

一様流中におかれた円柱のカルマン渦による振動

Vibration of a cylinder induced by Karman-vortex shedding

東京工業大学工学部 正会員 沢本 正樹
東京工業大学大学院 学生員 菊地 健治
香 川 県 山地 博文

1. はじめに

流れの中におかれた円柱には、カルマン渦の放出により交番揚力が作用する。この揚力はカルマン渦の周期で変動し、その振動数を用いて定義した Strouhal 数は、Reynolds 数の広い範囲で、ほぼ一定の値をとることが知られている。しかし、円柱が弾性的に支持され、その振幅が大きくなった場合には、カルマン渦と、円柱の振動との相互作用により、その放出振動数が円柱の固有振動数にひきずられるという周波数同期現象が起こる。これにより、相互作用を無視した場合に比べて、かなりひろい流速の範囲で振動が顕著になる。この現象は、耐風の分野などで、はやくから関心を持たれてきているが、潮流中の鋼管杭などの水理構造物に関しても無視しうるものではない⁽¹⁾。

既往の研究としては、円柱の振幅をみかけの円柱径の中に考慮した Landweber (1945) の研究、放出される渦の強さ、位相を解析の中にとりいれた Di Silvio (1969)⁽²⁾ の研究などを挙げることができるが、必ずしも実際の現象をうまく説明しているわけではない。

本研究では、円柱の振動の影響を簡単なモデルより評価し、周波数同期現象を説明することを試み、さらに実験的に検証した。

2. 変動揚力による円柱の振動

一様流中に弾性的に支持された円柱の振動を解析する。外力としては、カルマン渦の放出に伴う揚力の変動を考え、したがって、振動の方向は流れに直角方向のみを対象とする。カルマン渦の放出に伴う揚力の変動は、必ずしも単純な正弦波形をしているものではないが、以下の議論はすべて変動揚力を

$$F_L = \hat{F}_L \sin \omega t \quad (1)$$

という理想的な変動をするものとし、また円柱の応答についても正弦的なもののみに限り、それらの振幅、振動数、位相差の間の関係について明らかにしていく。

式 (1) であらわされる揚力が作用するときの円柱の振動は、よく知られているように次のようになる。

$$X = \frac{x}{d} = \hat{X} \sin (\omega t - \theta)$$

$$\hat{X} = \frac{\frac{1}{2} k d \cdot C_L \rho d U^2}{\sqrt{\left\{ 1 - \left(\frac{S}{S_n} \right)^2 \right\}^2 + \left\{ 2 \frac{\varepsilon}{\omega_n} \frac{S}{S_n} \right\}^2}} \quad (2)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2 \frac{\varepsilon}{\omega_n} \frac{S}{S_n}}{1 - \left(\frac{S}{S_n} \right)^2} \quad (3)$$

ここに、 X は円柱径 d で無次元化した変位、 θ は力と変位との位相差、 S 、 S_n は、夫々、カルマン渦の振動

数 f と、円柱の固有振動数 f_n で定義した Strouhal 数で、

$$S = \frac{fd}{U} = \frac{\omega d}{2\pi U}, \quad S_n = \frac{f_n d}{U} = \frac{\omega_n d}{2\pi U}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

m は付加質量をも含んだ円柱の質量、 k はバネ定数、 ε は減衰係数、 l は円柱の長さである。また、揚力係数 C_L は、外力の振幅 $\hat{F}_L$ より、

$$C_L = \frac{\hat{F}_L}{\frac{1}{2} \rho d l U^2}$$

と定義する。

以上より、あるバネ系で支えられた円柱が、流速 U の流れにさらされた時の応答は、 S および C_L が与えられれば、式 (2), (3) より求めることができる。最も簡便的な方法は、 S , C_L を共に定数とおけばよい。しかし、実際には、 S , C_L は円柱が振動することの影響をうけ、特に、周波数同期現象を説明するためにはこれらをいずれも定数とおくことは意味がない。

