

移流分散現象の確率論的解析

STOCHASTIC ANALYSIS OF LONGITUDINAL DISPERSION

大分工業高等専門学校 正会員 島田 晋

§ 1. まえがき

せん断乱流場における拡散現象では、Euler 流の解析手法(力学モデル)とLagrange 流の手法(確率モデル)を統一的に用いることが必要である。G.I.Taylor(イ)に始まる移流分散現象の解明は、J.W.Elder(ハ)やH.B.Fischer(ヘ)により理論と実験の面から、移流分散係数についてはほぼ満足される結果が得られている。また移流分散過程(流れ方向の濃度分布の経時変化)については、R.Aris(ロ)のモーメント法による解析、N.Yotsukura等(ニ)の数値解、他にモーメント法と数値解法を実施した(リ)があるが、十分に解析が行なわれているとは言いがたい。この講演論文では、確率論的解析方法(特性関数とフーリエ変換)により移流分散過程を解析し、濃度の空間分布と経時変化の代表例を図示し、移流分散過程を明らかにする。

< FUNDAMENTAL EQUATIONS >

equation of motion :

$$G + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\tau) = 0 \quad \text{-----} \quad (1)$$

pressure gradient divided by density :

$$G = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{U_*^2}{a/2} \quad \text{-----} \quad (2)$$

conservation of mass :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r e \frac{\partial c}{\partial r} \right) \quad \text{-----} \quad (3)$$

diffusivity by Reynolds's analogy :

$$e = -\tau / \frac{du}{dr} = -c / \frac{\partial c}{\partial r} \quad \text{-----} \quad (4)$$

mean velocity : $U_m = \langle u \rangle$ ----- (5)velocity defect : $v = U_0 - u$ ----- (6)mean velocity defect : $V_m = U_0 - U_m$ (7)

description of moving coordinate :

$$X = x - U_m t \quad \text{-----} \quad (8)$$

§ 2. 移流分散の基礎式

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (u - U_m) \cdot \frac{\partial c}{\partial X} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r e \frac{\partial c}{\partial r} \right) \quad \text{--} \quad (9)$$

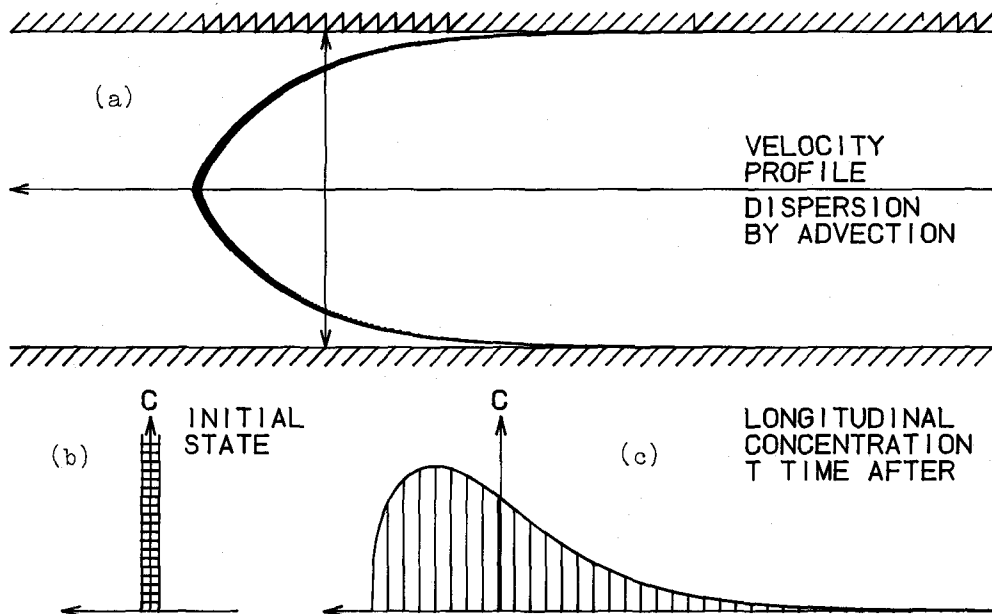


FIG.1 INITIAL DISPERSION OF CLOUD OF CONTAMINANT IN TURBULENT FLOW THROUGH A PIPE, SHOWING THE ASSYMMETRY CAUSED BY ADVECTION

