第24回水理講演会論文集　1980年２月

流体中を沈降する粒子の乱流特性について
On the Turbulent Characteristics of a Settling Particle in Fluid

中央大学　理工学部　正会員　林　泰造
中央大学　大学院　学生員　○大橋正和

1. はじめに

古くより，粒子の沈降速度に関する理論的実験的研究が数多く発表されている。本研究では，流体中の単一粒子の運動について基本式に外力のあるBasset方程式を用い，粒子の抵抗係数に高Reynols数まで適用されるRubey型のものを採用し基礎方程式の拡張を行なった。そして，得られた積分微分方程式をAbelのVolterra型積分方程式の解析方法により，2階常微分方程式に書き直し，それを解くことによりBasset項の影響に検討を加えた。さらに乱流中の粒子の挙動について確率微分方程式を用い3次元的に解析を行なった。上記の手法は，ラグランジュ的解析法なため実験を行なうことは難かしいので一様流中における3次元的な拡がり幅の解析を行なった。座標軸は，下向きにz方向を定めた。

2. 沈降する粒子の運動方程式

沈降する単一球形粒子の運動方程式は，次式で表わされる。

$$\frac{1}{6}\pi d^3\rho_s\frac{dw}{dt}=\frac{1}{6}\pi d^3(\rho_s-\rho)g-\frac{1}{2}\rho w^2C_D\frac{\pi d^2}{4}-\frac{1}{12}\pi d^3\rho\frac{dw}{dt}$$
$$-6(\pi\rho\mu)^{1/2}\frac{d^2}{4}\int_0^t\frac{dw}{d\tau}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}+\alpha F(t) \qquad \cdots\cdots(1)$$

ここに，w：粒子沈降速度，ρ：流体の密度，ρ_s：粒子の密度，C_D：抵抗係数，μ：流体の粘性係数，ν：流体の動粘性係数，d：粒子径，F(t)：外力，α：係数

(1)式において，右辺第1項は重力項，第2項は流体抵抗による項，第3項は仮想質量による項，第4項はBasset力による項，第5項は流体による粒子への揺動力項である。

本研究では，抵抗係数を次式の様に表わす。

$$C_D=\frac{24}{R_e}+C_{D0} \qquad \cdots\cdots(2)$$

ここに，

$$R_e=\frac{wd}{\nu}$$

(2)式において $C_{D0}=2.0$ とおくとRubey (1933) の沈降速度式に対応する C_D の式が得られる（図－1）。

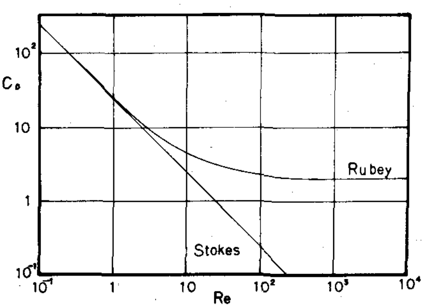

FIG.-1

(2)式を(1)式に代入し整理すると，

$$\frac{dw}{dt}=-Aw^2-Bw+C-D\int_0^t\frac{w'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau+\beta F(t) \qquad \cdots\cdots(3)$$

ここに，$A=\frac{3}{d(2s+1)}$，$B=\frac{36\nu}{d^2(2s+1)}$，$C=\frac{2(s-1)g}{2s+1}$，$D=\frac{18\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi\rho}\,d(2s+1)}$

$\beta=\frac{12\rho\alpha}{\pi d^3(2s+1)}$，$s=\frac{\rho_s}{\rho}$，$w'(\tau)=\frac{dw}{d\tau}$

Villat (1943) は，(1)式の外力が無い場合について抵抗係数にStokes則を用いその解析法を示したが，それに従い(3)式のBasset項を解析するために，両辺に $1/\sqrt{t-\tau}$ を掛け，両辺を0からtまで積分し整理する

と，

$$\int_0^t \frac{w'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau + \int_0^t \frac{Aw^2+Bw-C}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau + D\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^\tau \frac{w'(\tau_1)}{\sqrt{t-\tau_1}}\, d\tau_1$$

$$-\int_0^t \frac{\beta F(t)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau = 0 \qquad \cdots\cdots(4)$$