円柱の振動が S と C_L におよぼす影響を考えるまに、まず、固定円柱についての S と C_L について総括

してみよう。図 - 1 には、① Roshko (1954)⁽³⁾, ② Kovaszny (1949), ③ Bishop & Hassan (1964 a)⁽⁴⁾, ④ Gerrard (1961)⁽⁵⁾ の固定円柱の S のデータを集成して示してある。実験値のばらつきは比較的小さく、 $R_e > 300$ では、よく知られた 0.19~0.21 の範囲の値をとる。 C_L については、図 - 2 に① Bishop & Hassan (1964 a)⁽⁴⁾, ② 山本・関田 (1973)⁽⁶⁾, ③ Funakawa (1971)⁽⁷⁾, ④ Humphreys (1960)⁽⁸⁾

⑤ Macovsky (1958) の結果を示す。図 - 1 の S の結果と比較すると、 C_L のばらつきは非常に大きいことがうかがえる。カルマン渦の放出に伴う流体力の中で抗力については、渦の強さ、周期、配列などの渦の特性量を用いて説明することは可能である。同様の方法を変動揚力に適用した場合には必ずしもうまくいっていない。例えば、前述の Di Silvio (1969) においては揚力を同様の方法で評価しているが、彼の理論を固定円柱に適用して C_L を求めると、6.6 となり図 - 2 に示す種々の実験値とはかけ離れた値となる。また、渦糸群を用いてカルマン渦を simulate

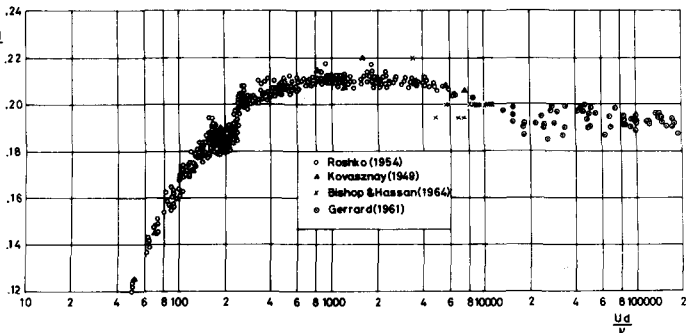


図 - 1 固定円柱の Strouhal 数

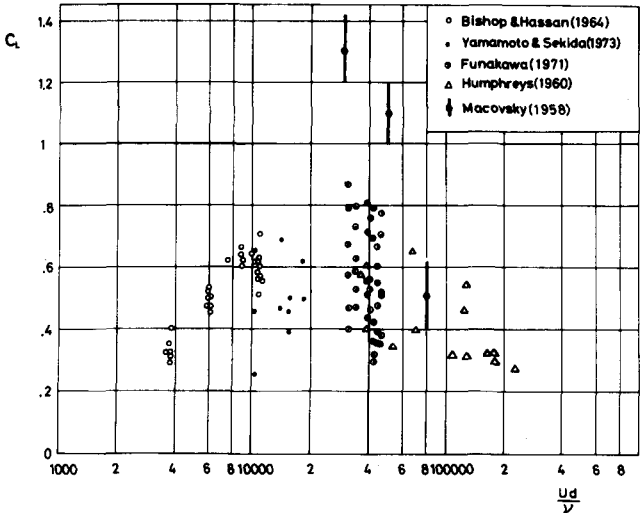


図 - 2 固定円柱の揚力係数

する場合には、渦の配列および抗力は比較的良好に説明しうるが、揚力係数は実験値の約2倍の値を与えるという結果が報告されている。

以上のことを予備知識として、 S と C_L におよぼす円柱の振動の影響について検討しよう。結論から言うと、円柱の振動は、 C_L についてはその精度からみて、解析の中に取り入れる意味があるほどの影響はないと思われる。物理的には C_L の値を最も直接的に支配しているものは放出される渦の強さであり、それは円柱表面上の境界層から後流の中へ補給される渦度流束により決定されていると考えられる。円柱が振動する場合の渦度流束の変化は、円柱にぶつかる相対流速を考慮することにより見積ることができる。これより振動時の C_L は、固定円柱の C_L と次のように関係づけられる。