G.I.Talor(イ) にならって円管内の流れについて移流分散の基礎式を導びき、この式が水路の形状によらないことを示し、移流分散係数の推算式を求める。ここで流速 u やせん断応力 τ 等は時間平均された量である。運動方程式(流体に関するつり合いの式)は(1)となり、流体の密度 ρ で除した圧力こう配を G で表わす。 $\uparrow$ はベキ乗、 U^* はマサツ速度、 a は円管の半径を示す。質量保存の式(拡散方程式)は流れ方向の拡散を無視して(3)となる。 c は物質の濃度(注目している流体粒子の存在確率)を表わす。運動量輸送と質量輸送の類似性より拡散係数は(4)から求められる。断面内最大流速を U_0 とすれば、速度欠損 v は(6)、平均速度欠損 V_m は(7)となる。(8)の移動座標を用いて(3)を書き直すと(9)になる。 v の累積分布関数 $F(v)$:(10)、確率密度関数 $f(v)$:(11)を用い(1)を考慮して、独立変数 r を v に変換すると(9)は(12)で表わされ、移流分散の基礎式が導びかれた。(12)は一次元の拡散現象における v と Z の結合密度関数についての式とも解釈できる。また移流分散係数は(13)の三重積分で示され、これを部分積分し径深を R とすれば(14)となる。ここで(12)、(13)または

cumulating distribution function of v :

$$F(v) = \Pr(V \leq v) = \frac{r \uparrow 2}{a \uparrow 2} \text{ ----- (10)}$$

probavility dencity function of v :

$$f(v) = \frac{dF}{dv} = \frac{2r}{a \uparrow 2} \frac{dr}{dv} \text{ ----- (11)}$$

fundamental equation of dispersion :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (V_m - v) \frac{\partial c}{\partial X} = - \frac{G}{f(v)} \frac{\partial}{\partial v} (F(v) \frac{\partial c}{\partial v}) \text{ (12)}$$

dispersion coefficient :

$$D = - \frac{1}{G} \int_{-\infty}^{\infty} (V_m - v) f \int_{-\infty}^v \frac{1}{F} \int_{-\infty}^v (V_m - v) f \cdot dv dv dv \text{ (13)}$$

hydraulic mean depth : $R = a/2$

using the partial integration :

$$D = \frac{R}{U^* \uparrow 2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{F(v)} \left[\int_{-\infty}^v (V_m - v) f(v) dv \right] \uparrow 2 \cdot dv \text{ (14)}$$

application to the turbulent

open channel flow :

$$v = -U^*/k \cdot \ln(1 - y/h) \quad (0 \leq y \leq h) \text{ --- (15)}$$

$$F(v) = 1 - y/h = 1 - \exp(-kv/U^*) \text{ --- (16)}$$

$$f(v) = k/U^* \cdot \exp(-kv/U^*) \cdot U(v) \text{ --- (17)}$$

$$\int_{-\infty}^v (V_m - v) f(v) dv = v \cdot \exp(-\frac{kv}{U^*}) \text{ ---- (18)}$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{h}{U^* \uparrow 2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v \uparrow 2 \cdot \exp(-2kv/U^*)}{1 - \exp(-kv/U^*)} dv \\ &= \frac{hU^*}{k \uparrow 3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q \uparrow 2 \cdot dq}{\exp(q)(\exp(q) - 1)} \\ &= \frac{hU^*}{k \uparrow 3} \Gamma(3) \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \uparrow 3} \right) = \frac{0.404}{k \uparrow 3} hU^* \end{aligned} \text{ (19)}$$

< STOCHASTIC ANALYSIS >

characteristic function of v :

$$Q(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cdot \exp(iwv) dv \text{ ----- (20)}$$

