

河床砂浮上機構のモデル化 Modeling of Entrainment Mechanism of Sand Particles from the Stream Bed

東京工業大学 正会員○福岡捷二

日本下水道事業団 正会員 石田 貴

1 序 論

移動性の河床上を乱流が限界掃流力を越えて流れるとき、河床構成材料は種々の運動形態をとりながら流下する。このときの流砂量は、砂粒子の運動形態を考慮にいれて算定するのがのぞましい。しかし、実際には、異なった運動形態を単一の運動機構で代表させてモデル化し、流砂量をもつめることが多い。

河床から砂粒子が浮上する機構については、粒子に作用する流体力との関係で種々論議されているが、いまだ十分な説明がなされていないようである¹⁾²⁾。砂の供給源は、河床面であるため、砂粒子の浮上は河床面付近の流れの特性との関連で論ずる必要がある。近年、測定技術や装置、可視化技術の進歩によって、平坦な固定壁面上の流れの構造は、かなり明らかになってきた。しかし、移動床の場合には、砂の移動によって境界そのものが変形するため、底面付近の流れの構造は極端に複雑になる。したがって、河床波をとまなう乱流中で、河床から砂の浮上を解析的に取り扱うことは著しく困難になるので、まず平坦河床を有する乱流、特に境界付近の流れを、その特徴を生かしたモデルで表現し、そこでの砂粒子の浮上機構を理論と実験から検討するのがよいと思われる。

乱流では、空間内の一点での速度も圧力も時間的に一定でなく、平均流に種々の周波数をもつ変動が重なっている。マクロにみると、このような乱流変動は異なった大きさ、強さの渦（流体塊）が引き起していると考えることができる。しかし、渦（流体塊）の形や構造については、現在までのところほとんど何も知られていない。乱流境界層中の壁面のごく近傍には、粘性底層が存在する。Page - Townend³⁾、Einstein - Li⁴⁾らは、粘性底層内の流れの構造を観察し、底層内の流れは不安定で波状を呈していること、間欠的であることを見出した。壁面付近の流れをこのような特徴をもつ理由として、乱流境界層中の渦が、粘性底層中に侵入し、また粘性底層から渦がとびだすためであると主張した。Runstadler⁵⁾は、染料や水素気泡を用いてwall layer ($y^+ = y u_{\tau} / \nu < 10$)の構造を調べ、低速渦と高速渦が存在することを示した。これは、wall layer から不規則に流体がejectionすることによって引き起こされていることが確かめられてきた。その後、多くの実測によって固定壁面付近の間欠的な流れが乱流境界層とwall layerとの間を出入する渦によって引き起こされていることを裏づける研究成果が発表されてきている。

Sutherland⁶⁾は、平坦な移動床上の流れを詳細に観察し、そこでの流れが固定壁面付近の流れと酷似していることを見出した。そこで、彼は河床砂の浮上機構として次のような仮説をたてた。主流の境界層中の渦が河床方向へ運動し、粘性底層を破壊する。その結果、渦内の回転的な流れが砂粒子の表面に作用する。その結果、河床面に対し僅かに上向きに傾斜した速度ベクトルをもつ流れが粒子に作用し、粒子を浮上させる。図-1は、Sutherland による entrainment hypothesis の概念図である。

Sutherland は、河床付近の特徴的な渦運動を具現し、彼の entrainment hypothesis を実証するために、pulsating jetによって形成される渦輪と砂粒子の相互作用を実験的に調べた。その結果、pulsating jetによって生み出された渦輪が砂粒子を転動、浮上させる機構は、平坦移動床上の乱流境界層内の渦運動が、