$$C_L = (C_L)_{\text{stat.}} \cdot (1 + 2\pi^2 \hat{X}^2 S^2) \quad (4)$$

S は、0.2 近くの値をとり、 $\hat{X}$ は、この種の問題では、0.5 程度までの値をとることが多い。これらの値を代入すると C_L は、振動時2割程度増加すると考えられる。これだけの变化は必ずしも無視しうるものではない。しかし、実際に各種の実験値を整理して式(4)の関係をたしかめたところ、データのばらつきがはるかに大きく、この程度の変化を考慮することはそれほど意味のあることとは考えられなかった。それゆえ、ここでは以後 C_L は定数として解析を行なう。

一方、周波数同期現象を説明するためには、 S と円柱の振動との関係を定量的に表現することが必要である。ここでは以下のようにして円柱の振動の効果を考慮した。

円柱が振動することにより、後流幅は変化するが、渦列の安定性より、渦列の配列については一定の関係がなりたっている。いいかえると、円柱径 d のかわりに見かけの円柱径 d' を用いれば、振動円柱についても Strouhal 数 S は固定円柱の場合と同じ値をとるはずである。すなわち、

$$\frac{fd'}{U} = S_{\text{stat.}} = S \frac{d'}{d} \quad (5)$$

となる。ここに $S_{\text{stat.}}$ は、図-1に示される固定円柱の Strouhal 数である。みかけの径 d' については、次のように考える。

固定円柱の場合の円柱上の剥離点は、ほぼ $\theta_s = 90^\circ$ であり、円柱上下の剥離点幅、すなわち円柱径が後流幅と一定の比率関係にある。それゆえ、振動円柱の場合にも、ある位相 ωt_0 での剥離点の位置が後流幅を決定していると、その時の剥離点幅が、みかけの径 d' に対応すると考えられる。すなわち、

$$\frac{d'}{d} = (\hat{X} \sin \omega t_0 + \frac{1}{2} \sin \theta_s) \times 2 \quad (6)$$

となる。これと式(5)より、振動時の Strouhal 数 S と、固定円柱の Strouhal 数 $S_{\text{stat.}}$ の関係は

$$\frac{S}{S_{\text{stat.}}} = \frac{1}{2 \hat{X} \sin \omega t_0 + \sin \theta_s} \quad (7)$$

となる。剥離点 θ_s は、詳細に解析することは困難であるので、ここでは、振動円柱のまわりのポテンシャル流れを計算し、それより求まる圧力が、順勾配から逆勾配に変わる点が剥離点の概略の位置をあらわすと考えた。具体的には θ_s は、

$$\begin{aligned} \pi^2 S^2 \hat{X}^2 \sin \omega t_0 \cos \theta_s + \{1 - (2\pi \hat{X} S \cos \omega t_0)^2\} \sin 2\theta_s \\ - 4\pi \hat{X} S \cos \omega t_0 \cos 2\theta_s = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

を満たすことになる。

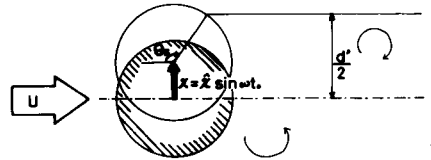


図-3 みかけの径 d'

