

床面に沿って転動する粒子の運動と流体力について

Motion of a particle rolling along a bed and driving hydrodynamic forces

京都大学工学部 正 員 中 川 博 次
〇京都大学工学部 正 員 辻 本 哲 郎
京都大学大学院 学生員 細 川 泰 廣

1. まえがき

移動床でみられる掃流砂れきの流送やそれに伴う砂鏈の発生、混合砂れきの分級現象などの機構は、個々の砂れきの運動に内在する固有の特性にもとづいて解明されるべきである。^{1), 2)} こうした立場から、本研究では床面に沿って転動する粒子の転動機構に着目し、その検討とともに掃流機構解明の最も根幹となる河床砂れきまたは運動砂れきに作用する流体力の特性について基礎的考察を行った。すなわち、掃流運動を抽象した力学事象（斜面転動、単一粒子の滑面及び粗面上の転動過程等）を対象として基礎実験を行い、その運動機構を解析するとともに掃流粒子に働く流体力の特性を把握し、また別に至ゲージを用いた流体力（抗力、抵抗モーメント）の直接測定を実施し、その結果を検討考察したものである。

2. 河床砂れきに及ぼす流体力について

河床に存在する砂れきに及ぼす流体力は主として抗力と揚力であり、その評価が掃流過程の解明に必須なものであるにもかかわらず、これまでの研究では充分とは言えない。従来の研究で著名なものはChepil^{3), 4)}による空気流を対象としたもので、これによると、揚力は砂れきが河床から粒径程度も離れると急激に小さくなり、運動中の砂れきについては無視し得るものと考えられる。一方、水流中で測られた例としては粗面上のものについてはColman,⁵⁾滑面上のものではAksoy⁶⁾の実測結果があり抗力係数 C_D の平均はそれぞれ0.4及び1.0となっている。しかしなお多くの研究者は静水中の沈降速度に対する値を代用している現状であり、本研究では粗面上の粒子についてその露出度の効果に注目して実験的検討を行った。

実験は図-1に示すように、直径1.9cmの真鍮製試験球を断面1.0cm×0.6cmの亚克力棒の上端に固定し、その下端を床面に固定した片持梁式抗力測定装置を試作して行った。なお、装置は4つのねじによって上下に微動調整できる。亚克力棒の下端付近にプラスチックゲージを表裏に計4枚接着し、これらをブリッジ回路に組んで動歪計、低周波濾化器を通してその結果をデジタルプリンター（0.5秒刻み）で記録した。なお、実験は幅33cm長さ9mの鋼製可変水路で行い、床面は試験球と同一のガラスビーズによって粗面に仕上げた。粗面は六角形配置の完全に密な状態で一層に敷きつめてある。試験球の露出度を7段階に変化させて抗力を測定し、同時に超小型プロペラ流速計で速度変動及び流速分布を測定記録した。

図-2には、実験で得られた抗力と摩擦速度の関係を無次元露出度(H_0/d , H_0 :露出高さ, d :粒径)をパラメータとして示した。なお、摩擦速度は、 $\sqrt{ghI_0}$ (h :水深, I_0 :エネルギー勾配)で求め、流速分布に対数則を仮定して得られた値でチェックした。図によると抗力 D は摩擦速度 u_* の平方に比