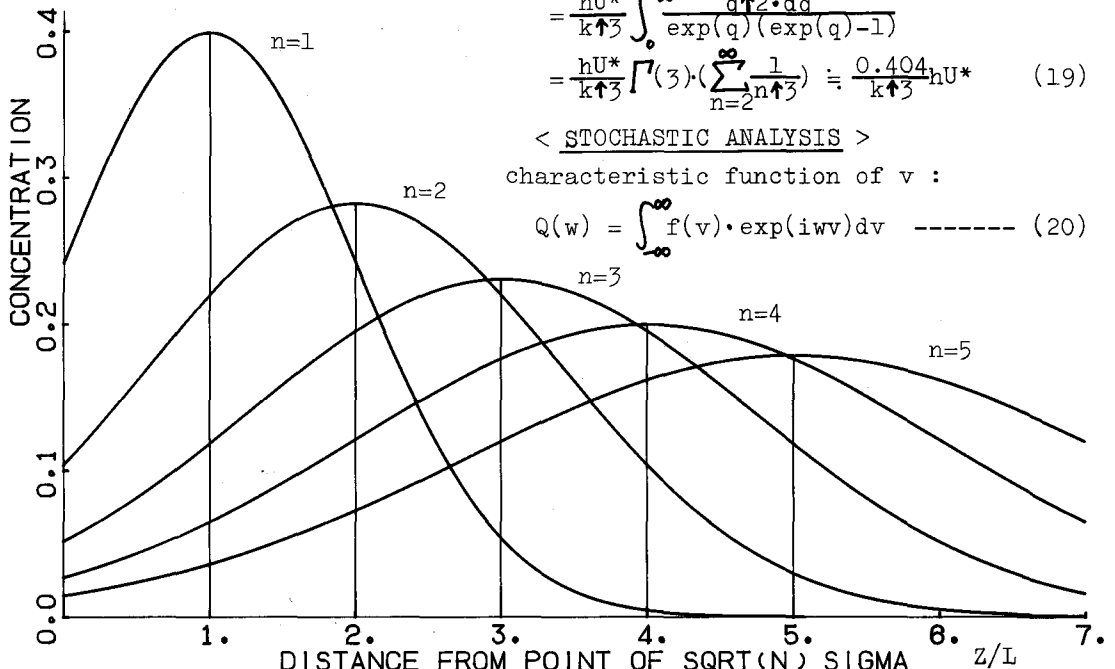


FIG.2 SPACE DISTRIBUTION OF CONCENTRATION
(NORMAL DIFFUSION PROCESS)

(14)は独立変数が v となり，水路の形状によらない式といえる。(12)で c の所に v を代入すれば右辺は $-G$ となり(1)を満足していることが確認できる。次にJ.W.Elder(ハ)によって得られている二次元開水路における分散係数を速度欠損(15)，累積分布関数(16)，確率密度関数(指数分布)：(17)を用いて求めると(19)になる。 k はKármán定数， $U(v)$ は単位階段関数を示す。

§ 3. 確率論的解析

確率論的解析方法(特性関数・フーリエ変換・たたみこみ定理等)により，原点に集中的に投入された物質の t 時間後の流れ方向の断面平均濃度分布 $C(Z, t)$ を求める。 v の特性関数は確率密度関数のプラス i フーリエ変換として(20)で表わされ，平均値 V_m は(21)，分散 V_s は(22)，3次キュムラント V_3 は(23)，4次キュムラント V_4 は(24)となる。断面内の流体粒子がある相関時間 T だけは，確率密度関数が $f(v)$ で表わされる速度で動くものと考え，初期濃度分布がFIG.1(b)に示すようなデルタ関数のとき，移流作用によりFIG.1(a)のような分布形状となる(チ)。これを流れ方向の濃度分布 $C(Z, T)$

mean value of v :

$$V_m = \langle v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v \cdot f(v) dv \quad \text{-----} \quad (21)$$

variance of v :

$$V_s = \langle (v - V_m)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (v - V_m)^2 f(v) dv \quad \text{---} \quad (22)$$

third cumulant of v :

$$V_3 = \langle (v - V_m)^3 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (v - V_m)^3 f(v) dv \quad (23)$$

fourth cumulant of v :

$$V_4 = \langle (v - V_m)^4 \rangle - 3 \cdot V_s^2 \quad \text{-----} \quad (24)$$

concentration at T time after release :

$$C(Z, T) dZ = f(v) dv = f(Z/T) dZ/T$$

$$\therefore C(Z, T) = f(Z/T)/T \quad \text{-----} \quad (25)$$

plus- i Fourier transform of $C(Z, T)$:

$$H(b) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{Z}{T}\right) \exp(ibZ) \frac{dZ}{T}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \exp(ibTv) dv = Q(bT) \quad (26)$$

concentration at $nT=t$ time after :

$$C(Z, nT) = \int_{-\infty}^{\infty} C(Z-Y, (n-1)T) \cdot C(Y, T) dY \quad (27)$$