式(7),(8)を連立して解くことにより, ωt_0 をパラメータとして, S と $\hat{X}$ の関係をもとめることができる。結果は, 図-4に示す。では, 後流幅を決定している位相 ωt_0 は, どのように考えればよいのであろうか。 ωt_0 は, 渦の変化の指標であるから, ωt_0 時には変位 X に関係なく渦のパターンは一定になると考えられる。一方, 渦のパターンの変化は, 揚力の変動と直接関連している。これらより, ωt_0 は, 力と変位の位相差 θ と

$$\theta = \omega t_0 + C \quad (9)$$

C : 定数

という関係があるはずである。定数 C は, 次のようにして定めた。Bishop & Hassan (1964 b) ⁽¹⁰⁾ は, 一様流中で円柱を流れに直角方向に機械的に振動させ, 力の位相と振動周期, 振幅との間の関係を実験的にしらべている。それによると力と変位の位相差が 0.5π をはさんで急激に変化する点が存在する。今の問題にてらしてみると, 力と変位の位相差が 0.5π になることは共振状態と対応している。図-4には, Bishop & Hassan の示した位相差が急変する点の実験値を併示してあるが, これは, ωt_0 が 10° の曲線と大体一致している。すなわち, $\omega t_0 = 10^\circ$ と $\theta = 90^\circ$ が対応している。これより, 式(9)の定数 C は 80° とおけばよいことがわかる。

以上より, 円柱の振動応答は, 適当な C_L の値の下で, 式(2),(3), 図-4の S と $\hat{X}$ と ωt_0 の関係, および式(9)を連立させてとけば求められる。実際これらを解くにあたっては解は陽形式には求まらず, 与えられた無次元流速 $U/f_n d = 1/S_n$ に対し, まず S の値を仮定し, その時の $\hat{X}$, θ を式(2),(3)より求め, さらに, この $\hat{X}$, θ を用いて図-4より S の値を逆算し, これが仮定した S と一致しない場合は, S の値を仮定し直すという繰り返しの法が必要であった。

3. 実験方法

2.の結果を検討するために実験を行なった。

装置の概略は図-5に示す。長さ8 m, 幅0.4 mの可変勾配水路中央に, 板バネで支持された径6 cmの亚克力製円柱をおき, その応答をしらべた。自由表面には円柱の振動を阻害しない限界までふたをし, 水面変動の影響をできる限りのぞいた。円柱の変位は, バネに取り付けられたストレーンゲージと動歪測定器よりとめた。同時に水中にパンチくず, アルミ粉などをいれ流れの観察を行なった。流速は壁の影響をうけ多少の分布をしているがデータの整理はすべて平均流速を用いている。2.では流れに直角方向の振動のみを取り扱ったが実験では, 流れ方向の振動についても検討を加えた。

