

密度流の流速分布および界面抵抗について Velocity Distribution and Interfacial Friction of Two-Layered Flow

東京工業大学 日野 幹 雄
Mikio HINO, Tokyo Inst. of Tech.

要旨 まず、成層密度流の現況を分析して、速度分布・密度分布という基本問題が研究上の弱点であることを指摘する。この指摘に沿い、本論文では、塩水楔などのように固体壁の影響を直接受けない成層密度流の流速分布についての理論を述べる。流れは大きく分けて層流である下層流と乱流である上層流から成り立つ。さらに上層流は下から順に遷移層・安定成層・上部乱流層（または中立層）に分けられる。安定成層流の長さのスケールとして Monin-Obukhov 長さ $L' = \rho U_*^2 / \kappa \Delta \rho g$ を導入し、これに関して流速分布則・密度分布則が記述される。安定成層の厚さは、これに関する Richardson 数 Ri が一定となる条件（仮説）から、遷移層の厚さはこれに関する Reynolds 数 Re が一定となる条件から定まる。流速分布は $u(z)/U_*$ (U_* : 摩擦速度) の形で求められ、これより上下層間の境界面での抵抗則が Richardson 数および Reynolds 数の関数として導かれる。

1. 序 論

(1) 研究の現況分析

本論文では、静的に安定な成層状態にある成層流 (Statically stable stratified-flow) に限って論じることとする。成層流としては、この他に不安定成層流 (unstable or convective stratified-flow) も重要である。大気乱流の相似理論では、これは安定成層の場合と同様に取扱われる。しかし、水理学的問題では buoyant plume などの流れとなり、現象的には安定成層の場合と区別して論じる方が良いであろう。成層流についての論文の数は極めて多く、また問題となる現象も多岐でいくつかの成書が刊行されている。

さて、本論文で論じる「安定成層流の乱流」の研究の必要性を明確にするために、まずこれに関連する諸現象の研究の現況を著者の見方で簡単に review しておくことが有用であると考えられる。

(a) 線形安定問題: Taylor-Goldstein (1931) の非粘性非拡散性流体の安定問題の研究以来、この問題については、理論・室内（および野外）実験・数値実験等最も深く研究が行われており、主要な問題点は、ほぼ解決されていると考えられる。なお、これについての review paper も多く、著者自身の review も予定されている。

(b) 乱れの発生: 安定成層流中の乱れの発生については、① Kelvin-Helmholtz 波の発達崩壊②内部波の砕波③内部波の非線型干渉などいくつかの機構が考えられる。この問題は現象の大筋が捉まえられて、詳細な解析は目下進行中という段階にある。

(c) Entrainment (連行) および Deepening (成層浸食): 密度の異なる相互に混合する (soluble) 二流体間では、境界面を介しての流体の移動が行われる。このためには、少くとも一方の層が乱流状態にあることが必要であるが、乱れが攪拌や振動格子により作られた stirring tank 型とせん断流場の乱れによる shear flow 型では、連行則や連行機構に差があることが指摘されている。この問題は、成層性密度流の実験問題の基礎として Rouse & Dodu (1955) や Kato & Phillips (1969) の実験以来多くの実験的研究が積み重ねられて来た。しかし、理論的研究は少く、また実験も Richardson 数と連行係数の関係のように overall なまとめ方が主で、連行の機構に立入った研究は最近吉田²⁰⁾ (1976) や室田他⁹⁾ (1977) などによりなされ、やっと緒についたところでこれからという段階であろう。

(d) 成層乱流の流速および密度変動のスペクトル: 安定成層流と一口に云っても、具体的には様々な現象・流れの場があるわけであるが、スペクトルという局所的特性では（ある波数範囲で）共通の法則一いわゆるベキ乗則一が成立する。理論的には Kolmogorov 理論の延長として、実験的には実験技術・データ処理論

の進歩により、これもほぼ片付きつゝある問題と云つて良からう (Bolghiano 1962, Lumley 1964, Phillips 1966, Garrett & Munk 1971, 岩崎 1977, 玉井・西村 1973, 椿・小松 1977)。