convolution of $C(Z, (n-1)T)$ and $C(Z, T)$:

$$C(Z, nT) = C(Z, (n-1)T) * C(Z, T) \quad \text{---} \quad (28)$$

plus- i Fourier transform of $C(Z, nT)$:

$$M(b, n) = \int_{-\infty}^{\infty} C(Z, nT) \exp(ibZ) dZ \quad \text{---} \quad (29)$$

$$M(b, n) = M(b, n-1) \cdot H(b) = H(b)^n \quad (30)$$

the second characteristic function

(i.e. cumulant function) :

$$K = \ln H(b) \quad \text{-----} \quad (31)$$

$$K_n = \ln M(b, n) = n \cdot \ln H(b) \quad \text{----} \quad (32)$$

$$\therefore K_n = n \cdot K \quad \text{-----} \quad (33)$$

from inversion formula :

$$C(Z, nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(b, n) \exp(-ibZ) db \quad (34)$$

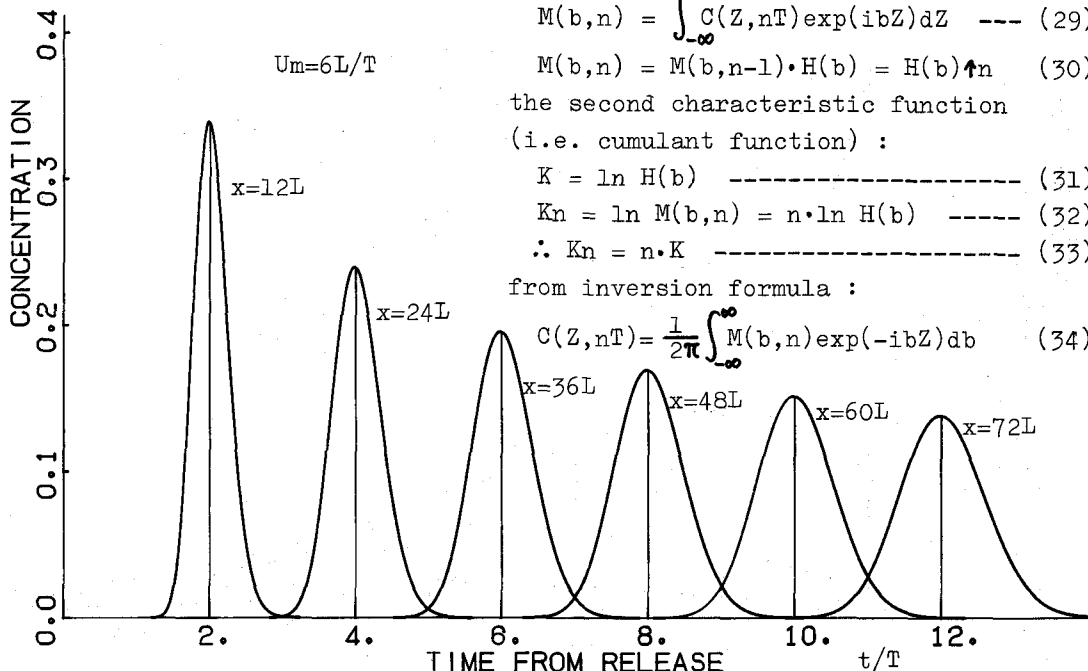


FIG.3 CHANGE OF CONCENTRATION AT FIXED POINT
(NORMAL DIFFUSION PROCESS)

として求めると, FIG.1(c) に示すような断面内流速の確率密度と同形の(25)となる。ここで Z は分散雲先端からの距離である。 $C(Z, T)$ のプラスiフーリエ変換 $H(b)$ は, v の特性関数 $Q(w)$ においてパラメーター w を bT に置き換えたものに等しくなる(26)。次に nT 時間後の濃度分布は, (27) と (28) に示すように $(n-1)T$ 時間後と T 時間後の濃度分布のたたみこみとして得られる。 $C(Z, nT)$ のプラスiフーリエ変換 $M(b, n)$: (29) は, (30) のように1ステップの変化(推移確率)の特性関数 $H(b)$ の n 乗として表わされる。また1ステップと n ステップの第二種特性関数(即ちキュムラント関数): (31)・(32) は, (33) で結ばれ偶然累加現象であることを示している。そして逆変換の公式(34)からも t 時間後の濃度分布が求められる。濃度分布の重心を示す Z の平均値 Z_m は(35), 分散 Z_s は(36), 3次キュムラント Z_3 は(37), 4次キュムラント Z_4 は(39)となり, 濃度分布が正規分布からど

