第23回水理講演会論文集　1979年2月

ベイズ決定問題としての渇水予測 ― 長期気象予報の利用 ―

The Drougt Estimation as a Bayesian Decision Problem ― The Utilization of Long Term Meteocological Forcasts ―

○東京都立大学　工学部　正会員　新井邦夫
〃　〃　〃　丸井信雄

1. はじめに

大都市の水不足化傾向は年々深刻さを増しているが、事に当って需要者の不利益を配慮するあまり、とかく対策の実施が遅れがちとなる傾向にあった。しかしながら今日のように需給関係が著しく逼迫してくると、ある年の水不足が累年的に影響する恐れが大きくなるから、管理者は渇水期の初期における早めの対応を今までにもまして切望するに違いない。このような渇水期初期の対応は実施されるとしても一般に軽度になろうが、社会的影響が著しく大きい問題となるので、そこに到った意思決定過程を高度な合理性を有したものにしておかなくてはならない。

以上が渇水対策意思決定モデルを必要とする所以であるが、そのモデルの構築に際しては、渇水期全般の降雨量予測を避けて通ることは極めて難かしい。

本研究は気象庁が発表する３カ月気象予報の情報としての利用価値を検証することを主たる目的とし、渇水に伴なう取水制限を単純なベイズ決定問題として考察したものである。

2. ベイズ決定理論とその応用上の問題点

ベイズ決定理論は種々の問題に応用されうるが、水文学に関する最近の研究は分布の定数を推定する問題に関するものが多い。[1] その１つの理由は、この種の問題は結合分布を求める問題として、数学的展開が容易であるからと思われる。

ベイズ決定法は基本的に次のような手順を経て遂行される。[2]（図－１）

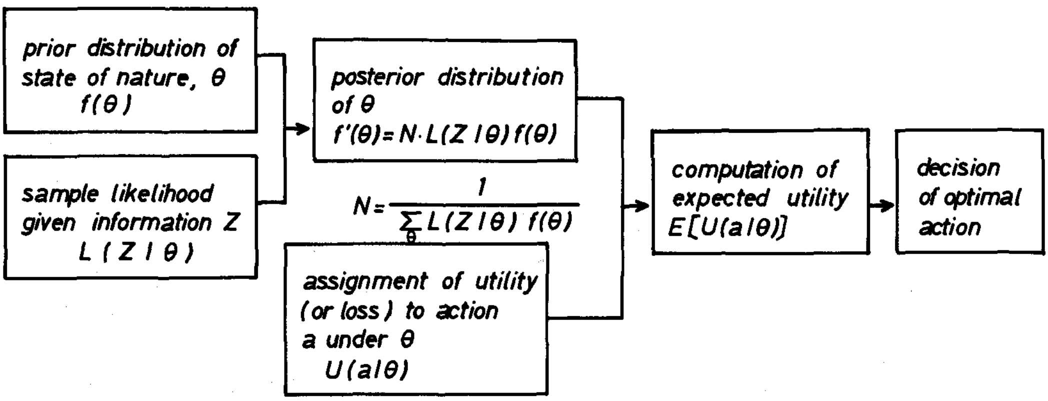

Fig 1　Steps of Baysian Decision Procedure

i　既存資料をもとにした事前分布の作成。

ii　新しい情報をもとにした sample likelihood の作成。

iii　sample likelihood による事前分布の修正（修正された分布を事後分布と呼ぶ。）

iv　選択すべき行動とその効用の割り付け

V　期待効用の計算と最適行動の決定

言うまでもなくこの手順中最も重要な項目はベイズ定理に基づくⅲと、その前提となるⅱである。ベイズ決定理論が広く知られているにもかかわらず、水文学に関連する事例研究が少ない理由の１つはここにある。

事後分布の分散は事前分布のそれより小さくならなければ修正する意味がない。これは次のように考えると理解が深められる。

今 sample likelihood が２次元正規分布であるとする。事後分布の平均および分散は次の通りである。

$$E〔X \mid Y=y〕= m_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - m_Y) \quad \cdots\cdots (1)$$

$$V〔X \mid Y=y〕= (I - \rho^2)\sigma_X^2 \quad \cdots\cdots (2)$$

つまり事後分散は、事前分散を最大とし、相関係数ρが大きくなるにしたがい小さくなる。

実際に応用する際に例えばAndersen[3]が示したような見事な sample likelihood が得られることはまれであり、ほとんどの問題は中村等[4]の研究が示しているように、大なり小なり変形された事後分布を使用せざるを得ないことが多い。