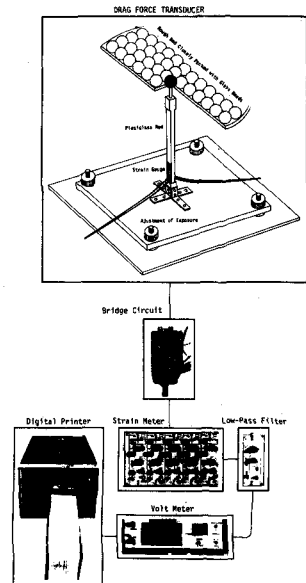


図-1 片持梁式抗力測定装置

例して増加し、その比例定数は露出度が小さくなるにつれて減少する。

抗力 D を $\rho u_*^2 d^2$ (ρ : 流体の密度) で無次元化し、その露出度に対する変化を調べたものが図-3 である。これによると無次元化された抗力は露出度に比例していることが認められ、また露出度 $H_e/d = 1.0$ の場合の抗力係数を求めると (対数則を用い $u/u_* = 7.60$ とする), 0.5 程度となる。 $D/\rho u_*^2 d^2$ は White⁷⁾ の導入した packing coefficient η の A_2 倍 (A_2 : 砂粒の面積に関する形状係数) に相当し, White の指摘するその平均的な値が 0.21 であることを考慮すると, 移動床での代表砂粒の平均露出度は 0.3 程度ということになる。

次に抗力の変動特性に言及すると, まず変動係数は図-4 に示されるようになる。図によると粒子 Reynolds 数, 露出度による変動係数 α_D の変化は明確でなく, 0.2 ~ 0.4 程度となっている。この値は, Einstein,⁸⁾ Paintal⁹⁾ らが Chepil,³⁾ Einstein & El-Samni¹⁰⁾ の実験にもとづいて用いた圧力変動の場合の値 0.5 よりは若干小さい結果である。なお, 抗力の周波数スペクトルの例を図-5 に示した。図の (a) は完全露出の場合で粒子 Reynolds 数をパラメータとしたもの, (b) は粒子 Reynolds 数を一定とし, 露出度を変化させたものである。いずれのスペクトル形もほぼ相似で高周波数側では周波数の -1 乗に比例している。なおスペクトルの計算に当っては, 測定器系への入力と出力の関係から得られる応答関数に対応したフィルターをかけねばならないが, 測定器系を片持梁 (線型) と考えた場合, 今回の計算の際の最高周波数とその固有振動数 (50 Hz 程度) より充分小さいのでその操作を必要としない。またスペクトル計算は M. E. M. によった (データ数 600 個)。

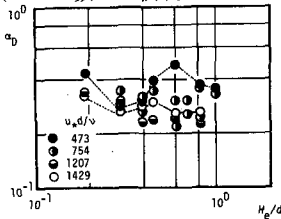


図-4 抗力の変動係数と粒子 Reynolds 数, 無次元露出度との関係

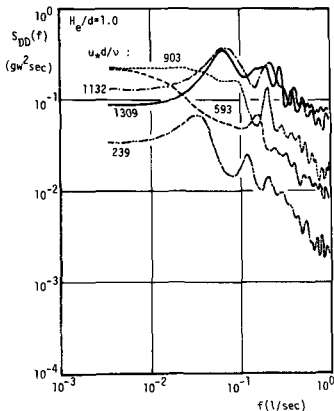


図-5(a) 抗力の周波数スペクトル

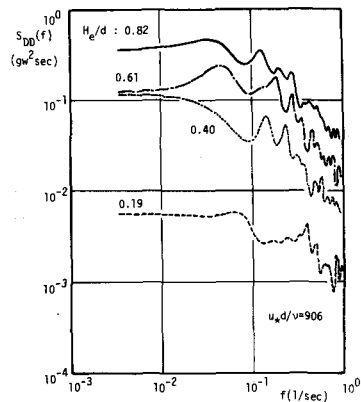


図-5(b)

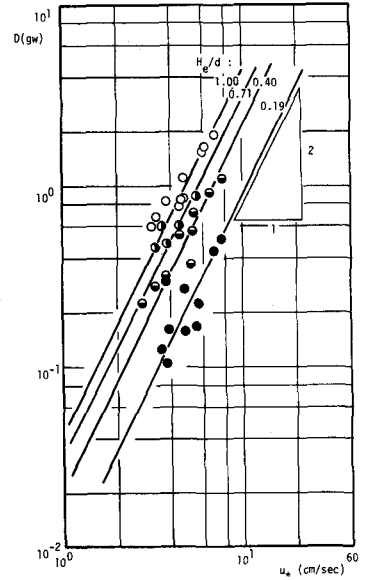


図-2 抗力と摩擦速度との関係 (無次元露出度をパラメーター)