(e) 成層乱流の流速分布: 温排水の拡がりの場合の研究は多いが、流速分布の関数型が仮定されて、拡がり・影響範囲の計算に主点が置かれている。

また、平板上の成層乱流、特に大気乱流に関してはソ連の気象学者 Monin & Obukhov らによる相似理論がすでに 1960 年代までに広い成功をおさめた。しかし、固定壁面の影響を直接受けない二層密度流・塩水楔型密度流については、(連行とかスペクトルについての詳細な研究が行われた反面) 意外なことに理論的研究は少なく、椎貝¹¹⁾ (1966), 芦田・江頭 (1978)^{1,2)} などのものにとどまる。本論文ではこれについて論じる。

2. 流速分布の理論

塩水楔型の密度流の場合を考える。たゞし、下層の塩水部は十分深いものとする。また、簡単のために水平方向の変化は鉛直方向のそれに較べて十分ゆるやかで、問題を一次元化して取扱うことが許されるとする。

流れを大きく上層の乱流部と下層の層流部に分ける。上層流はさらに上から順に①上部乱流 (または中立乱流) 層, ②成層乱流層, ③遷移層に分ける。

(1) 安定度パラメーター (Monin-Obukhov 長さ L')^{8) 19)}

密度流の成層強度・安定度を表わすパラメーターとして Richardson 数が用いられる。Overall Richardson 数は次のように定義される。(ここに、 h_1 は上層の厚さ、または乱れのスケール)

$$Ri = \frac{4\rho g h_1}{\rho U_*^2} \quad (1)$$

一方、大気乱流における相似理論の Monin-Obukhov length にならって、式(1)の Overall Richardson 数に対応して、安定度長さ L' を次のように定義できる。

$$L' = \frac{\rho U_*^2}{\kappa 4\rho g} \quad (2)$$

あるいは、buoyancy flux $\bar{q} = 4\rho g / \rho \cdot We$ (We : 連行速度), と shear velocity U_* に関して

$$L' = \frac{U_*^3}{\kappa \bar{q}} \quad (3)$$

$$= \frac{\rho U_*^2}{\kappa 4\rho g} \cdot \frac{U_*}{We} \quad (4)$$

これより次の関係が導かれる。

$$\frac{We}{U_*} = \frac{\rho U_*^2}{\kappa 4\rho g L'} \propto Ri^{-1} \quad (*)$$

成層乱流層の厚さ (L') について^{3a) 11)}

安定度長さ L' はすでに述べたように成層の程度を表わす長さである。したがって、成層乱流層の厚さ h' は L' のオーダーである。

$$h' / L' = O(1)$$

あるいは

$$h' / L' = J_* = \text{一定} \quad (5)$$

このような議論は大気乱流についてもなされており、Monin-Obukhov 長さは逆転層 (安定大気) や混合層 (不安定大気) の厚さに対応すると考えられている。

これは対する証拠は、Richardson 数 ($\approx h_1 / L'$) の増加とともに連行係数は低下し、極限 (最大) Richardson 数が存在すると考えられていることや Moore & Long の連行実験において h' を長さにとった Richardson 数がほぼ一定となっていることに見出せる。

(2) 上流層 (乱流) の流速分布

(a) 安定成層乱流層⁸⁾¹⁹⁾

上層流は、上述のように3層に分けられるが、まず、それらの中で最も中心的役割をはたす“安定成層乱流”層について述べる。この層の特性は上に定義した成層乱流場の長さのスケール L' に関して表わされる。流速分布は中立流の場合の式に成層効果を表わす無次元普遍関数 $\phi(z'/L')$ を導入して次式となる

$$\frac{du}{dz'} = \frac{U_*}{\kappa z'} \phi\left(\frac{z'}{L'}\right) \quad (6)$$

普遍関数 ϕ は z'/L' が小さければ一次式で近似できるから、

$$\frac{du}{dz'} \approx \frac{U_*}{\kappa z'} \left(1 + \beta \frac{z'}{L'}\right) \quad (7)$$

(こゝに、 z' は塩淡界面からの高さ。)これを積分すれば、

$$\frac{u(z')}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \left[\ln z' + \beta \frac{z'}{L'} \right] + B' \quad (8)$$

後に述べる式(9)を代入すれば

$$\frac{u(z')}{U_*} = \frac{1}{\kappa} \left[\ln \frac{z'}{\delta_*} + \beta \frac{z' - \delta_*}{L'} \right] + B' \quad (9)$$

($\delta_* < z < h'$)

こゝに、

$$B' = \frac{U_2}{U_*} + R_{\delta_*'} \quad (10)$$

(U_2 : 下層と上層の境界面の流速。)