さらに sample likelihood が離散型になることも大きな障害となる。ここではその逆の比較的スマートな解が得られる例を示そう。

今、取水制限をするかしないかの境界流量を決定する問題を考える。事後分布の流量が次式の対数正規分布で表現されるものとする。

$$f(r) = \frac{1}{r\sqrt{2\pi}\sigma} \exp〔-\frac{(\ln r - m)^2}{2\sigma^2}〕 \quad \cdots\cdots (3)$$

さらに次式の効用を考える。

$$U(r) = a r_0 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \quad \cdots\cdots (4)$$

期待効用は

$$E〔U(r)〕= \int_0^\infty U(r) \cdot f(r)dr = a r_0 \left(1 - r_0 e^{-m + \frac{\sigma^2}{2}}\right) \quad \cdots\cdots (5)$$

となり、これを微分して０とおけば、

$$r_0 = \frac{1}{2} e^{m - \frac{\sigma^2}{2}} \quad \cdots\cdots (6)$$

が得られる。これから、境界流量r_0はｒの分散に影響されることがわかる。すなわち３式を事後分布とすれば、その分散を可能な限り小さくすることがr_0を大きくすることにつながるのである。

いずれにしても実際の問題に応用するためには、事後分布は一般離散型とならざるを得ず、解は数値的に得なければならないであろう。

3.　利根川上流平均雨量に対する気象予報

今、次のような問題を図－２に示した決定樹で考える。ダム群の放流を制限する（a_0）か、しない（a_1）かとの行動と、下流において渇水（水不足）になる（θ_0）か、ならない（θ_1）かとの真の状態が組み合わされた時、その最適行動を選択する際に、気象予報を配慮する必要がある（e_1）か、ない（e_0）か？

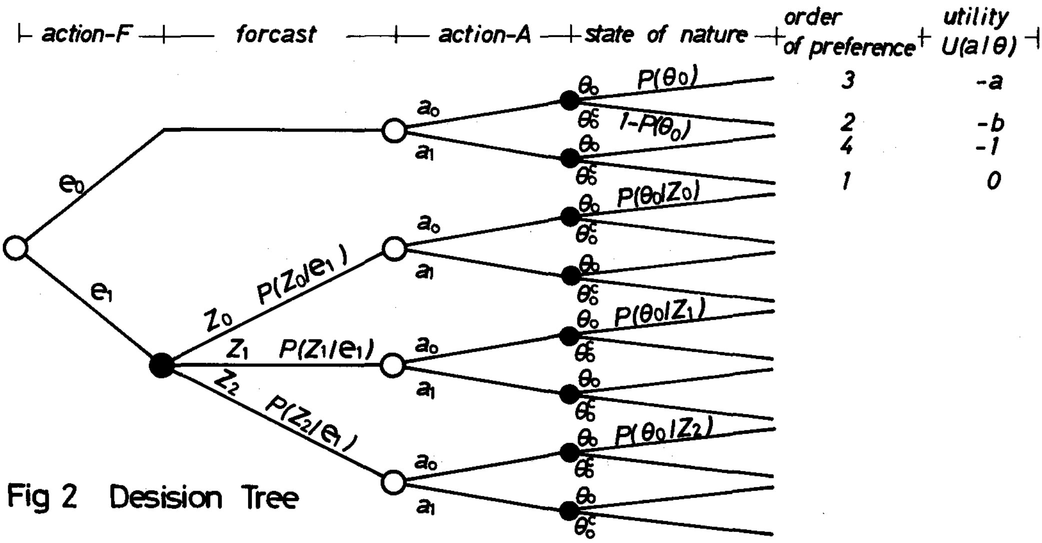

Fig 2 Desision Tree

これを式であらわせば次のようになる。行動Aに関する最適期待値は、予報を利用する場合は、

$$Ae_0 = max〔E\{U(a_0 \mid \theta)\},\quad E\{U(a_1 \mid \theta)\}〕 \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

となり、利用しない場合は予報値 z_i によって

$$A_{e_1,zi} = max〔E\{U(a_0 \mid \theta_{zi}\},\quad E\{U(a_1 \mid \theta_{zi})\}〕 \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