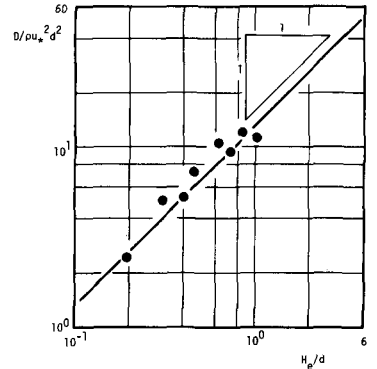


図-3 無次元抗力と無次元露出度との関係

3. 滑面上の単一粒子の転動機構

次に掃流過程を最も単純化し、滑面上の単一粒子の運動機構を検討する。流体中の転動粒子の運動は次式で記述される（図-6参照）。

$$M\dot{u}_g = -F + D + W \sin \alpha \quad (1)$$

$$Mk^2\dot{\omega} = F(d/2) - M_F \quad (2)$$

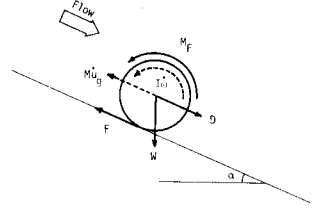


図-6 記号図

ここに、 M ：粒子の仮想質量、 W ：水中重量、 F ：摩擦力、 D ：抗力、 M_F ：流体中で回転する粒子に働く抵抗モーメント、 k ：粒子の重心まわりの回転2次半径、 u_g ：転動速度、 ω ：転動の角速度である。完全転動の場合上式は次のようにまとめられる。

$$\dot{u}_g = \{D + W \sin \alpha - (2/d) M_F\} / \{M(1 + 4k^2/d^2)\} \quad (3)$$

従来の研究では水流の抵抗モーメント M_F が無視されており、みかけの摩擦係数あるいはみかけの抗力係数¹¹⁾が導入されている。しかし完全転動する粒子に働く摩擦力は床面の垂直反力に比例しないし、またみかけの抗力係数を採用したとしても粒子の平衡転動速度を倍程度に過大評価する結果になる。

ところが不幸にも床面に沿って転動する粒子に働く流体の抵抗モーメントについては殆んど知られておらず、ここでまず斜面転動実験により間接的に検討する。

さて、式(3)に含まれるいくつかの量は次のように書き換えられる。

$$M = \rho A_3 (\sigma/\rho + C_M) d^3 \quad (4)$$

$$W = \rho A_3 (\sigma/\rho - 1) g d^3 \quad (5)$$

$$D = \frac{1}{2} C_D \rho |u_d - u_g| (u_d - u_g) A_2 d^2 \quad (6)$$

ここに、 σ ：粒子の密度、 ρ ：流体の密度、 g ：重力加速度、 A_3 ：粒子の体積に関する形状係数、 C_D ：抗力係数、 C_M ：付加質量係数であり、 u_d は粒子中心位置の局所流速である。式(3)~(6)より平衡状態での速度を $\bar{u}_g$ として、次式が流体の抵抗モーメントを表わす式となる。

$$M_* \equiv M_F / \left(\frac{1}{2} A_3 \rho g d^3 \right) = \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) \sin \alpha - \frac{1}{2} \frac{A_2}{A_3} C_D \left(\frac{\bar{u}_g}{\sqrt{gd}} \right)^2 \quad (7)$$

なお斜面転動の場合、 C_D としてはおおむね静水中沈降時の値（Reynolds数が充分大きい場合約0.4）が使えるものと考えられ、こうして実験的に得られた M_* と $\bar{u}_g / \sqrt{gd}$ の関係は図-7に白丸のプロットで示される。この結果次の関係式の成立が予想される。

$$M_* = C_F (\bar{u}_g / \sqrt{gd})^2 \quad (8)$$

Reynolds数の充分大きい範囲では C_F の値は約0.76であり、さらにグリセリンを用いた低Reynolds数の実験の結果、 C_F とReynolds数の関係は抗力係数のそれと同様なものとなり C_F が一種の抵抗係数であることが認められた。