式(9)より $u(h') = U_{h'}$ は

$$U_{h'} = \frac{U_*}{\kappa} \left[\ln \frac{h'}{\delta_*} + \beta \frac{h' - \delta_*}{L'} \right] + U_* B' \quad (11)$$

式(9)は Monin-Obukhov の大気乱流理論におけるいわゆる“log + linear law”である。

また、 K_∞ は $\tau_0 / \rho = K_\infty \left(\frac{du}{dz'}\right)$ と式(8)より $z' = h'$ として

$$\begin{aligned} K_\infty &= \left[\kappa U_* z' \phi^{-1}\left(\frac{z'}{L'}\right) \right]_{z'=h'} \\ &= \kappa U_* h' \left(1 - \beta \frac{h'}{L'}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

(b) 上部乱流層 ($z' > h'$)

$z' > h'$ では、もし $u = \text{一定}$ と考えうれば、

$$u(z') = u(h') \quad (z' > h') \quad (13)$$

また、成層乱流層より上では、渦動粘性係数を一定 K_∞ であると考えれば、

$$\rho K_\infty \frac{du}{dz'} = \tau = \tau_0 \left(1 - \frac{z'}{h_1}\right)$$

これを積分して、

$$\frac{u(z')}{U_*} = \frac{h_1 U_*}{K_\infty} \left(\frac{z'}{h_1} - \frac{z_1^2}{2 h_1'^2} \right) + A' \quad (z' > h') \quad (14)$$

こゝに、

$$A' = \frac{U_{h'}}{U_*} - \frac{h_1 U_*}{K_\infty} \left[\frac{h'}{h_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{h'}{h_1}\right)^2 \right] \quad (15)$$

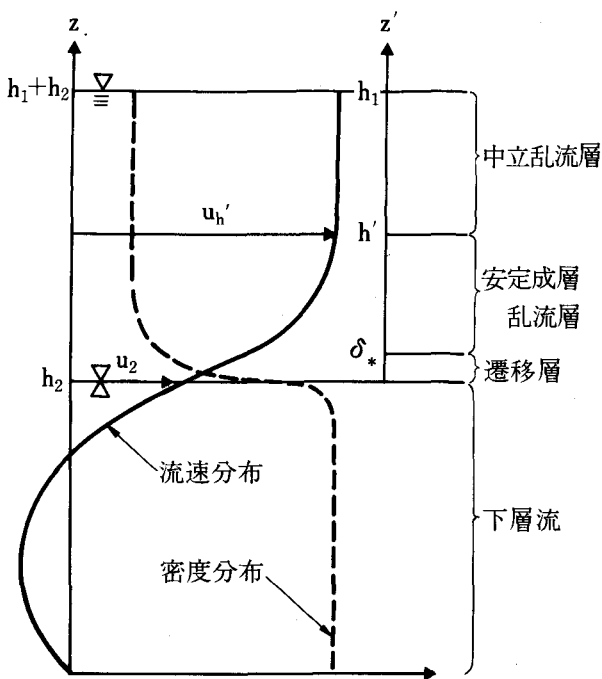


図-1

(c) 遷移層 ($0 < z' < \delta'_*$)

乱流から層流へ移り替えるこの層は、粘性効果が卓越し、ちょうど平板上の一様乱流の粘性底層に相当する。粘性係数 μ を用いて

$$\mu \frac{du}{dz'} = \rho U_*^2, \quad u(z') = \frac{U_*^2}{\nu} z' + C \quad (16)$$

$z' = 0$ で $u = U_2$ とすれば、

$$u(z') = \frac{U_*^2}{\nu} z' + U_2 \quad (17)$$

遷移層の高さ $z' = \delta'_*$ は、粘性底層に相当して

$$\frac{U_* \delta'_*}{\nu} = R \delta'_* = \text{一定} \quad (18)$$

の条件で決まると仮定すれば、 $z = \delta'_*$ での式(9)と式(17)の連続条件から

$$\frac{1}{\kappa} [\ln \delta'_* + \beta \frac{\delta'_*}{L'}] + B' = \frac{U_* \delta'_*}{\nu} + \frac{U_2}{U_*}$$

$$\text{これより,} \quad B' = \left(\frac{U_2}{U_*} + \frac{U_* \delta'_*}{\nu} \right) - \frac{1}{\kappa} (\ln \delta'_* + \beta \frac{\delta'_*}{L'}) \quad (19)$$