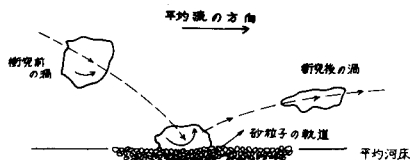


図-1 河床に衝突する渦の模式図⁶⁾

転動，浮上させる機構と同一であることを確かめ，*entrainment hypothesis* の妥当性を主張した。Sutherland が提案した *entrainment hypothesis* と，仮説を確かめるための *pulsating jet* による実験は，きわめて独創的であり，砂粒子浮上の主たる要因を示唆するものである。近年，Falco⁷⁾による乱流境界層の研究は，Sutherland の *hypothesis* の妥当性を，さらに強固にした。すなわち，Falco は，煙を利用して境界層流れを可視化し，渦の生成，発達過程を調べることによって，境界層内の代表渦はキノコ状の渦輪であることを示した。

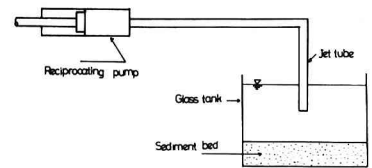


図-2 Sutherland の実験装置

しかし，Sutherland の研究は，提案した *entrainment hypothesis* を立証するために，*pulsating jet* の実験を行なったものであり，砂の浮上の定量的な検討を目的としたものではない。乱流境界層中の河床付近の砂粒子浮上の定量的な取り扱いを目指すためには，第一段階として，類似の流れの構造をもつ *pulsating jet* によって生み出された渦輪が砂粒子をどのように浮上させるかを考察する必要がある。

本論文は，*pulsating jet* から生み出された渦輪が河床面に近づいたときに誘起する流れが，砂粒子を転動，浮上させるに十分な力をもっているかどうかを Sutherland の実測値にもとづいて理論的に検討することを目的とする。

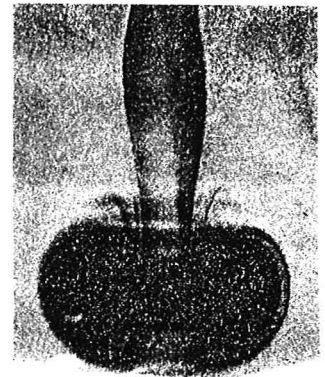


図-3 渦輪

2. Sutherland の実験装置と実験結果

渦運動と河床粒子の相互作用を調べるために，図-4 に示すような *pulsating jet* を作りだす装置が用いられた。水槽の大きさは， $35 \times 21.6 \text{ cm}$ であり，水槽の水深は， 23 cm に保たれた。ノズル径 a ，ノズル出口と底面までの距離 h ，を一定に保ち，ピストンの振巾 A と角周波数 ω を変えて，砂粒子の転動限界と浮遊限界を観察し，そのときの A と ω の値を求めた。用いた砂粒子の径は， 0.087 mm から 0.825 mm までの8種類，ノズル径 a は， 0.462 cm ， 0.620 cm ， 0.775 cm の3種類， h は， 3 ， 6 ， 9 cm の3種類について行なった。 a ， h ， A を固定すると振動数 ω の増加とともに粒子の運動は著しくなる。

ノズルから押し出される流体は，ピストン振巾 A が h に比して大きいときには，*circular turbulent jet* となり， A の大きさが中位のときには，図-3 に示すように先端部分に渦輪が生じる。 A が小さいときには，全体が渦輪となる。渦輪の運動状態は，中立粒子，染料を用いた可視化法で調べられた。

砂粒子の転動限界，浮遊限界について求められた A と ω の組み合わせから，渦輪が生じる程度にピストン振巾が小さいときには，図-4 に示すように， $A \omega^{\frac{2}{3}}$ の関係がほぼ成立することが示された。

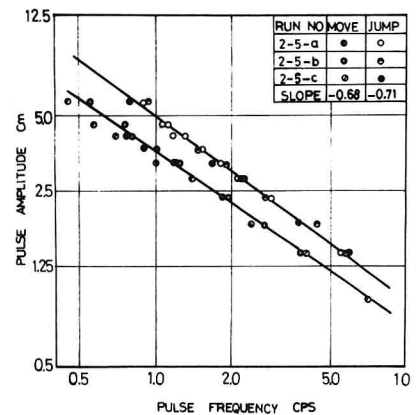


図-4 A と ω の関係

3 理論解析

直径 D の渦輪が底面に近づいたときに形成される流れの場を考えてみる。図-5 に示すように循環 Γ の渦輪が Z の位置にあるとき、 P 点に生ずる速度は、渦輪の径が不変であると仮定すると Biot-Savart の法則と鏡像の原理から次式であらわされる。