次にこのような流体中で回転する球に対する抵抗モーメントを直接測定するため、図-8に示すような装置を試作した。すなわち、プリントモーター、歪ゲージ式トルクメーター（容量5kg・cm、最高回転数15000rpm）、試験球（真鍮製中空球、 $d = 5.385$ cm）を軸で鉛直に接続配置した測定装置で球は、流体を満たした水槽内に没している。トルク変換器からの出力は、動歪計、低周波濾波器を通してレコーダに記録された。なおモーターの回転数は制御装置（Servopack）によって0~4000rpmまで連続的に調整でき、試験球を任意の

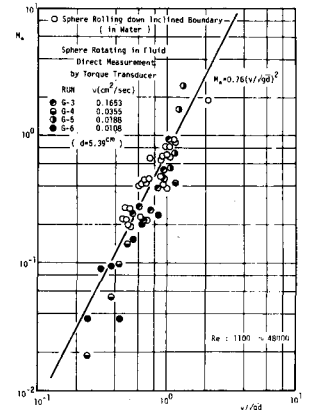


図-7 抵抗モーメントと粒子の回転速度との関係

回転数で回転させることができる。実験には流体としてグリセリンと水の各種混合液を用いてその粘性係数はウベローデ型粘土計により求めた。なお、空気中の実験より軸受のトルクを求めこれを減じ、さらに較正定数を乗じて抵抗モーメントを得た。この結果を無次元化しその球の回転速度に対する関係を図-7に併示した。図に示されるようにこうした抵抗モーメントの直接測定結果も先の斜面転動実験による間接推定結果と良く一致し、式(8)の成立が認められた。

ところで、適用上の便宜からGardeとSethuraman¹¹⁾によって導入されたみかけの抗力係数 C_D' について言及しておく。すなわち、 C_D' は次式によって M_F と関係づけられる。

$$C_D' = C_D + \frac{2A_3}{A_2} C_F \quad (9)$$

$C_D = 0.4$, $C_F = 0.76$ とすると、 $C_D' = 1.41$ となる。なお、Reynolds数の広い範囲の実験値に対して C_D' の実験結果を図-9に示した。

さて、水流中の転動粒子の運動方程式は、

$$\dot{u}_g = (P_*/d) |u_d - u_g| (u_d - u_g) - (F_*/d) u_g^2 \quad (10)$$

となる。ここに、

$$P_* = \frac{A_2}{2A_3} \frac{C_D}{(\sigma/\rho + C_M) \{1 + 4(k/d)^2\}} \quad (11)$$

$$F_* = C_F / [(\sigma/\rho + C_M) \{1 + 4(k/d)^2\}] \quad (12)$$

である。これより平衡転動速度が次式のように求められる。

$$\frac{\bar{u}_g}{u_*} = \sqrt{\frac{A_2 C_D}{2A_3}} \cdot A_* / (\sqrt{C_F} + \sqrt{\frac{A_2 C_D}{2A_3}}) \quad (13)$$

ここにおいて、 $A_* = u_d/u_*$ であり、滑面上の水流の速度分布に対数則を用いて表わすと、

$$\frac{\bar{u}_g}{u_*} = \sqrt{\frac{A_2 C_D}{2A_3}} \cdot \frac{\ln(4.52 Re_*)}{\kappa(\sqrt{C_F} + \sqrt{A_2 C_D / 2A_3})} \quad (14)$$