こゝに

$$\delta'_* = \frac{\nu R \delta'_*}{U_*} \quad (20)$$

(3) 下層流

(a) 層流の場合

つぎに、下層部について考える。こゝでは流れは遅く、上層乱れの影響は Richardson 数の大きい遷移層に遮ぎられて層流となっていると考えられる。運動方程式はこのとき次のようになる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (= P') \quad (21)$$

これより、 $z = 0$ で $u = 0$ 、 $z = h_2$ で $u = U_2$ として

$$u(z) = \frac{h_2^2}{2} P' \left(\frac{z}{h_2} \right)^2 + \left(U_2 - \frac{h_2^2 P'}{2} \right) \left(\frac{z}{h_2} \right) \quad (22)$$

となる。

上層への連行流速 We は、下層内の流速 u よりもさらに小さく近似的に $\int_0^{h_2} u(z) dz \cong 0$ の関係が仮定しうる。このとき流速およびせん断応力の分布は次のようになる。

$$u(z) = \frac{z}{h_2} \left(3 \frac{z}{h_2} - 2 \right) \frac{h_2^2}{6\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (23)$$

$$\tau(z) = \mu \frac{du}{dz} = \left(z - \frac{h_2}{3} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \quad (24)$$

(b) 境界層型の場合

いま一つの考え方は、 x 方向への発達を考える境界層の取扱いである。遷移層から下で急速に流速が減少することを説明するには、境界層の発達を考慮する方が良い。

(c) 乱流の場合

塩水楔などの実際の流れでは、Reynolds 数が大きく下層流も乱流状態になっていることも多いであろう。この場合には、原理的には先に述べた上層流の考え方をもち込めば良いであろう。しかし、事態の混乱を避けるためにこゝでは詳しい式の展開は止める。

3. 密度分布

密度分布を定める塩分濃度の拡散方程式を（厳密な条件設定やオーダー比較を省いて）一次元化して次のように表わす。

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_c \frac{\partial C}{\partial z} \right) \cong 0 \quad (25)$$

これを積分して

$$K_c \frac{\partial C}{\partial z} = -F_\ell, \quad C = \int \frac{F_\ell}{K_c} dz \quad (26)$$

ここに、 K_c は濃度の拡散係数、 F_ℓ は輸送量束である。

$$K_c \begin{cases} = \alpha \kappa U_* z' \phi^{-1}(z'/L') & (\delta'_* \leq z' \leq h') \\ = \alpha \kappa U_* h' \phi^{-1}(h'/L') & (z' > h') \end{cases} \quad (27)$$

ここに、 α は濃度と運動量の輸送係数の比で Richardson 数の関数である。

$$\alpha = K_c / K_m \quad (28)$$

濃度の輸送束 F_ℓ は、連行速度 We と下層の濃度 C_2 を用いて

$$F_\ell = C_2 We = a C_2 U_* R_1^{-1} \quad (29)$$

$$C(z) \begin{cases} = C_2 \left[1 - \frac{a R_1^{-1}}{\alpha \kappa} \left\{ \ln \frac{z'}{\delta'_*} - \frac{\beta'}{L'} (z' - \delta'_*) \right\} \right] & (\delta'_* \leq z' \leq h') \\ = C_2 \left[c - \frac{a R_1^{-1}}{\alpha \kappa} \phi(h'/L') \left(\frac{z'}{h'} - 1 \right) \right] & (h_1 \geq z' > h') \end{cases} \quad (30)$$

$$\text{ここに、} c = 1 - \frac{a R_1^{-1}}{\alpha \kappa} \left\{ \ln \frac{h'}{\delta'_*} - \frac{\beta'}{L'} (h' - \delta'_*) \right\} \quad (31)$$

4. 境界面における抵抗係数

二層密度流の境界面における抵抗係数は早くから密度流の主要課題であり、岩崎⁶⁾ (1962) は実験から抵抗係数 f' は Reynolds 数 Re と内部 Froud 数より作られるパラメーター $\Psi = Re \cdot Fi'^2$ の関数であることを示し、椎貝^{10,11)} (1965) はこの関係を理論的に導き、玉井^{17,18)} (1976) はこの理論を改良した。それ以後、多くの実験によりこれらの関係は確固たるものになったように思われる^{7,13~16)}。