$$v_x = \frac{\Gamma}{\pi D} \left(\frac{Z-C}{D} \right) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\left\{ (\varepsilon - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + 4 \left(\frac{Z-C}{D} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} \\ + \frac{\Gamma}{\pi D} \left(\frac{Z+C}{D} \right) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\left\{ (\varepsilon - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + 4 \left(\frac{Z+C}{D} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$v_z = \frac{\Gamma}{2\pi D} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \varepsilon \cos \theta) d\theta}{\left\{ (\varepsilon - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + 4 \left(\frac{Z-C}{D} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \frac{\Gamma}{2\pi D} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \varepsilon \cos \theta) d\theta}{\left\{ (\varepsilon - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + 4 \left(\frac{Z+C}{D} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$v_y = 0$$

渦輪が $Z/D = 0.2$ の位置にある時に底面に誘起される流速 v_x の計算結果を図-6 に示す。 v_x の値は、渦核の軸を通る鉛直線上 ($\varepsilon = 1.0$) で最大となる。渦核中心軸上の v_x の鉛直分布の一例を図-7 に示す。図-8 は、渦輪が Z の位置にあるときに、渦核中心軸上の底面に誘起される流速を示す。これによれば、渦輪が底面に近づくほど v_x は無限に大きな値をとることになる。実際には、粘性の影響のため、このようなことは起こり得ず渦輪が底面に近づき得る限界の高さがある。

まず、限界高さ Z_c を渦輪のもつ運動エネルギーの保存と、流量の連続条件から求めてみる。つぎに、渦輪が Z_c の位置にあるときに、底面に誘起される流速 v_x を算定する。

ピストンによりノズルから押し出された流体のもつ運動エネルギー E_0 は

$$E_0 = \frac{1}{2} \rho \frac{\pi a^2}{4} A \cdot (2A\omega)^2 = \frac{1}{2} \rho \pi a^2 A^3 \omega^2 \quad (3)$$

一方、渦輪のもつ運動エネルギーは、次の4つの部分から成り立つと考えられる。

$E =$ 渦核の回転運動エネルギー + 渦核の並進運動エネルギー

(E_1)

(E_2)

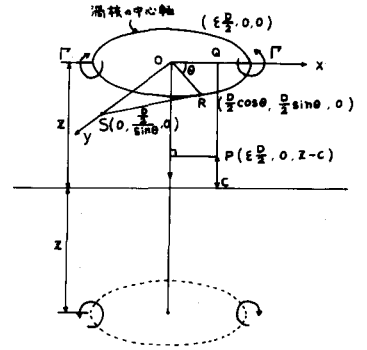


図-5 境界付近の渦輪の模式図

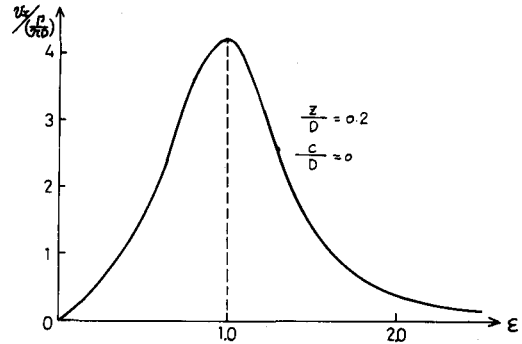


図-6 底面に誘起される速度 v_x

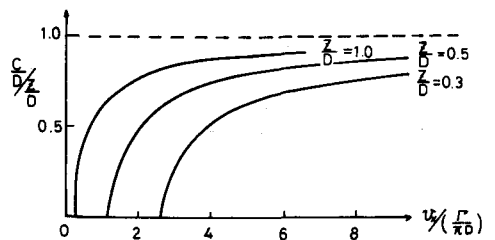


図-7 渦核中心軸上の v_x の鉛直分布

+ 渦核外の回転運動エネルギー
(E_3)