となる。ここに κ : Kármán定数, Re_* : 粒子Reynolds数 ($= u_* d/\nu$, ν : 流体の動粘性係数) である。

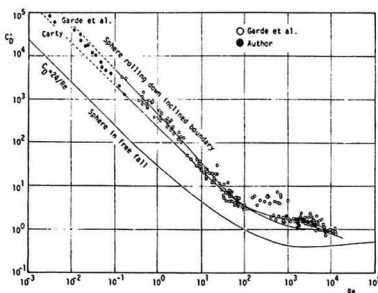


図-9 見かけの抗力係数と Reynolds 数との関係

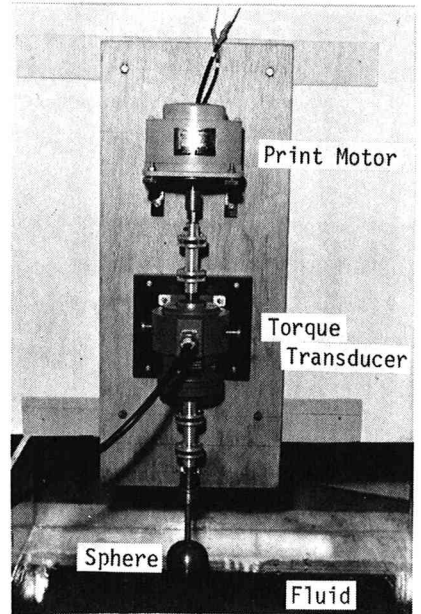


図-8 抵抗モーメント測定装置

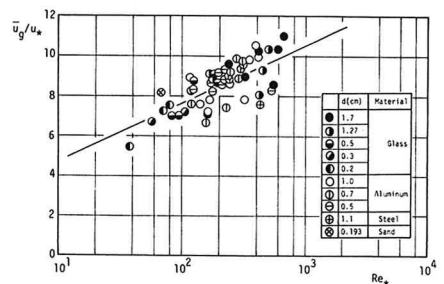


図-10 滑面上の水流による平衡転動速度

実験によって滑面上粒子の水流による平衡転動速度を測定し、式(14)を検証したものが図-10である。 C_F としては本節で斜面転動またはトルク変換器を用いた基礎実験で検討した式(9)を用い、 C_D の値はAksoy⁶⁾の実験結果(1.0)を用いた。また、 $A_2 = \pi/4$, $A_3 = \pi/6$, $C_M = 0.5$, $k^2/d^2 = 0.10$ とした。実験に使用した粒子はガラスビーズ ($\sigma/\rho = 2.60$), アルミニウム球 ($\sigma/\rho = 2.75$), 鋼球 ($\sigma/\rho = 7.70$) 及び自然砂 ($\sigma/\rho = 2.65$) である。図-10及び転動速度の時間的変化を示す図-11(実線が理論曲線を示す)より、上述した粒子運動の記述が正当なものと考えられる。

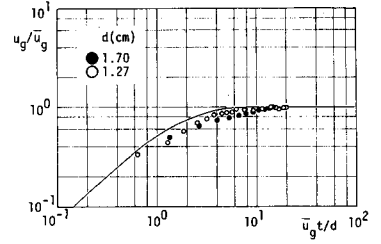


図-11 転動速度の時間的変化

4. 粗面上の単一粒子の運動機構

粗面上の粒子の運動は粗度要素との間断ない衝突現象によって特徴づけられる。ここでは床面の凹凸に沿って球状粒子が転動する理想状態を対象とし、まず斜面での重力転動を考える。図-12(a)を参考に粒子の運動方程式を立て、若干の変形を行うと完全転動の場合次式が得られる。

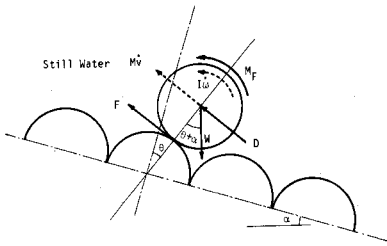


図-12(a) 記号図

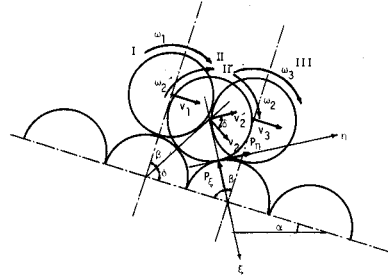


図-12(b)

$$\dot{\theta} = \{W \sin(\theta + \alpha) - D - (2/d)M_F\} / \{Md \{1 + 4(k/d)^2\}\} \quad (15)$$