さらに，左辺第3項について変数変換をし演算を行なうと，

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^\tau \frac{w'(\tau_1)}{\sqrt{t-\tau_1}}\, d\tau_1 = \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau = 2\int_0^{\sqrt{t}} \varphi(t-\lambda^2)\, d\lambda$$

$$= 4\int_0^{\sqrt{t}} d\lambda \int_0^{\sqrt{t-\lambda^2}} w'(\tau-\lambda^2-\zeta^2)\, d\zeta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} dr \int_0^{\sqrt{t}} w'(\tau-r_1^2)\, r_1\, dr_1$$

$$= \pi\,[\,w(t)-w(0)\,] \qquad \cdots\cdots(5)$$

ここに，

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{w'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau\ , \qquad r = \lambda^2+\zeta^2$$

(5)式を(4)式に代入し，両辺を t で微分し，演算を行ない整理すると，次式の2階常微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2w}{dt^2} + (2B-\pi D^2+2Aw)\frac{dw}{dt} + (2AD+AB)w^2 + B^2w$$

$$= BC - \frac{CD}{\sqrt{t}} + \beta BF(t) + \beta F'(t) - \beta D\frac{F(0)}{\sqrt{t}} - \beta D\int_0^t \frac{F'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau \qquad \cdots\cdots(6)$$

(6)式は，(3)式に比べ w(t) に関する積分項が無く解析する場合便利である。

3. Basset 項の影響について

まず乱流中の粒子の沈降速度を求める前に準備として静水中における沈降速度を求めて Basset 項の影響について考える。(6)式を静水中の基本式に書き換えると，

$$\frac{d^2w}{dt^2} + (2B-\pi D^2)\frac{dw}{dt} + B^2w + A\frac{dw^2}{dt} + (2AD+AB)w^2$$

$$= BC - \frac{CD}{\sqrt{t}} \qquad \cdots\cdots(7)$$

Basset 項を消去し，抵抗係数が(2)式に従う場合の静水中の沈降速度は，

$$w(t) = w_f - \frac{k w_f \exp(-kt)}{A w_f \exp(-kt) - (A w_f - k)} \qquad \cdots\cdots(8)$$

ここに，

$$w_f = \frac{-B+\sqrt{B^2+4AC}}{2A}\ , \qquad k = 2Aw_f + B$$

(8)式において $t\to\infty$ とすると，

$$w(\infty) = w_f \qquad \cdots\cdots(9)$$

よって(7)式の w を(9)式の $w(\infty)$ で無次元化した沈降速度を W(t) とし，(7)式の方程式の近似解を求める。

$$\frac{d^2W}{dt^2} + (2B-\pi D^2)\frac{dW}{dt} + B^2W + Aw_f\frac{dW^2}{dt} + (2ADw_f + ABw_f)W^2 = \frac{BC}{w_f} - \frac{CD}{w_f\sqrt{t}}$$

$$\cdots\cdots(10)$$

上式の解が，Wの多項式で表わされるとする。

$$a_1 W + a_2 W^2 + a_3 W^3 + \cdots\cdots = \ell\,\phi(t) \qquad \cdots\cdots(11)$$

すると，Wの第１近似として次式が求まる。

$$\frac{d^2 W_{(1)}}{dt^2} + (2B - \pi D^2)\frac{dW_{(1)}}{dt} + B^2 W_{(1)} = \frac{BC}{w_f} - \frac{CD}{w_f\sqrt{t}} \qquad \cdots\cdots(12)$$

(12)式の補助方程式は，

$$\eta^2 + (2B - \pi D^2)\,\eta + B^2 = 0 \qquad \cdots\cdots(13)$$

よって，

$$\eta = -\frac{2B - \pi D^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(2B - \pi D^2)^2}{4} - B^2} \qquad \cdots\cdots(14)$$