しかし、著者はこの問題について、①多くの密度流の現象が Richardson 数（あるいは内部 Froud 数）で説明され粘性係数に無関係であるのに、なぜ内部抵抗係数だけが、Richardson 数の他に Reynolds 数（すなわち粘性係数）にも関係するのであろうか、また②内部波によるエネルギー消散から内部抵抗係数が導かれているが、考慮されていない上層の乱れによるエネルギー消散の効果の方が大きいのではないか、③もっと流れの乱流機構を考慮した理論はできないであろうかという疑問を持って来た。

さて、Hagen-Poiseuille の流れや、管路の乱流の理論で良く知られるように、流速分布と壁面摩擦係数とは表裏の関係にあり、流速分布が求められるとこれより直ちに抵抗法則が導かれる。密度流の場合も全く同様であるが、式形がやや複雑であるから具体的にこれを導く前に、一般的抽象的にその見透しを検討する。

上層流の流速分布は、すでに述べたように $u(z')/U_*$ の形で次のような変数およびパラメーターにより表わされる。ただし、第 3 層は薄く平均流速への寄与は少ないので省略する。

$$\frac{u^{(1)}(z')}{U_*} = f^{(1)}\left(\frac{z'}{h_1}, \frac{h'}{h_1}\right) \quad (h' < z < h_1), \quad \frac{u^{(2)}(z')}{U_*} = f^{(2)}\left(\frac{z'}{L'}, \frac{\delta'_*}{L'}\right) \quad (\delta'_* < z < h') \quad (32)$$

これらの式をそれぞれ (h', h_1) および (δ'_*, h') の区間の積分し、単位幅流量を求めると

$$\frac{q^{(1)}}{U_*} = F_n^{(1)}\left(\frac{h'}{h_1}, \frac{h'}{L'}\right) \times h_1, \quad \frac{q^{(2)}}{U_*} = F_n^{(2)}\left(\frac{h'}{L'}, \frac{\delta'_*}{L'}\right) \times L' \quad (33)$$

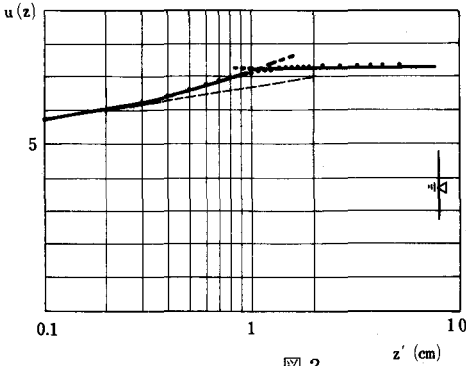


図 2

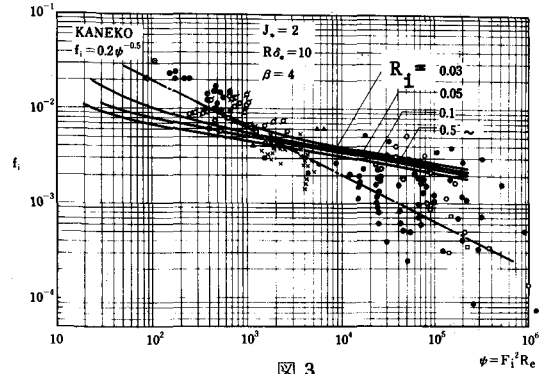


図 3

したがって、平均流速 $\bar{U}$ は ($h'/L' = J_*$ (一定) を考慮してパラメーターから除くと)、

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}}{U_*} &= \frac{q^{(1)} + q^{(2)}}{(h' - \delta'_*) U_*} \approx \frac{q^{(1)} + q^{(2)}}{h_1 U_*} \\ &= F\left(\frac{h'}{h_1}, \frac{h_1}{L'}, \frac{\delta'_*}{L'}\right) \end{aligned} \quad (34)$$

ところで、

$$\begin{aligned} \frac{h_1}{L'} &= \frac{4\rho g h_1}{\rho U_*^2} = \frac{4\rho g h_1}{\rho \bar{U}^2} \cdot \left(\frac{\bar{U}}{U_*}\right)^2 = Ri \left(\frac{\bar{U}}{U_*}\right)^2, \quad \frac{h'}{h_1} = J_* \frac{\rho \bar{U}^2}{4\rho g h_1} \left(\frac{U_*}{\bar{U}}\right)^2 = J_* Ri^{-1} \left(\frac{U_*}{\bar{U}}\right)^2 \\ \frac{\delta'_*}{L'} &= \frac{U_* \delta'_*}{\nu} \cdot \frac{4\rho g h_1}{\rho \bar{U}^2} \cdot \frac{\nu}{U h_1} \cdot \left(\frac{\bar{U}}{U_*}\right)^3 = R_{\delta'_*} \cdot Ri \cdot Re^{-1} \cdot \left(\frac{\bar{U}}{U_*}\right)^3 \end{aligned} \quad (35)$$