上式は変数変換によって線型微分方程式に書き換えられ、これを解くと、結局次式を得る。

$$\frac{v^2}{gd} = \frac{v_0^2}{gd} \exp \{-2P'_*(\theta - \theta_0)\} + \chi(\theta, \theta_0) \quad (16)$$

ここに、

$$P'_* = P_* + F_* \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \chi(\theta, \theta_0) = & \frac{2B_*}{4P'^2_* + 1} \left[e^{-2P'_*(\theta - \theta_0)} \{ \cos(\theta_0 + \alpha) - 2P'_* \sin(\theta_0 + \alpha) \} \right. \\ & \left. + \{ 2P'_* \sin(\theta + \alpha) - \cos(\theta + \alpha) \} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

$$B_* = (\sigma/\rho - 1) / [(\sigma/\rho + C_M) \{1 + 4(k/d)^2\}] \quad (19)$$

であり添字 0 は初期値を表わす。

次に、図-12(b)を参考に床面粒子との衝突過程に対し運動量保存則を適用すると、衝突の前後における速度の比が求められ、完全転動を仮定すると、

$$e' \equiv \frac{v'_2}{v_2} = \frac{\cos \delta + 4(k/d)^2}{1 + 4(k/d)^2} \quad (20)$$

となる(記号は図-12に準拠)。

平衡速度 v_e は、式(19)及び式(20)を用い、 $v_e = v_1 = v_2$ と置くことから次のように求められる。 v_1 、 v_2 はそれぞれ図-12(b)のⅠ、Ⅱの状態の粒子速度である。

$$\frac{v_e}{\sqrt{gd}} = \sqrt{\frac{e'^2 Q \chi(\beta, 0) + \chi(\beta, -\beta)}{1 - e'^2 Q^2}} \quad (21)$$

ここに、

$$Q = \exp(-2P'_* \beta) \quad (22)$$

である。図-13及び図-14に示されるように式(20)及び式(21)の妥当性は実験結果によって確認された。実験はガ

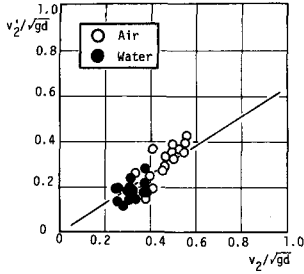


図-13 衝突前後の速度の関係

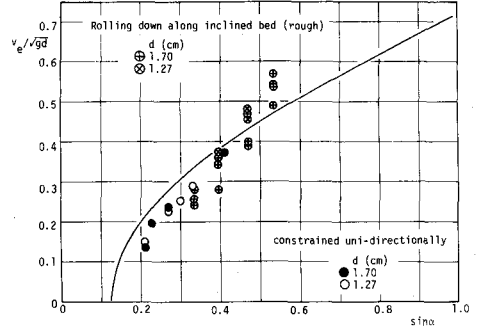


図-14 粗面斜面での平衡転動速度

ラスビーズを用いて行い、 v_1 、 v_2 の測定は16mmフィルムの解析(ダイナミックフレーム使用)によった。また、一部の実験は斜面に対し横断勾配を与えアクリル製板に沿わせて運動の一次元性(unidirectional)を保った。

さて、次にこれらの考察をもとに水流中での粗面上転動粒子の運動を検討する。揚力ならびにMagnus 効果を無視し、粗面構成粒子に沿う完全転動を仮定すると、運動方程式として次式が導ける。

$$\dot{\theta} = (W \sin \theta + D \cos \theta - \frac{d}{2} M_F) / [M d \{1 + 4(k/d)^2\}] \quad (23)$$