+ 渦輪の運動により周囲の流体を排除するために
費されるエネルギー
(E_4)

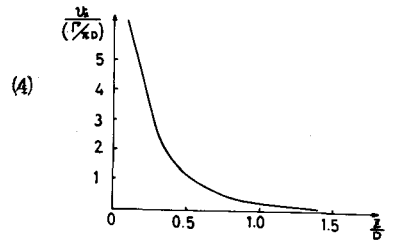


図-8 底面における渦核中心軸上の流速

渦核の直径を d とする。このとき、渦核の回転運動エネルギーは、

$$E_1 = \frac{1}{2} \rho \pi D \int_0^{\frac{d}{2}} 2 \pi r (r \omega')^2 dr = \rho \pi^2 D \omega'^2 \frac{d^4}{64} \quad (5)$$

となる。無限域の流体中の渦輪の移動速度は Lamb⁸⁾によって次式で与えられている。

$$V = \frac{\Gamma}{4 \pi D} \left(\ln \frac{8D}{d} - \frac{1}{4} \right) \quad (6)$$

式(6)を用いると、渦核の並進運動エネルギー E_2 と渦輪の運動により周囲の流体を排除するために費されるエネルギー E_4 はそれぞれ次式で与えられる。

$$E_2 = \frac{1}{2} \rho \pi D \frac{\pi d^2}{4} V^2 = \frac{1}{128} \rho \frac{d^2}{D} \Gamma^2 \left(\ln \frac{8D}{d} - \frac{1}{4} \right)^2 \quad (7)$$

$$E_4 = \frac{1}{2} \rho \pi D \frac{\pi d_0^2}{4} V^2 = \frac{1}{128} \rho \frac{d_0^2}{D} \Gamma^2 \left(\ln \frac{8D}{d} - \frac{1}{4} \right)^2 \quad (8)$$

ここに、 d_0 は渦輪断面の回転する部分の直径で、円を仮定している。

渦核外の回転部分の運動エネルギー E_3 は、速度成分が、式(1)、(2)で与えられることから次式となる。

$$E_3 = \frac{1}{2} \rho \pi D \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{d_0}{2}} 2 \pi r (v_x^2 + v_z^2) dr \quad (9)$$

ここで、循環 Γ がどのような大きさをとるかが問題となる。いま、循環は保存されると仮定すると、ノズル出口で流体のもつ循環値は、渦輪となっても変化しない。すなわち、次式で近似的に表現できる。

$$\pi a (2A\omega) \cdot A = \pi D \cdot \frac{\pi}{2} d^2 \omega' \quad (10)$$

直径 D の渦輪の単位長さあたりの循環 Γ は、式(10)の関係を用いると式(11)となる。

$$\Gamma = \frac{d}{2} \omega' \cdot \pi d = \frac{2aA^2}{D} \omega \quad (11)$$

次に、回転運動する流体の連続条件を考える。

図-9の Oxy 平面内で渦核の中心軸内を通過する流体は、速度成分として v_z のみをもち、点線で示した円筒の側面を通過する流体は、 v_x のみをもつ。この二つの平面で流量の連続条件をたてる。ただし、渦核部分の流量は等しいと考えられるのでこの部分は除外する。このとき、2つの面を通過する流量は、それぞれ次式で与えられる。

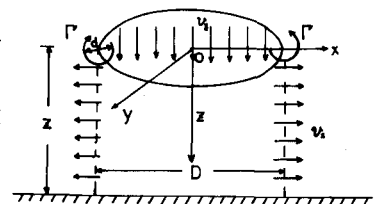


図-9 連続条件

$$Q_X = \pi D \int_0^Z Z^{-\frac{d}{2}} V_X dC \quad (12)$$

$$Q_Z = \frac{\pi D^2}{2} \int_0^1 1 - \frac{d}{D} V_Z \varepsilon d\varepsilon \quad (13)$$