これをまとめると

$$\frac{\bar{U}}{U_*} = F_n(Ri, Ri Re^{-1})$$

となる。すなわち、抵抗係数 $f'_i = 2 \left(\frac{U_*}{\bar{U}}\right)$ は Richardson 数 Ri と岩崎数 (もしくは Keulegan-岩崎数) $\Psi = Re Ri^{-1} = Re F_i^2$ の関数である。 (36)

$$f'_i = F(Ri, \Psi)$$

この点従来の実験式や理論式が、 f'_i を Ψ のみの関数としているのとは異った結論となっている。

以下に少々複雑になるが、具体的に導いた関数形を示す。ただし、流速分布の実験結果 (図-2) を考慮して、 $z' > h'$ では $u(z') = U_{h'}$ とした。

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}}{U_*} &= (1 - \zeta_1) \left[\frac{1}{\kappa} \ln \frac{J_*}{\zeta_2} + \frac{\beta}{\kappa} (J_* - \zeta_2) + R_{\delta'_*} \right] + \frac{1}{\zeta_3} \left[\frac{J_*}{\kappa} (\ln J_* - 1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\zeta_2}{\kappa} (\ln \zeta_2 - 1) + \frac{\beta}{2\kappa} (J_*^2 - \zeta_2^2) - \left(\frac{1}{\kappa} \ln \zeta_2 + \frac{\beta \zeta_2}{\kappa} - R_{\delta'_*} \right) \times (J_* - \zeta_2) \right] \\ &\quad + \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{Re_2}{Re_1} \cdot \left(\frac{\bar{U}}{U_*} \right) \left[(1 - \zeta_1) + \frac{(J_* - \zeta_2)}{\zeta_2} \right] \end{aligned} \quad (37)$$

$$\text{ここに,} \quad \zeta_1 = \frac{h'}{h_1} = \frac{J_* \cdot f'_i}{Ri \cdot 2}, \quad \zeta_2 = \frac{\delta'_*}{L'} = \frac{R_{\delta'_*}}{\Psi} \left(\frac{2}{f'_i} \right)^{3/2}, \quad \zeta_3 = \frac{h_1}{L'} = Ri \left(\frac{2}{f'_i} \right), \quad f'_i = 2 \left(\frac{U_*}{\bar{U}} \right)^2 \quad (38)$$

上式は、すでに指摘したように、内部抵抗係数は f'_i は Ψ と Ri の関数であること、さらにこれは Re_2/Re_1 や h_1/h_2 にも関係することを示している。

$$f'_1 = f_n(\Psi, Ri; Re_2/Re_1, h_2/h_1) \quad (39)$$

ところで、 L' のオーダーは実河川では $\Delta\rho = 0.01$, $U_* = 10 \text{ cm/sec}$ として、実験室規模では $\Delta\rho = 0.01$, $U_* = 1 \text{ cm/sec}$ として、それぞれ $L' = O(20 \text{ cm})$, $L' = O(0.2 \text{ cm})$ である。したがって、一般に上層水深 h_1 に較べて、 h' は十分小さいと考えられる。このような場合には、 $q^{(1)} \gg q^{(2)}$ かつ $\zeta_1 (= h'/h_1) \ll 1$, $\zeta_2 = \delta'_*/L' \ll 1$ ゆえ式 (40) の近似式として次の式が成立する。

$$\sqrt{\frac{2}{f'_1}} \cong \frac{2(1+\beta J_*)}{3\kappa J_*} \cdot \left(\frac{R_{i1}}{f'_1}\right) + \frac{1}{\kappa} \ln \Psi \left(\frac{f'_1}{2}\right)^{3/2} + \left(\frac{h_1}{h_2}\right) \left(\frac{Re_2}{Re_1}\right) \sqrt{\frac{2}{f'_1}} + D \quad (40)$$

$$\text{ここに, } D = \frac{1}{\kappa} \ln J_* / R_{\delta'_*} + \frac{\beta}{\kappa} J_* + R_{\delta'_*} \quad (41)$$