上式を図-12(b)のⅠとⅡ、Ⅱ'とⅢの間でそれぞれ積分することから、 v_2 と v_1 、 v_3 と v_2' の関係が求められ、式(20)によって v_2 、 v_2' を消去し、さらに $v_1 = v_3 = \bar{u}_g$ とおくことによって転動粒子の平衡状態での速度を次式によって求められる。

$$(1 - e'^2) \bar{u}_g^2 = \frac{2d}{M \{1 + 4(k/d)^2\}} \{-(1 - e'^2)(1 - \cos \beta) W + (1 + e'^2)(D \sin \beta - \beta M_F/d)\} \quad (24)$$

式(24)を $\bar{u}_g$ について解き無次元表示すると、

$$\bar{u}_g^* = \frac{-B_2 \sqrt{\tau_*} + \sqrt{B_1 B_2 (\tau_* - \tau_{*rc}) + B_2 \tau_{*rc}}}{B_1 - B_2} \quad (25)$$

となる。ここに、

$$\bar{u}_g^* = \bar{u}_g / \sqrt{(\sigma/\rho - 1)gd} \quad (26)$$

$$\tau_{*rc} = \frac{4A_3}{C_D A_2 A_*^2} \cdot \frac{1 - e'^2}{1 + e'^2} \cdot \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta} \quad (27)$$

$$B_1 = 2F_* + (1 - e'^2)/(1 + e'^2) \quad (28)$$

$$B_2 = P_* \sin \beta \quad (29)$$

であり、 $\tau_* = \tau_{*rc}$ のとき $\bar{u}_g^* = 0$ となる。

いま、水流によって粗面上を転動する単一粒子の平衡速度を測定し、これを沈降速度で無次元化し、無次元底面せん断応力との関係を図-15に示した。図にはMeland & Norrman¹²⁾の実験結果も表示した。また図中の実線は式(29)を計算したものであるが、式(29)は平衡速度を過小評価している。これは粗面上の水流による粒子の運動が流体力の変動、粗面の不均一さのために頻繁な反発現象を伴ない、このため粒子の回転速度が激減し均一な転動過程の出現がみられないことによる。したがって掃流力が大きくなるとむしろ滑動形式を考えた場合と同様掃流砂れき近傍の局所流速に等しくなっている。そこで、こうした点を考慮し、みかけの摩擦係数 μ_R を用いて滑動形式としての表示を得、これを破線で図-15に示した。 μ_R は本章の最初に行った斜面転落実験より次式で求められる値を検討した。

$$\mu_R = \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{A_2}{A_3} \frac{C_D' \bar{u}_g^2 / g d}{(\sigma/\rho - 1) \cos \alpha} \quad (30)$$

この結果 μ_R の値はほぼ0.35で一定値となり、また抗力係数 C_D の値は第2章の考察から0.4を用いた。なお、このような摩擦係数を用いると、Gardeら¹¹⁾の導入した粗面上転動粒子に対するみかけの抗力係数は、 $Re = u_g d / \nu$

$$C_D'' = C_D + \frac{2A_3}{A_2} C_F + \frac{2A_3}{A_2} \frac{(\sigma/\rho - 1) \mu_R \cos \alpha}{(\nu^2 / g d^3) Re^2}$$

で表わされ、著者ら及びGardeら¹¹⁾の実験結果を説明し得た。

5. あとがき

本論文では掃流機構解明の基礎となる流体力の特性及び単一粒子の運動機構について、理想化された条件での実験を通して詳しく検討した。流体力としてはとくに抗力の露出度に対する変化、転動粒子に対する流体の抵抗モーメントの特性に着目し新たな知見を得た。しかし実験結果の詳細な理解・検討はまだ充分なものではない。

これらの流体力特性の把握によって理想的な状態での単一粒子の転動過程の正当な記述が行われ、とくに平衡転動速度が推定された。しかし、水流によって粗面上を転動する場合はここに示した理想的状態の出現はまれで、粒子の運動は流体力特性よりもむしろ床面との衝突・反発に代表される物理特性によるものと判断される。以上のように掃流機構の厳密な把握にはまだ多くの基礎的問題が残されている。とくに、粒子群の運動特性、移動床効果等の解明が残されており、今後更に研究を進めていく予定である。