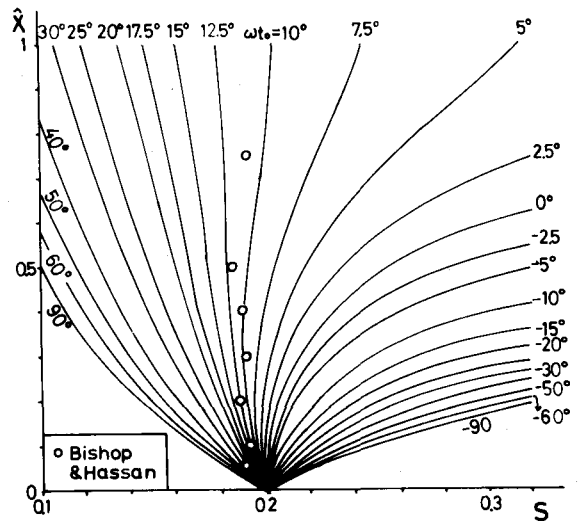


図-4 S と $\hat{X}$ と ωt_0 の関係

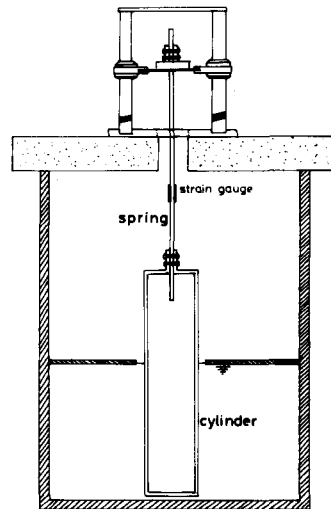


図-5 実験装置の概略

4. 結果と考察

まず、円柱の振動による剥離点の移動が、実際に理論で考えたようなもので表わされるか否かを、流れの可視化観察により確かめた。図-6には円柱のまわりの剥離点の移動について、8 mm シネカメラから解析した結果と、前述のポテンシャル流れの圧力勾配の変化点との比較を示す。一般に実験値より剥離点を決定することはそれほど容易なことではない。今回の場合も、剥離点位置は 10° 程度の幅でしか判別しえなかった。よって、その程度のデータのばらつきを考慮して図を見ると、ポテンシャル理論で剥離点位置を大体は説明しうることがわかる。

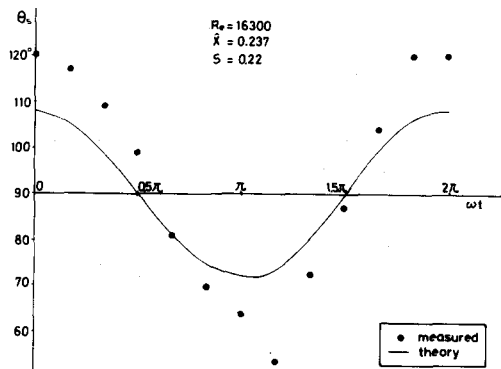


図-6 剥離点の変動

図-7は、円柱の流れに直角方向の応答の一例である。(a)は変位の応答を、(b)はStrouhal数 S を示してある。図中実線は本理論、破線は C_L, S 共に定数といた簡便法、○は実験値を示す。 C_L についてはいくつかの値で試算を行なったが、ここでは0.3の場合の例を示してある。

図-7(a)をみると、流速をしだいにあげていくと、簡便法では振幅は徐々に増加し、 S と S_n とが一致する点で共振状態となり最大値をとり、それ以降で減少していく。一方、本理論では流速をあげていくと、変位は、 $1/S_n = 3.6$ 近くで急激に増加する。この際 S もほとんど S_n と一致し、いわゆる周波数同期の状態になる。

実験的には、流速を徐々に増加していくと、低流速の間は振動は小さい。カルマン渦の放出はみられるが振動波形は必ずしも正弦的なものばかりではなく、時折、渦のパターンもくずれることがある。ある流速をこえると円柱は固有振動数でふれだし流速の増加に伴い振幅も増加する。この間、同じReynolds数の固定円柱にくらべ、非常にはっきりした規則的な渦が観察され、また、振動波形も安定した正弦波形となる。

$1/S_n$ がほぼ5を越すと振動は減少する。この場合、振幅は小さくなるものの、うなりが生じたり、振動数が一定にならなかったりして、かなり不規則な振動が観察される。

実験と本理論との対応は、流速が増加し振幅がピークをむかえるまでの間は比較的よい。しかし、さらに流速をあげた場合については本理論ではうまく説明しえず、むしろ簡便法の方がより現象を説明しているようにもみえる。しかし、この範囲は渦自体が不安定で