式(1)で $C = \eta D/2$ の変数変換を行ない, $\varepsilon = 1$ とおく。式(2)では $C = Z$ とおく。その結果与えられる, V_X , V_Z を式(12), 式(13)に代入する。連続条件 $Q_X = Q_Z$ より,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{2Z}{D} - \frac{d}{D}} \left[\left(\frac{2Z}{D} - \eta \right) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + (\frac{2Z}{D} - \eta)^2\}^{\frac{3}{2}}} + \left(\frac{2Z}{D} + \eta \right) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + (\frac{2Z}{D} + \eta)^2\}^{\frac{3}{2}}} \right] d\eta \\ &= \int_0^{1 - \frac{d}{D}} \left[\int_0^{2\pi} \frac{(1 - \varepsilon \cos \theta) d\theta}{\{(\varepsilon - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta\}^{\frac{3}{2}}} - \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \varepsilon \cos \theta) d\theta}{\{(\varepsilon - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + 16 Z^2 / D^2\}^{\frac{3}{2}}} \right] \varepsilon d\varepsilon \quad (14) \end{aligned}$$

を得る。式(10)より求まる ω' を式(5)に代入する。

$$E_1 = \frac{1}{4} \frac{\rho a^2 A^4 \omega^2}{D} \quad (5)'$$

式(11)を式(7)に代入すると E_2 が求まる。

$$E_2 = \frac{1}{32} \frac{\rho a^2 A^4 \omega^2}{D} \left(\frac{d}{D} \right)^2 \left(\ln \frac{8D}{d} - \frac{1}{4} \right)^2 \quad (7)'$$

渦輪が, 図-9の運動状態にあるとき, 式(8), (9)の $d_0/2$ として Z をとるものとする。式(9)では V_X のみを考慮すればよいことになる。式(9)に $\varepsilon = 1.0$, $\eta = \frac{D}{2} (Z - C)$ の変数変換を実行し, 式(11)を代入すると, 次式を得る。

$$\begin{aligned} E_3 = & \frac{\rho a^2 A^4 \omega^2}{4D} \int \frac{\frac{2Z}{D}}{d} \left[\eta \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + \eta^2\}^{\frac{3}{2}}} \right. \\ & \left. + \left(\frac{4Z}{D} - \eta \right) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + (\frac{4Z}{D} - \eta)^2\}^{\frac{3}{2}}} \right]^2 \eta d\eta \quad (9)' \end{aligned}$$

同様に

$$E_4 = \frac{1}{8} \frac{\rho a^2 A^4 \omega^2}{D} \left(\frac{Z}{D} \right)^2 \left(\ln \frac{8D}{d} - \frac{1}{4} \right)^2 \quad (8)'$$

渦輪の運動エネルギーが保存されるものとする。 $E_0 = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$ から (15)式を得る。

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{D}{A} = & 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{d}{D} \right)^2 \left(\ln \frac{8D}{d} - \frac{1}{4} \right)^2 + \int \frac{\frac{2Z}{D}}{d} \left[\eta \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + \eta^2\}^{\frac{3}{2}}} \right. \\ & \left. + \left(\frac{4Z}{D} - \eta \right) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\{(1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + (\frac{4Z}{D} - \eta)^2\}^{\frac{3}{2}}} \right]^2 \eta d\eta + \frac{1}{2} \left(\frac{Z}{D} \right)^2 \left(\ln \frac{8D}{d} - \frac{1}{4} \right)^2 \quad (15) \end{aligned}$$

渦輪によって誘起される速度 V_x は、図-6 から明らかなように $X = \frac{D}{2}$ ($\epsilon = 1$) で最大となる。Sutherlandの実験によれば、 $X = 0.8a$ の位置の砂粒子が最初に動かされる。したがって、

$$D = 1.6a \quad (16)$$

で近似できる。上式を式(14)、(15)に代入すると両式は Z/D と d/D のみの関数となる。両式を連立して解くと Z/D を求めることができる。渦輪の径 D は変化しないと考えているので、式(14)の右辺に含まれる d/D の Z による変化は小さく d/D を一定として数値計算を行ない左辺の d/D を求める。この d/D を式(15)に代入すると $2\pi D/A$ と限界高さ Z_c/D の関係が求まる。