なお、本論文の作成に当り、流体力の直接測定に関しては京都大学工学部学生村上正吾君の協力を得たことを記して謝す。

参考文献

- 1) 中川博次・辻本哲郎・矢田篤：砂粒運動に伴う砂面擾乱の初生について、土木学会関西支部昭和51年度年次学術講演会講演概要集，Ⅱ-58，1976。
- 2) 中川博次・辻本哲郎・原稔明：混合砂れき床面の粗粒化過程について、京都大学防災研究所年報，第20号B-2，pp. 355-370，1977。
- 3) Chepil W. S.: The Use of Evenly Spaced Hemispheres to Evaluate Aerodynamic Forces on a Soil Surface, Trans. A. G. U., Vol. 39, No. 3, pp. 397-404, 1958.
- 4) Chepil W. S.: Equilibrium of Soil Grains at Threshold of Movement by Wind, Soil Science Society Proceedings, 23

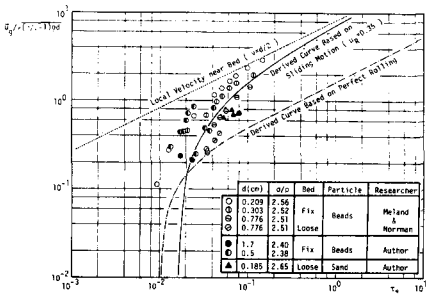


図-15 粗面上の粒子の平均運動速度

(6), pp.422–428, 1959.

5) Coleman N. L.: The Drag Coefficient of a Stationary Sphere on a Boundary of Similar Spheres, La Houille Blanche, No. 1, pp. 17–21, 1972.

6) Aksoy S.: Fluid Force Acting on a Sphere near a Solid Boundary, Proc. the XVth Congress, IAHR, Istanbul, Turkey, Vol. 1, pp. 217–224, 1973.

7) White C. M.: The Equilibrium of Grains on the Bed of a Stream, Proc. Royal Society of London, Vol. 174A, pp. 324–334, 1940.

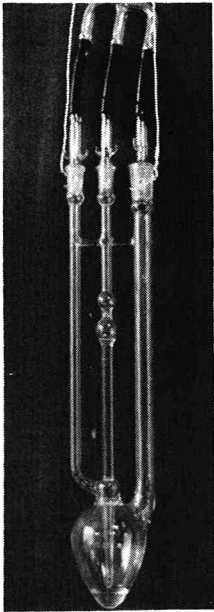
8) Einstein H. A.: The Bed Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flows, Technical Bulletin, No. 1026, U. S. Department of Agriculture, Soil Conservation Service, p. 78, 1950.

9) Paintal A. S.: Stochastic Model of Bed Load Transport, Journal of Hydraulic Research, IAHR, 9, No. 4, pp. 527–554, 1971.

10) Einstein H. A. and E. A. El-Samni: Hydrodynamic Forces on a Rough Wall, Review of Modern Physics, 21, pp. 520–524, 1949.

11) Garde R. J. and S. Sethuraman: Variation of the Drag Coefficient of a Sphere Rolling along a Boundary, La Houille Blanche, No. 7, pp. 727–732, 1969.

12) Meland N. and J. O. Normann: Transport Velocity of Single Particles in Bed Load Motion, Geografiska Annaler, 48A, pp. 165–182, 1966.



付録写真 オストワルド粘度計
(ウペローデ型)

正 誤 表

箇 所		誤	正
p. 1	14行目	Colman	Coleman
	24行目	可変水路	可変勾配水路
	25行目	同一の	同一径の
p. 2	7行目	() 内に追加	u : 局所流速
	23行目	$50H_z$	50Hz
p. 5	式(18)	$\dots - \cos(\theta + \alpha)\}$	$\dots - \cos(\theta + \alpha)\}]$
p. 7	5行目	実線	一点鎖線
	12行目	破線	実線
	16行目	$Re = u_g d / \nu$	$Re = u_g d / \nu$ として,