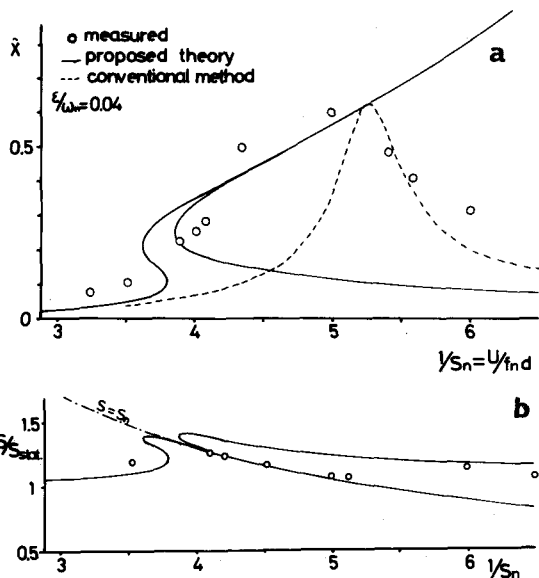


図-7 流れに直角方向の応答

(a) 変位, (b) 振動数

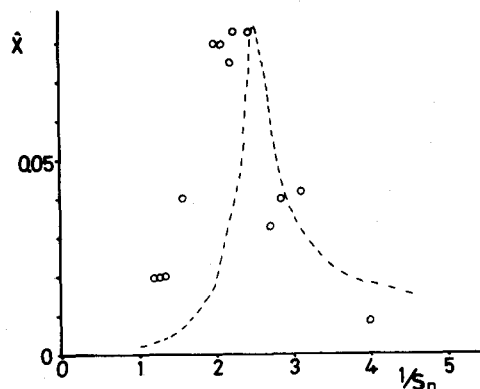


図-8 流れの方向の応答

おり、むしろ、ここで述べたような調和解析自体がそぐわないものと考えられる。

実験的に C_L と S と $\hat{X}$ との関係を定める試みも行なったが、その場合、個々の C_L のばらつきが大きく全体的な傾向はつかめなかった。ただ、今回行なった範囲では、 C_L を 0.3 にすると、応答曲線と実験値とを比較のよく一致させることができることがたしかめられた。

図-8 には、流れ方向の振動についての変位の応答を示してある。カルマン渦は円柱の両端から放出されそれぞれが流れ方向に変動成分をもつため、揚力に比してちょうど2倍の振動数の抗力変動をひきおこし、 $1/S_n$ が 2.5 で最大変位があらわれる。変動抗力については、実験的には周波数同期はみとめられず、簡便的な応答計算が可能であると思われる。図には、変動抗力係数 C_D' を 0.37 とした時の簡便法の結果を併せし示すが、実験値と比較のよく一致している。

5. 結 論

流れの中におかれた円柱の振動について、主に周波数同期現象を説明することを目的として解析を行なった。振動の影響は、剝離点の変化を考慮することにより解析の中へ取りいれた。理論と実験的とは、流速が高い範囲を除いて、比較のよく一致している。揚力係数 C_L は、いくつかの試算の後、0.3 が一番よい結果を与えることがたしかめられた。

参 考 文 献

- (1) Sainsburg, R.N. and D.King(1971) ; The flow induced oscilation of marine structures, Proc. of the Institution of Civil Engineers, Vol.49, 269 - 302.
- (2) DiSilvio, G.(1969) ; Self-controlled vibration of cylinder in fluid stream, ASCE, EM2, 347 - 361.
- (3) Roshko, A.(1953) ; On the development of turbulent wakes from vortex streets, NACA Technical Report 1191.
- (4) Bishop, R.E.D. and A.Y.Hassan(1964 a) ; The lift and drag forces on a carcula cylinder in a flowing fluid, Proc. Royal Soc., A277, 32 - 50.
- (5) Gerrard, J.H.(1961) ; An experimental investigation of the oscillating lift and drag of a circular cylinder shedding turbulent vortices, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 11, 244 - 256.
- (6) 山本 諄・関田欣治(1973) ; 潮流海域における浮遊式鋼管構造物および海底パイプライン等に作用する振動力について, 第20回海岸工学講演論文集, 301 - 304.
- (7) Funakawa, M. and R.Umakoshi(1971) ; Vibration of a cylinder caused by wake force, Wind Effects on Building and Structures, 777 - 786.
- (8) Hamphreys, J.S.(1960) ; On a circular cylirder in a steady wind at transition Reynolds number, Journal of Fluid Mechanics, Vol.9, 603 - 612.
- (9) Stanby, P.K.(1977) ; An inviscid model of vortex shedding from circular cylinder in steady and oscillatory far flows, Proc. of the Institution of Civil Engineers, Vol. 55, 865 - 880.
- (10) Bishop, R.E.D. and A.Y.Hassan(1964b) ; The lift and drag forces on a cirular cylinder oscillating in a flowing fluid, Proc. Royal Soc., A277, 51-75.