$$\text{mean value of } Z : Z_m = \langle Z \rangle = nV_mT \quad (35)$$

$$\text{variance : } Z_s = \langle (Z - Z_m)^2 \rangle = nV_s(T^2) \quad (36)$$

third cumulant of Z :

$$Z_3 = \langle (Z - Z_m)^3 \rangle = nV_3(T^3) \quad (37)$$

skewness of Z :

$$S = Z_3 / Z_s^{3/2} = V_3 / V_s^{3/2} \sqrt{n} \sim \sqrt{T/t} \quad (38)$$

fourth cumulant of Z :

$$Z_4 = \langle (Z - Z_m)^4 \rangle - 3Z_s^2 = nV_4(T^4) \quad (39)$$

excess of Z :

$$E = Z_4 / Z_s^2 = V_4 / V_s^2 n \sim T/t \quad (40)$$

dispersion coefficient :

$$D = Z_s / (2t) = V_s T / 2 \quad (41)$$

correlation time : $T = 2D / V_s$ (42)

< NORMAL DIFFUSION PROCESS >

mean value of v : $V_m = \langle v \rangle$

variance of v : $V_s = \langle (v - V_m)^2 \rangle$

probability density function of v :

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V_s}} \exp\left(-\frac{(v - V_m)^2}{2V_s}\right) \quad (43)$$

$$Q(w) = \exp(iwV_m + (iw)^2 \cdot V_s) \quad (44)$$

$$C(Z, T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V_s \cdot T}} \exp\left(-\frac{(Z - V_m T)^2}{2V_s T}\right) \quad (45)$$

$$H(b) = \exp(ibTV_m + (ibT)^2 \cdot V_s) \quad (46)$$

$$M(b, n) = \exp(nibTV_m + n(ibT)^2 \cdot V_s) \quad (47)$$

$$C(Z, nT) = \frac{1}{\sqrt{2\pi nV_s \cdot T}} \exp\left(-\frac{(Z - nV_m T)^2}{2nV_s \cdot T}\right) \quad (48)$$

mean value of Z : $Z_m = nV_mT = V_m \cdot t$ (49)

variance of Z : $Z_s = nV_s(T^2) = V_s T t$ (50)

skewness of Z : $S = 0$ (51)

excess of Z : $E = 0$ (52)