計算結果を図-10に示す。図-11は Sutherland の実験値 $2\pi D/A$ ($0.7 \sim 6.0$) と図-8、図-10 より求めた砂粒子浮遊限界の流速を示す。砂粒子特性が一定であれば、浮遊限界流速は、ほぼ一定と考えられる。 $2 < A < 6$ では、理論値 V_x は、ほぼ一定で、この性質を良く表現しているといえる。Sutherland が hot wire probe を用いて測定した V_x は 17.6 cm/s であり、計算値に近い値となる。 A が小的时候、 V_x は全体的な傾向からはずれている。この理由は、 A が小で粒子移動が起こるためには、 ω が大きくならねばならず、このとき、渦輪相互の干渉が起こるためである。実際に、砂粒子が浮上するためには、底面から砂粒子の高さ程度の位置で鉛直上向き流速が存在しなければならない。図-12は、 $Z/D = 0.2$ の位置に渦輪があるとき、式(2)から求めた粒径程度の高さでの鉛直流速を示す。これより、渦核中心の外側で上向きの鉛直流速を生じていることがわかる。従って砂粒子は、最初 V_x によって水平に転動し、やがて、 V_x と V_z の合速度によって浮上するものと思われる。

以上の解析によって、河床付近の流速分布が求まるので、今後はこのような流れの場に砂粒子が存在するとき、粒子に作用する流体力を計算し、実測と比較する。

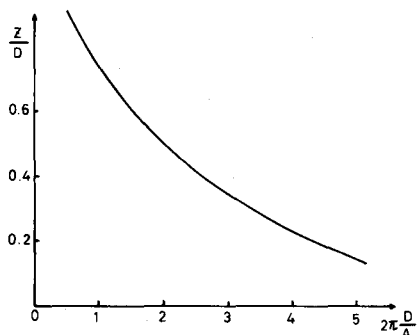


図-10 渦輪が底面に近づき得る限界高さ Z_c

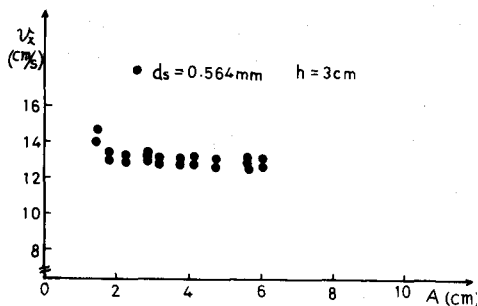


図-11 砂粒子浮遊限界流速

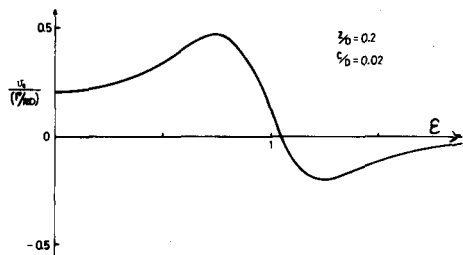


図-12 河床付近での鉛直流速 V_z

参考文献

- 1) Einstein, H. A., Trans. ASCE, Vol. 107, 1942.
- 2) Kalinske, A. A., Trans. AGU, Vol. 28, No. 4, 1947.
- 3) Fage, A. and Townend, H., Proc. Roy. Soc. London, A. 135, 1932.
- 4) Einstein, H. A. and Li, H., Trans. ASCE, 123, 1958.
- 5) Runstadler, P. W., and et'al., Dept. Mech. Eng., Stanford Univ., 1963.
- 6) Sutherland, A. L., J. of Geophy. Res., Vol. 72, No. 24, 1967.
- 7) Willmarth, W., Advances in Applied Mech., 1974.
- 8) Lamb, H., Hydrodynamics, 1963.