \quad \dots\dots\dots (20)$$

と表わすと、式(18)より次の結果が得られる。

$$\sin \phi_\tau = (r_2 \kappa / F r^2) (R_* - 1) / r_\tau \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$\cos \phi_\tau = 2 F_* \kappa / r_\tau \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$r_\tau^2 = (r_2 \kappa / F r^2)^2 (R_* - 1)^2 + 4 F_*^2 \kappa^2 \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここに ϕ_τ は底面せん断応力と河床形状の位相差である。その大きさはパラメータ r_2 の大きさに依存するが ϕ_τ が何象限の角かは r_2 に無関係に決まる。この結果が図-6に示され、とくに $r_2 = 1.0$ の場合の ϕ_τ の値は図-7

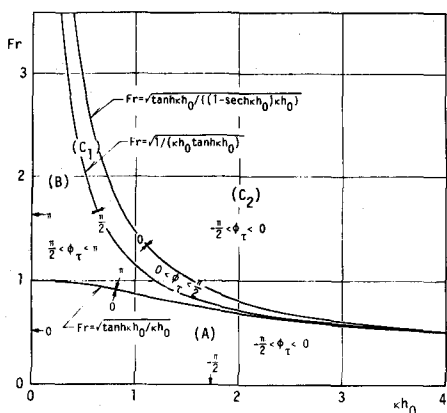


図-6 河床形状と底面せん断応力の位相差

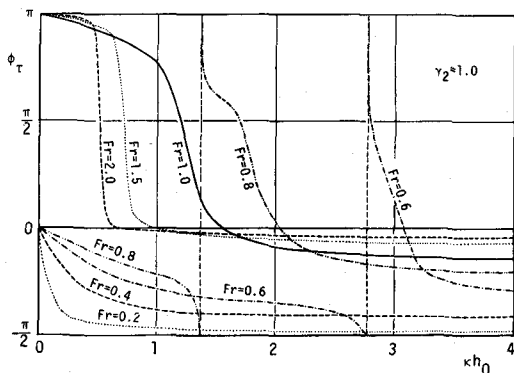


図-7 河床形状と底面せん断応力の位相差

に示される。図-7によると水深の局所変化の効果による修正を施す前のポテンシャル流モデル ($\tau = \rho U^2$ と考える) との相違が良くわかる。

一方、流砂の遅れ距離 $\delta_{B\tau}$ (局所流砂量 $q_B(x)$ の $\tau(x)$ に対する遅れ) は次のように求められる。すなわち非平衡性を考慮した流砂量式(2)に step length の分布(4)を代入して次式が得られる。

$$q_B(x)/q_{B0} = \frac{r_p a}{A \{ (1/A)^2 + \kappa^2 \}} \left[\frac{1}{A} \sin \{ \kappa(x - U_b t) - \phi_p \} - \kappa \cos \{ \kappa(x - U_b t) - \phi_p \} \right] \quad \dots\dots\dots (24)$$

pick-up rate とせん断応力の間に位相差はなく、 $r_p = r_\tau$ 、 $\phi_p = \phi_\tau$ であるので上式を

$$q_B(x)/q_{B0} = r_B a \sin \{ \kappa(x - U_b t - \delta_{B\tau}) - \phi_\tau \} \quad \dots\dots\dots (25)$$

と比較することから、次の結果を得る。

$$\sin \kappa \delta_{B\tau} = \kappa A / \sqrt{1 + (\kappa A)^2}$$

$$\cos \kappa \delta_{B\tau} = 1 / \sqrt{1 + (\kappa A)^2}$$

パラメータ $r_1 = A/h$ を導入すると、 $\kappa \delta_{B\tau}$ と κh_0 の関係は図-8に示されるようになり、とくに r_1 の値にかかわらず $\kappa \delta_{B\tau}$ は第1象限に限定されることがわかる。