in FIG.2 : $Z_m = nL$, $\sigma = \sqrt{Z_s} = \sqrt{n} \cdot L$

in FIG.3 : $Z_m = 6L \cdot t/T$

$$\sigma = \sqrt{Z_s} = L\sqrt{t/T}$$

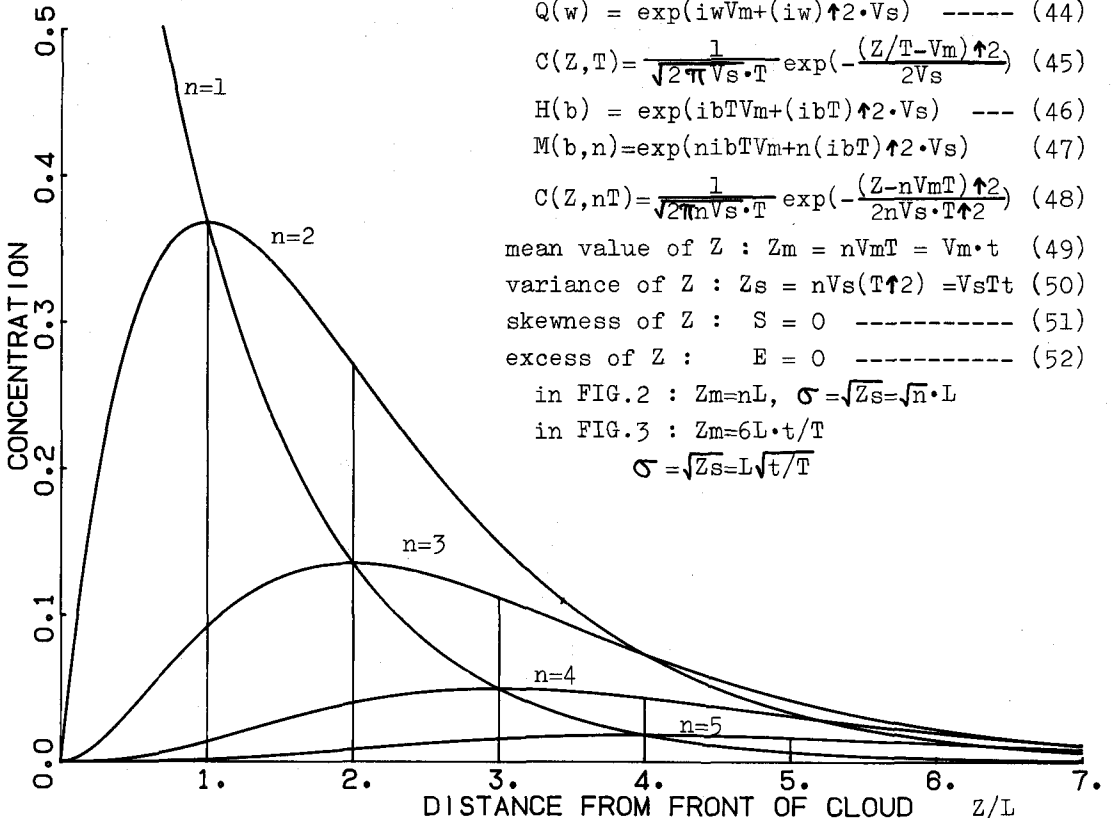


FIG.4 SPACE DISTRIBUTION OF CONCENTRATION
(TWO DIMENSIONAL TURBULENT OPEN CHANNEL FLOW)

の程度ずれているかを示す、ゆがみ S は (38) のように経過時間の平方根に逆比例し、超過 E は (40) で表わされ経過時間に逆比例することが導びかれる。また前節で求められた分散係数 D は (41) のようにも表現できて、断面内の流体粒子に関する相関時間 T は (42) から計算できる。

§ 4. 正規拡散過程

正規拡散過程（一様乱流場における拡散現象）は、平均値と分散だけで記述できる過程であり、3 次以上の高次キュムラントはすべて 0 である。 v の確率密度関数は (43)、 v の特性関数は (44) となり、 T 時間後の濃度分布は (45)、そのフーリエ変換は (46)、 nT 時間後の濃度分布のフーリエ変換は (47)、濃度分布も正規分布で (48) と示される。また Z の平均値 Z_m は (49)、分散 Z_s は (50) で表わされ、ゆがみ S : (51) と超過 E : (52) は 0 である (ホ)。FIG. 2 は正規拡散過程における濃度の空間分布を示し、FIG. 3 は固定

< TURBULENT OPEN CHANNEL FLOW >

probability density function of v :

$$f(v) = \frac{k}{U^*} \exp\left(-\frac{kv}{U^*}\right) \cdot U(v) \quad (53)$$

$\therefore$ unit step function : $U(v)$

$$Q(w) = 1/(1-iwU^*/k) \quad (54)$$

$$\text{mean value of } v : V_m = U^*/k \quad (55)$$

$$\text{variance of } v : V_s = (U^*/k)^2 \quad (56)$$

third cumulant of v :

$$V_3 = 2 \cdot (U^*/k)^3 \quad (57)$$

fourth cumulant of v :

$$V_4 = 6 \cdot (U^*/k)^4 \quad (58)$$

$$C(Z, T) = \exp(-Z/L) \cdot U(Z) \quad (59)$$

$$\therefore L = U^*T/k = V_mT = \sqrt{V_s} \cdot T \quad (60)$$

$$H(b) = 1/(1-ibL) \quad (61)$$

$$M(b, n) = 1/(1-ibL)^n \quad (62)$$

$$C(Z, nT) = \frac{(Z/L)^{n-1}}{(n-1)! \cdot L} \exp(-Z/L) \cdot U(Z) \quad (63)$$