これより，$\rho_s > (5/8)\,\rho$ の場合(13)式は虚根をもち，また方程式の係数の特性より虚根をもつ場合は，

$$\rho_s > \frac{7}{4}\,\rho \qquad \cdots\cdots(15)$$

となる。よって，(15)の条件の下での(12)式の解は

$$\begin{aligned} W_{(1)}(t) = {} & \frac{C}{Bw_f} + \frac{C}{qw_f} e^{-pt} \sin qt \\ & - \frac{Ce^{-pt}}{Bqw_f}(p \sin qt + q \cos qt) \\ & + \frac{e^{-pt}}{qw_f}\left(\sin qt \int_0^t \frac{e^{p\tau}}{\sqrt{t}} \cos q\tau\, d\tau \right. \\ & \left. - \cos qt \int_0^t \frac{e^{p\tau}}{\sqrt{t}} \sin q\tau\, d\tau \right) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(16)$$

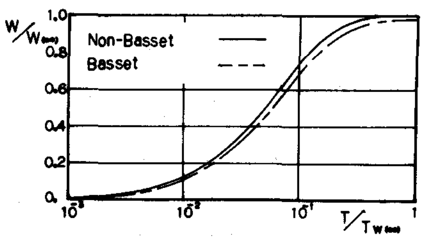

FIG.-2

ここに，

$$p = \frac{(2B - \pi D^2)}{2}$$

$$q = \sqrt{B^2 - \frac{(2B - \pi D^2)^2}{4}}$$

$t \to \infty$ とすると

$$W_{(1)}(\infty) = \frac{C}{Bw_f}$$

(16)式を $\rho_s = 2.65$ として図示したのが図－２である。

次に，(12)式の解を考慮して第２近似としては，

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + (2B - \pi D^2)\frac{d}{dt} + B^2\right) W_{(2)}$$

$$= -\left[Aw_f \frac{d}{dt} + (2ADw_f + ABw_f) \right] W_{(1)}^2 \qquad \cdots\cdots(18)$$

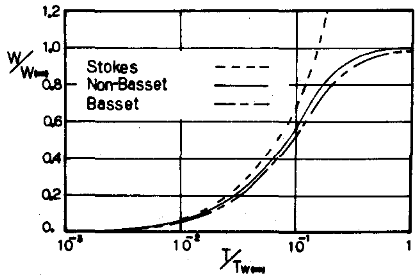

FIG.-3

上式を計算し，(10)式の解Wを図示したのが図－３である。

図－２，図－３から明らかな様に粒子の比重が 2.65 とい

う粒子に対しては，Basset 項は沈降速度に対して数%の影響しか与えないことがわかった。

4. 乱流中における沈降速度と拡がりの分布について

乱流中の粒子の沈降については，基本式(1)において外力をランダムな力と考えると運動は3次元的になり，方程式は確率微分方程式となる。前節の結果より粒子の比重がBasset力の影響が小さい程度に大きく，また粒子径は十分小さいと仮定し，x方向に一様流 u_0 がある場合の粒子の運動は，次式のLangevin方程式で表わされる。

$$du = -Budt + \beta F_x(t)\,dt \qquad \cdots\cdots(19)$$

$$dv = -Bvdt + \beta F_y(t)\,dt \qquad \cdots\cdots(20)$$

$$dw = -(Bw + C)\,dt + \beta F_z(t)\,dt \qquad \cdots\cdots(21)$$

ここに，u，v，w：x，y，z 方向の速度成分

$F_x(t)$, $F_y(t)$, $F_z(t)$：x，y，z 方向の独立な平均0のランダムな正規性外力で γ を強度とすると相関関数は次式で表わされる。

$$\overline{F_x(t)F_x(t+\tau)} = \gamma\delta(\tau) \qquad \overline{F_y(t)F_y(t+\tau)} = \gamma\delta(\tau)$$

$$\overline{F_z(t)F_z(t+\tau)} = \gamma\delta(\tau)$$

(19)〜(21)式を解くと

$$u = u_0 + \beta\int_0^t e^{-B(t-\tau)} F_x(\tau)\,d\tau \qquad \cdots\cdots(22)$$

$$v = \beta\int_0^t e^{-B(t-\tau)} F_y(\tau)\,d\tau \qquad \cdots\cdots(23)$$

$$w = \frac{C}{B}(1-e^{-Bt}) + \int_0^t e^{-B(t-\tau)} F_z(\tau)\,d\tau \qquad \cdots\cdots(24)$$