上の式 (37) あるいは近似式 (40) から、 f'_1 と Ψ , Ri の関係を具体的に求めるには、universal constants κ , β , J_* , $R_{\delta'_*}$ の値が必要である。これらの値のオーダーはすべて $O(1)$ であるが、いま種々の実験実測を参考にして $\kappa = 0.4$, $\beta = 4$, $J_* = 2$, $R_{\delta'_*} = 1.0$ として $f'_1 \sim \Psi$, Ri の関係を計算した結果が図-3 である。

本理論の特徴は、(κ , β , J_* , $R_{\delta'_*}$ は他の流れと共有の普遍パラメーターで) この現象に特有の勝手な値を選べるパラメーターを一切含んでいないことである。

参 考 文 献 (頁数の関係上、主に第2節以下に関するものを掲げる。)

- 1) 芦田和男・江頭進治(1978): 密度躍層のある場における濁水の挙動に関する研究(3), 京都大学・防災研究所・年報第20号
- 2) 江頭進治・芦田和男(1978): 表層流における流速分布と水温分布, 第32回年次学術講演会講演概要集, 第II部, 350.
- 3a) Hino, M., Homma, M. & Senshu, T. (1967): Diffusion of smoke from a high stack, Proc. Int. Symp. on Boundary Layer and Turbulence, Phys. of Fluid Supplement, S 267-269.
- 3b) 日野幹雄(1967): Large eddies in stratified flow, Proc. XIIth Congress of IAHR, Fort Collins.
- 4) 日野幹雄・難岡和夫(1977): “区界積分法”による塩水くさびの一般解法(1), 第24回海岸工学講演会論文集, 549.
- 5) 日野幹雄・難岡和夫・萩原克(1978): 塩炭境界面における渦列の形成と混合現象, 第10回乱流シンポジウム論文集, 149.
- 6) 岩崎敏夫・岩田州生・富岡亮一(1962): 二成層流における密度混合について, 土木学会第17回年次学術講演会講演概要,
- 7) 岩崎敏夫・江原昌彦(1977): 二成層二次元ジェットの界面抵抗について, 第24回海岸工学講演会論文集, 519-523.
- 8) Monin, A. S. & Yaglom, A. M. (1965): Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence, Vols. I & II, The MIT Press, English Edition.
- 9) 室田 明・平田健正(1978): 成層密度流における内部波特性と混合機構について, 第22回水理講演会論文集, 107.
- 10) 椎貝博美(1965): On the resistance coefficient at the interface between salt and fresh water, 土木学会論文集 Ⅱ 123.
- 11) 椎貝博美(1966): 塩水楔に関する研究, 東京工大・土木工学科・研究報告, Ⅱ 1, PP. 19-62.
- 12) 嶋 祐之(1965): 密度流論, 水工学シリーズ 65-11, 土木学会水理委員会.
- 13a) 須賀堯三・高橋 晃(1971): 塩水くさびに関する大型水路実験による二, 三の考察, 第27回年次学術講演会講演概要, 第II部.
- 13b) 須賀堯三・高橋 晃(1975): 弱混合河川における内部抵抗係数, 第30回年次学術講演会講演概要, 第II部, PP. 470-1.
- 14) 須賀堯三・高橋 晃(1976): 淡塩二層流の連行係数, 第31回年次学術講演会講演概要, 第II部, PP. 383-4.
- 15) Suga, K. (1977): Unsteady, stratified flow with entrainment by tides, Proc. 17th Congress of IAHR, West Germany, Vol. 1, 287-294.
- 16) 水理委員会密度流研究小委員会(1975): 成層密度流の界面現象(Ⅰ), 土木学会論文報告集, 第242号, PP. 73-90.
- 17) 玉井信行(1976): Friction at the interface of two-layered flow, Proc. 15th Coastal Eng. (Hawaii), Vol. IV, 3169-3188.
- 18) 玉井信行・浅枝 隆(1973): 淡塩二層流境界面における抵抗係数について, 土木学会論文報告集, Ⅱ 271, 67-82.
- 19) Turner J. S. (1973): Buoyancy Effects in Fluids, Cambridge Univ. Press.
- 20a) 吉田静男・段城邦彦(1977): 二層流界面に発生する波動の実態, 第21回水理講演会論文集, 69-74.
- 20b) 吉田静男(1978): 密度界面における混合機構の研究, 土木学会論文報告集, Ⅱ 273, PP. 59-68.