$\therefore (n-1)! = \Gamma(n)$

$$\text{mean value of } Z : Z_m = nL = U^*t/k \quad (64)$$

variance of Z :

$$Z_s = n(L^2) = (U^*/k)^2 \cdot Tt \quad (65)$$

$$\text{skewness of } Z : S = 2/\sqrt{n} = 2\sqrt{T/t} \quad (66)$$

$$\text{excess of } Z : E = 6/n = 6 \cdot T/t \quad (67)$$

$$Z_s = 2 \cdot D \cdot t \quad (68)$$

$$T = \frac{2 \cdot D}{(U^*/k)^2} = \frac{0.808}{k} \frac{h}{U^*} \quad (69)$$

$$L = \frac{0.808}{k^2} h = 5 \cdot h \quad (70)$$

$$\text{in FIG. 4} \left\{ \begin{array}{l} \frac{Z}{L} = \frac{kU_0}{U^*} \frac{t}{T} - \frac{x}{L} \\ \text{in FIG. 5} \left\{ \begin{array}{l} \frac{kU_0}{U^*} = 7 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\text{in FIG. 5} \left\{ \begin{array}{l} \frac{kU_0}{U^*} = 7 \end{array} \right.$$

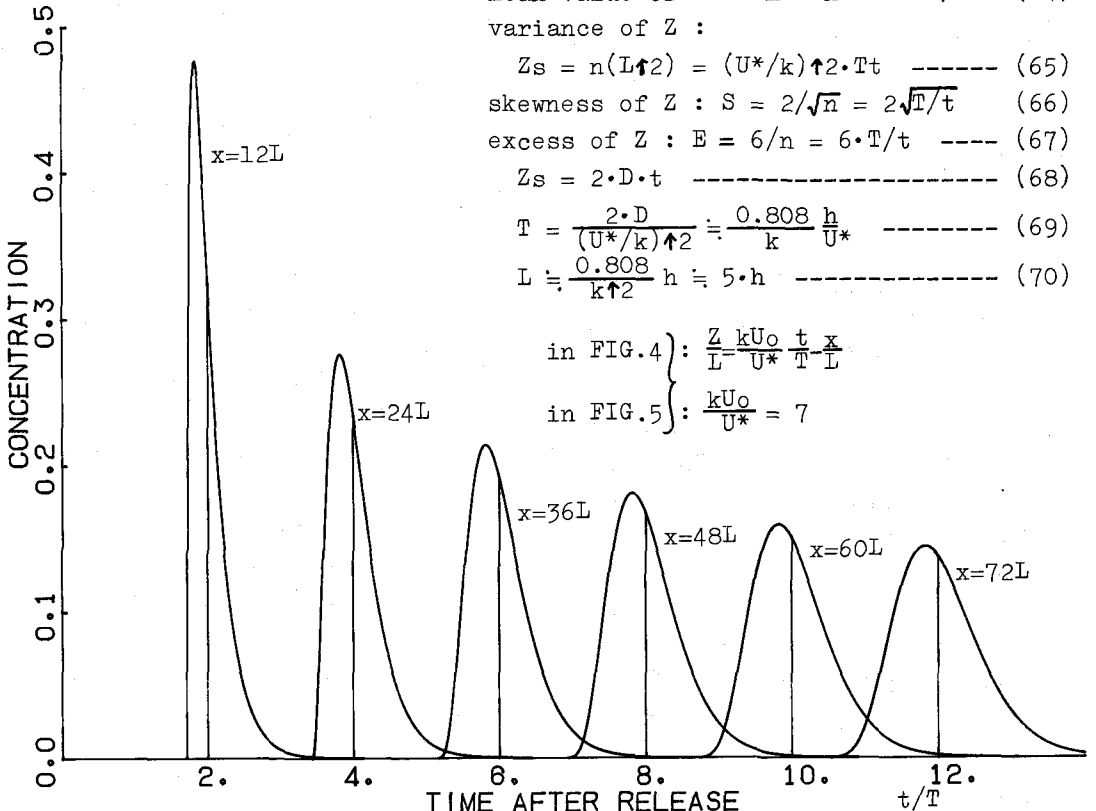


FIG.5 CHANGE OF CONCENTRATION AT FIXED POINT
(TWO DIMENSIONAL TURBULENT OPEN CHANNEL FLOW)