となるから、行動Fに関する最適期待値は

$$F = max〔Ae_0,\quad \sum_i A_{e_1,zi} \cdot p(Zi \mid e_1)〕 \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

となる。ここにE｛ ｝は期待値。

次に実際の数値で計算をしてみる。

i　事前分布の作成

渇水（水不足）の程度は、本質的には単位時間当りの流量の大きさと、その継続時間によって定義されるものであるが、ここでは、利根川下流部のそれは上流の流域平均雨量と一義的に関係するものとし、７５年間５地点（水上、万場、草津、五料、片品）の平均雨量を基礎資料とした。

又渇水の生起確率を０.３とした。これは主として、sample likelihood 作成時における制約によるものであるが、最近の東京都水道の給水制限は１９７３年および１９７８年に実施されており、１９７２年にはほとんど実施寸前までに到ったことがあるから、あながち大きすぎる値とは言えまい。

ii　sample likelihood の作成

気象庁では、毎月１０日および３０日前後にその翌月の月予報を、又毎月２０日前後に向こう３カ月の予報を発表している。前者は月を３旬に分け、１０日毎の天候の概要と、気温、降水量の予測を平均値中心に確率的に区分した５段階で予測している。１９６４～１９６６年の３年間に渡り、１５地点の気温および降水量について予報成績を調べた報告[5]によれば、降水量の適中率は高く、６６％であった。後者の３カ月予報は、３カ月の月別に、１カ月予報と同様の表現で天候の概要と、気温、降水量の予測を示している。これ

の予報精度についての研究はまだない。

首都圏の渇水期に当る期間の降雨予測を検証する目的から、「関東甲信地方の3カ月予報」を sample likelihood 作成のために利用する。利用した予報文は、1966年から12年間の5月から8月までの各月に発表されたものである。図−3に、平均月雨量とその月の直前月に発表された予報ランクとの関係を示した。どのように見ても相関があるとは思えない。

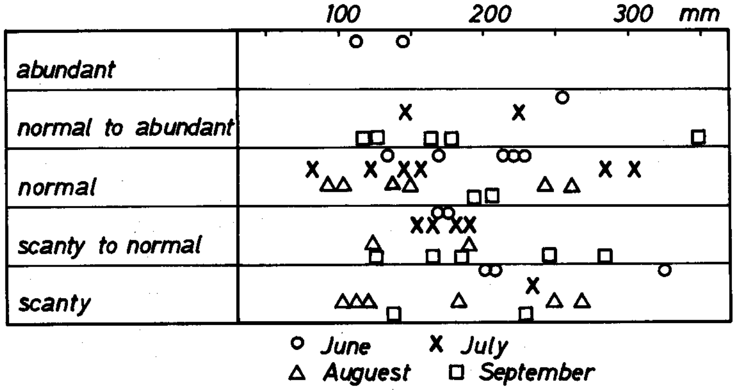

Fig 3 Relationship Between Actual and Forcast Monthly Rainfall

そこで、2カ月雨量と、予報文中の前2カ月の予報を、図−4、表−*1*のように整理すると、表−*2*のように1カ月雨量からは想像もできない程両者の間に格段に高い相関を有する結果が得られた。

これについては十分な精査が必要であるが、考えられる原因としては、a) 梅雨、および台風は一般に2カ月にまたがって発現することが多く、降雨の発現時期が、予報に対し前後にずれることがあるのではないか？ b) 0.3と設定した渇水確率が2カ月雨量に対して適合性が高いのではないか？ などが考えられる

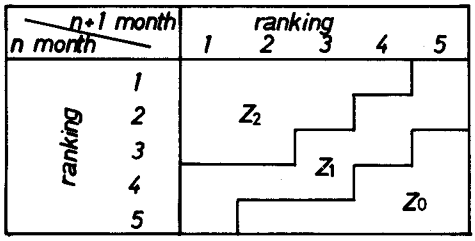

Fig 4 Ranking of Forecast Two-Month Rainfall

修正された事後分布を表−*3*に示した。これから次のようなことがわかる。雨の予報が少ないと発表されたときの実現確率は、事前確率より14％程大きくなるにすぎない。一方、予報が多いと出た場合であっても、実際の雨が少ない確率は依然22％もある。

ranking	probability(%)	boundary value of two month rainfall in mm on log-normal Prob. Paper		
		Jun&Jul	Jul&Aug	Aug&Sept.
θ_0	30			
		400	450	430
θ_1	40			
		300	320	320
θ_2	30			