以上の結果及びその他の位相差をまとめると表-1 のようになり、不安定解析の内容がこれまでより明瞭

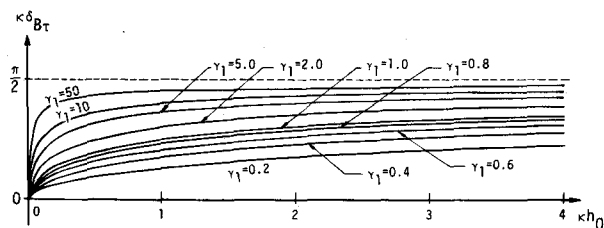


図-8 掃流砂の遅れ距離

表-1 移動床砂面の不安定要因としての遅れ距離・位相差

Region	Model of Flow over a Wavy Bed			Model of Bed Load	Continuity Eq. of Sediment Transport	Phase Lag	Bed Surface Behaviors
	Potential Flow		Resistance Law	Stochastic Model		Total	Possibility of Sand Waves (Unstable Regions)
	Water Surface ϕ_s	Local Velocity ϕ_u	Shear Stress ϕ_τ	$q_B \sim \tau$ κq_{BT}	$\partial y / \partial t \sim q_B$ ϕ_{yB}	$\partial y / \partial t \sim y(x)$ ϕ_y	
A	π	0	$-\frac{\pi}{2} \sim 0$	$0 \sim \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$0 \sim \pi$	Ripples or Dunes ($0 \sim \pi/2$)
B	0	π	$\frac{\pi}{2} \sim \pi$			$\pi \sim 2\pi$	Antidunes moving upstream ($3\pi/2 \sim 2\pi$)
C ₁	0	0	$0 \sim \frac{\pi}{2}$			$\frac{\pi}{2} \sim \frac{3}{2}\pi$	Stable
C ₂			$-\frac{\pi}{2} \sim 0$			$0 \sim \pi$	Antidunes moving downstream ($0 \sim \pi/2$)

にできた。表に示される領域 A, B, C_1, C_2 は図-6 に指示したものと共通である。これらより、Froude 数, κh_0 の全領域で砂面の安定性が検討できるが、正確にはここでは掃流砂のみを対象としているのでいわゆる lower regime についてのものと考えるべきである。すなわち表-1 を見てわかるように dunes または ripples が発達する可能性が確認された。

7. あとがき

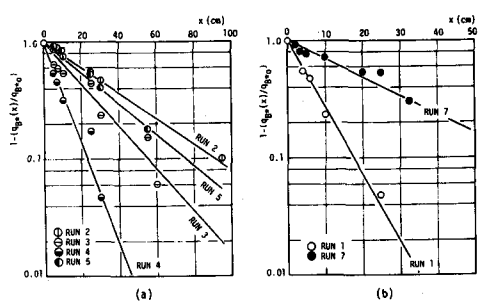
本論文では lower regime における小規模河床形態の発生ならびに初期発達機構を明確にするため、これに重要な役割を果たす掃流砂運動を中心とした不規則性の強い相互作用系の性質の検討を行なった。まずこの相互作用系の仕組を明らかにし、不規則性の重要性を指摘するとともに、こうした対象に対する取り扱い方を検討した。とくに、掃流過程を中心としたシステムの特性を調べ初期砂面擾乱の発生過程を説明した。さらに、こうした初期擾乱の安定性を検討し、とくに dunes, ripples が形成される仕組を明らかにできた。今後、初期発達過程をその統計的性質を含めて記述するモデルを得、実験結果と対応させるところまで研究を進めたいと考える。

参考文献

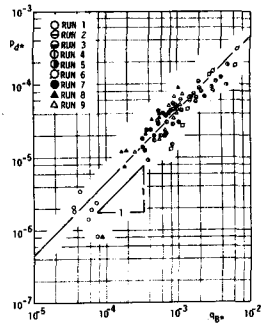
- 1) 中川・辻本・宮本：16 mm 撮影による掃流砂運動の特性量解析と流砂の平衡状態について，京大防災研年報 21B-2, 1978.
- 2) 中川・辻本：砂れきの運動に伴う移動床砂面の擾乱発生過程，土木学会論文報告集，第 291 号，1979.
- 3) Einstein, H. A.: Der Geschiebetrieb als Wahrscheinlichkeits-problem, Verlag Rascher, Zurich, 1937.
- 4) 中川・辻本：移動床砂面の不安定要因としての遅れ距離・位相差，投稿中，1979.
- 5) 中川・辻本・細川：移動床における掃流砂れきの不規則運動性状について，京大防災研年報 22B-2, 1979.
- 6) 篠原・椿：河床砂礫の移動機構に関する一考察，九大応用力学研究所報，第 10 号，1957.