ここで，(22)〜(24)式の平均をとると，

$$\overline{u} = u_0, \quad \overline{v} = 0, \quad \overline{w} = \frac{C}{B}(1-e^{-Bt}) \qquad \cdots\cdots(25)$$

これは，ランダムな外力が働かない静水中の沈降と同じ式が得られる。次に分散を計算すると，

$$\sigma_u^2 = \frac{\gamma\beta^2}{2B}(1-e^{-2Bt}) \qquad \cdots\cdots(26)$$

$$\sigma_v^2 = \frac{\gamma\beta^2}{2B}(1-e^{-2Bt}) \qquad \cdots\cdots(27)$$

$$\sigma_w^2 = \frac{\gamma\beta^2}{2B}(1-e^{-2Bt}) \qquad \cdots\cdots(28)$$

上記に示した結果は，粒子をラグランジュ的に解析したものであり，実験的に計測することは大変難かしい。そこで，(19)〜(20)式より，x，y，z 方向の拡がりの確率密度関数を求める。まず，(19)〜(21)式より求めた，u，v，w について，x，y，z 方向の拡がりの平均と分散を求める。拡がり，x，y，z の平均は，

$$\overline{x} = u_0 t, \quad \overline{y} = 0, \quad \overline{z} = \frac{C}{B^2}(Bt + e^{-Bt} - 1) \qquad \cdots\cdots(29)$$

分散は，

$$\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_z^2=\frac{\gamma\beta^2}{B^3}\left(Bt-\frac{3}{2}+2e^{-Bt}-\frac{1}{2}e^{-2Bt}\right) \qquad \cdots\cdots (30)$$

拡がり幅の2乗平均は，

$$\bar{x}^2=u_0^2t^2+\frac{\gamma\beta^2}{B^3}\left(Bt-\frac{3}{2}+2e^{-Bt}-\frac{1}{2}e^{-2Bt}\right) \qquad \cdots\cdots (31)$$

$$\bar{y}^2=\frac{\gamma\beta^2}{B^3}\left(Bt-\frac{3}{2}+2e^{-Bt}-\frac{1}{2}e^{-2Bt}\right) \qquad \cdots\cdots (32)$$

$$\bar{z}^2=\frac{C^2}{B^4}\left\{B^2t^2+1-2Bt+(2Bt-2)e^{-Bt}+e^{-2Bt}\right\}$$

$$+\frac{\gamma\beta^2}{B^3}\left(Bt-\frac{3}{2}+2e^{-Bt}-\frac{1}{2}e^{-2Bt}\right) \qquad \cdots\cdots (33)$$

次に確率密度関数は，基本式が線型であるため次の様に表わせる。

$$p_r(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\exp\left[-\frac{(x-u_0t)^2}{2\sigma_x^2}\right] \qquad \cdots\cdots (34)$$

$$p_r(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}}\exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right] \qquad \cdots\cdots (35)$$

$$p_r(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}}\exp\left[-\frac{\{z-(C/B^2)(Bt+e^{-Bt}-1)\}^2}{2\sigma_x^2}\right] \qquad \cdots\cdots (36)$$

(34)～(36)式によるx，y，z方向の拡がりの分布を図示したのが図－4，図－5，図－6である。

5. 考　察

Basset項の影響については，基本式を2階常微分方程式に書き直し，それを解析したが，砂粒子の様に粒子の比重が流体に比べて大きいと考えられる場合には沈降速度に対する影響は小さいと考えてよいことがわかった。特に(13)式の補助方程式は，$\rho_s>5\rho/8$の場合根が虚根となることを示し，この場合はさらに方程式の係数の特性より$\rho_s>7\rho/4=1.75\rho$という条件が得られた。すなわち$5\rho/8<\rho_s<7\rho/4$の場合には，解が存在しないというVillat(1943)と同じ結果が得られた。これより，一般に考えられる沈降現象は，すべてこの虚根に基づいて解析されるという結果となりBasset項の存在が解析上大きな困難を