Table 1 Ranking of Actual Two-Month Rainfall

iii 効用の割り付け

一般に効用は費用で示されることが多いが、必ずしも金銭で示す必要はない。ここでは最も好ましい行動と真の状態の組み合わせ $a_1 \sim \theta_1$ の効用を0とし、その逆の組み合わせの効用を−1とし、他を変数とした。

actual / forcast	scanty(θ_0)	normal(θ_1)	abundant(θ_2)
scanty(Z_0)	0.50 (7)*	0.29 (5)	0.26 (2)
normal(Z_1)	0.36 (5)	0.47 (8)	0.37 (3)
abundant(Z_2)	0.14 (2)	0.24 (4)	0.37 (3)

* frequency

Table 2 Sample Likelihood

iv 結果および考察

未知の効用に種々の数値を入れ、式(7)(8)(9)に従って最適行動を決定すると図−5に示した結果が得られた。すなわち、a , b の値を図中の曲線の上方にとるか、下方にとるかによって、3カ月気象予報を利用するかしないかが決まる。一般に $U(a_0 | \theta_0) < U(a_0 | \theta_1)$ で

state of nature θ	prior distribution $P(\theta)$	posterior distribution		
		$P'(\theta/Z_0)$	$P'(\theta/Z_1)$	$P'(\theta/Z_2)$
scanty (θ_0)	0.3	0.44	0.27	0.17
normal (θ_1)	0.4	0.34	0.46	0.39
abundant (θ_2)	0.3	0.22	0.27	0.44

Table 3 Prior and Posterior Distribution

あるから、$a>b$なる領域の数値が効用として取られよう。

通常、渇水期の初期において実施される取水制限の程度は低くいはずであるから、効用は図の左上部付近の値がとられ、気象予報は利用すべきである。一方、上流ダム群の貯水量が著しく少ない場合や、貯水量が急激に低下することが考えられる場合には、万一発生した時の水不足の程度は深刻となり、又制限は急激に強められよう。このような場合の効用は、比較的大きな値が採用されるから、効用の組み合わせは曲線の下方になることが予想され、長期予報利用の効果はなくなる。

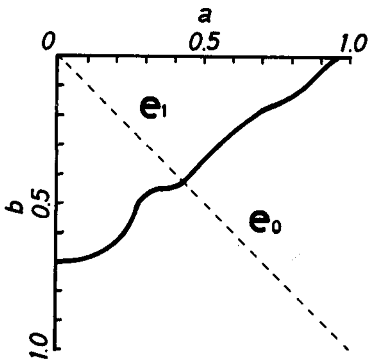

Fig 5 The relationship Between Utility and Action-F

4. おわりに

以上の考察を肯認するならば、今まであまり注目されることのなかった長期予報は整理の仕方によっては利用できる場合があることを暗示させる結論を得る。

この結論が、一般論として成立するかどうかは、より多くの例によって検証しなければならないが、いずれにしても、今後発生する渇水時に備え、合理的な意志決定モデルを確立しておくことが緊要である。

参 考 文 献

1) 例えば、Vicens, G J, et al, A Bayesian Framework for the Use of Regional Information in Hydrology, Water Resources Resources Research, Vol 11 № 3, 1975

Wood, F F, et al, A Bayesian Approuch to Analyzing Uncertainty Among Flood Frequency Model, Water Resources Research, Vol 11 № 6, 1976

Duckstein, L et al, Bayes Design of a Reservoir Under Random Sediment Yield, Water Resources Research, Vol 13 № 4, 1977

2) Lindgren, B.W, Statistical Theory, p237 Macmillan Company, 1968

3) Anderson, J.C, et al, Application of Statistical Decision Theory to Water Use Analysis in Sevier County, Utah, Water Resources Research, Vol 7 № 3, 1971

4) 中村英夫 他 気象予測に基づく防災対策の決定モデル 土木学会論文報告集 № 216, 1973

5) 久保木光熙 最近の長期予報の成績 測候時報 Vol 34 № 11, 1968