7) 高橋：河床れきの流送に関する実験的研究，第一報，新砂防，18-4，1966。
 8) 矢野・土屋・道上：砂れきの流送機構の確率過程としての特性について，京大防災研年報11B，1968。
 9) 中川・辻本：水流による砂れきの移動機構に関する基礎的研究，土木学会論文報告集，第244号，1975。
 10) 中川・辻本：掃流過程の確率モデルとその一般化，土木学会論文報告集，第291号，1979。
 11) 中川・辻本・細川：床面に沿って転動する粒子の運動と流体力について，第23回水理講演会論文集，1979。
 12) Jain, S.C. & J.F. Kennedy: The Spectral Evolution of Sedimentary Bed Forms, J.F.M., vol. 63, Pt 2, 1974。
 13) Hayashi, T.: Formation of Dunes and Antidunes in Open Channels, Proc. ASCE, HY 2, 1970。

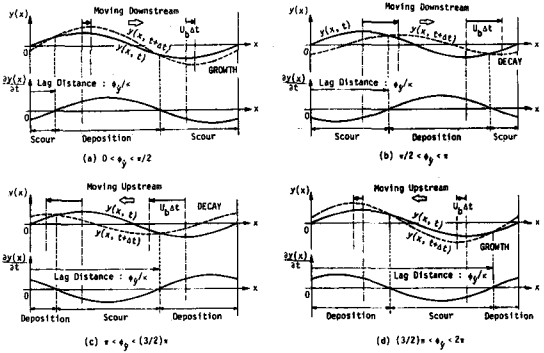
APPENDIX



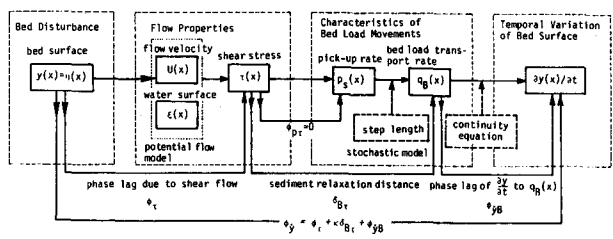
付図- 1 流砂量の場合的变化



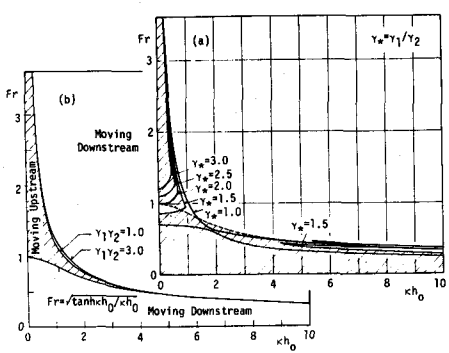
付図- 2 局所流砂量とdeposit rate



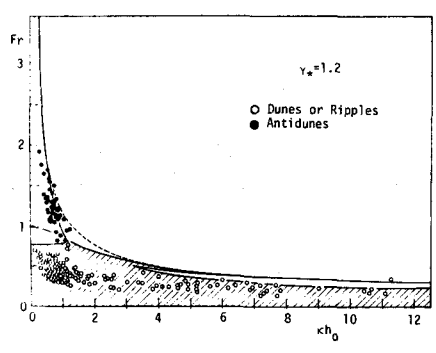
付図- 3 位相差による砂面の不安定性



付図- 4 不安定要因としての遅れ距離・位相差



付図- 5 砂面の不安定性解析結果



付図- 6 河床形態の実験結果との比較