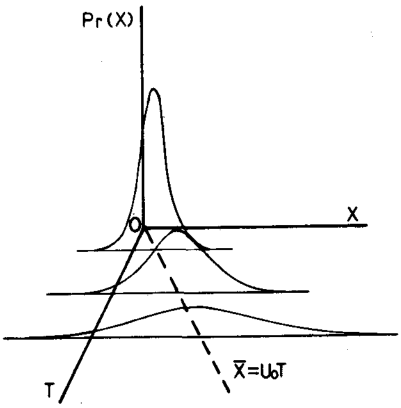

FIG.-4

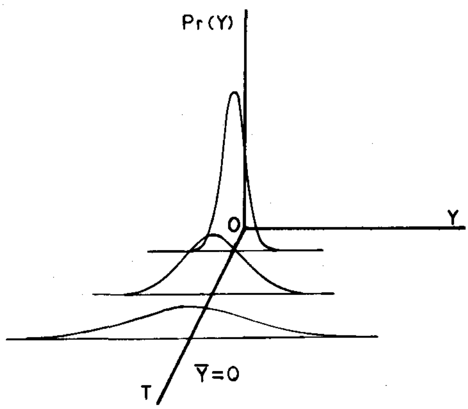

FIG.-5

引き起こしているばかりか沈降速度(正弦的になる)の物理的意味がはっきりしなくなる。この困難を避けるため筆者らは，現在流体と粒子との遅れに関して別の方程式系を研究中である。また(6)式における外力項については，確定的な関数の場合，そのまま解析することが可能である。また，一様流のある乱流中における粒子の挙動については，確率微分方程式を用いることにより各成分毎の沈降速度と拡がり幅は容易に計算できる。乱流中において粒子の抵抗則が(2)式の様に表わせる場合については現在解析中である。今後，これらの結果について実験を行ない理論との比較を試みたいと考えている。

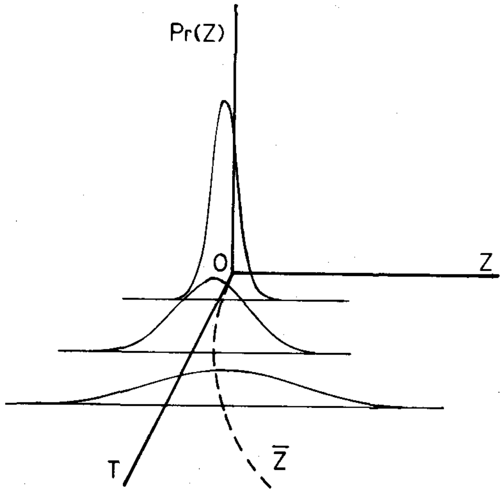

FIG.-6

参考文献

1) Villat, H. : " Leçons sur les fluides visqueux ", Gauthier−Villars, (1943).

2) Hughes, R. R. and Gilliand, E. E. : The mechanics of drops, Chem. Eng. Prog., vol.48, № 10, Oct. (1952).

3) Rubey, W.W. : Settling velocities of gravel, sand, and silt, American J. of Science., vol 25, № 148, (1933).

4) Arminski, L. and Weinbaum, S : Effects of wareform and duration of impulse on the solution to the Basset−Langevin equation, Phys. Fluids, 22,(3), March, (1979).

5) 堀　淳一："ランジュバン方程式"，岩波書店，(1977).

6) 林　泰造・尾崎幸男：掃流砂量に関する基礎的研究，第23回水理講演会論文集，1979年2月.

7) 林　泰造・大橋正和：粒子沈降速度におけるBasset−Termの影響について，第7回関東支部年次研究発表会，1980年1月(投稿中).

8) Houghton, G. : The behavior of particles in a sinusoidal velocity field, Proc. Roy. Soc., A272, (1963).