6点で測定した濃度の経時変化を表わす。

§ 5. 二次元開水路乱流

二次元開水路乱流における移流分散過程では、断面内の流速分布が対数分布(15)のとき、 v の確率密度関数は指数分布(53)となり、流れ方向の濃度分布はガンマ分布(63)で表わされる。 v の特性関数は(54)、平均値・分散・3次及び4次のキュムラントはそれぞれ(55)~(58)となる。 T 時間後の濃度分布が指数分布(59)で与えられ、 L は1ステップの拡散幅の大きさを示す。(59)のフーリエ変換が(61)となり、 n ステップ後の濃度分布のフーリエ変換が(62)となり、これはガンマ分布の特性関数を表わしている。従って流れ方向の濃度分布として(63)が得られる。濃度分布に関する平均値・分散・3次キュムラント・ゆがみ・4次キュムラント及び超過は(64)~(67)で与えられる。(68)の関数を用いて相関時間 T と1ステップの拡散幅 L を求めれば(69)・(70)になる。FIG.4は濃度の空間分布を示し、ガンマ分布そのものである。FIG.5は等距離の6点で観測した濃度の経時変化を示し、FIG.3に比較して重心の通過時刻がピークの後にずれており、相当長期間非対称な分布形状が続くことを表わしている。自然河川における観測例をFIG.6に示す(ト)。

§ 6. むすび(結論)

- 1) 移流分散係数を断面内流速の確率密度関数(11)と累積分布関数(10)を用いた積分形で表わした(14)。
- 2) 二次元開水路乱流の流速分布が対数分布(15)のとき、断面内流速の確率密度関数は指数分布(53)となり、流れ方向の濃度分布の経時変化はガンマ分布(63)で表現される。
- 3) 濃度分布が正規分布からどの程度ずれているかを示す、ゆがみは経過時間の平方根に逆比例し(38)、超過は経過時間に逆比例する(40)。
- 4) 断面内の流体粒子に関する相関時間 T は、移流分散係数の2倍を断面内流速の分散で除した値として求められる(42)。
- 5) 偶然累加現象として移流分散を取り扱えば、断面内混合の影響は主に相関時間 T (代表値・一定)を通して表われる。

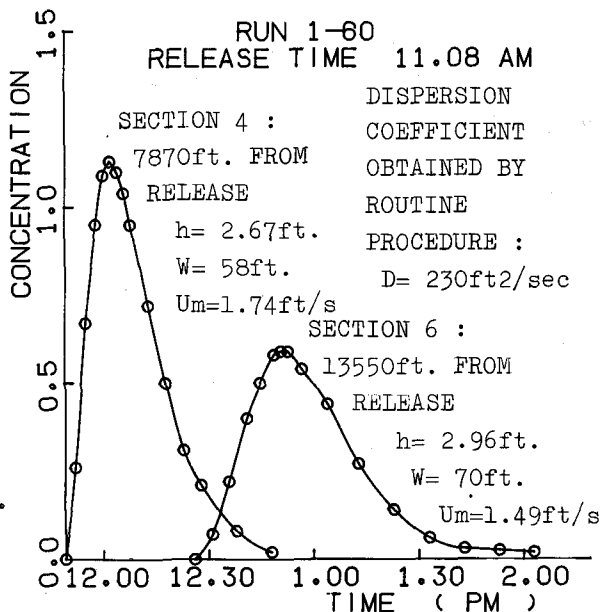


FIG.6 OBSERVED CURVES OF
CONCENTRATION VERSUS TIME
(DATA IN NATURAL STREAM)

< 参 考 文 献 >

- G.I.Taylor(1954):Proc. of the Royal Society, London, A.223, pp.446-468.
- R.Aris(1956):Proc. of the Royal Society, London, A.235, pp.67-77.
- J.W.Elder(1959):Jour. of Fluid Mechanics, Vol.5, pp.544-560.
- N.Yotsukura and M.B.Firing(1964):Proc. of A.S.C.E. Vol.90, HY5, pp.83-104.
- 岩佐義明・今本博健(1966):第10回水理講演会講演集, pp.81-86.
- H.B.Fischer(1967):Proc. of A.S.C.E. Vol.93, HY6, pp.187-216.
- H.B.Fischer(1968):Proc. of A.S.C.E. Vol.94, SA5, pp.927-943.
- P.C.Chatwin(1970):Jour. of Fluid Mechanics, Vol.43, Part 2, pp.321-352.
- K.M.Atesman, L.V.Baldwin and R.D. Haberstroh(1971):Jour. of Basic Engineering, 93-4, pp.461-477.