第23回水理講演会論文集　1979年2月

流量相関を考慮した利水用貯水池の機能評価に関する確率過程論の応用

Stochastic process theory on reservoir function for water-supply with Markov inputs

名古屋工業大学　正会員○長尾正志
同大学院　　　学生員　池田吉隆

1. 本研究の目的と従来の研究動向

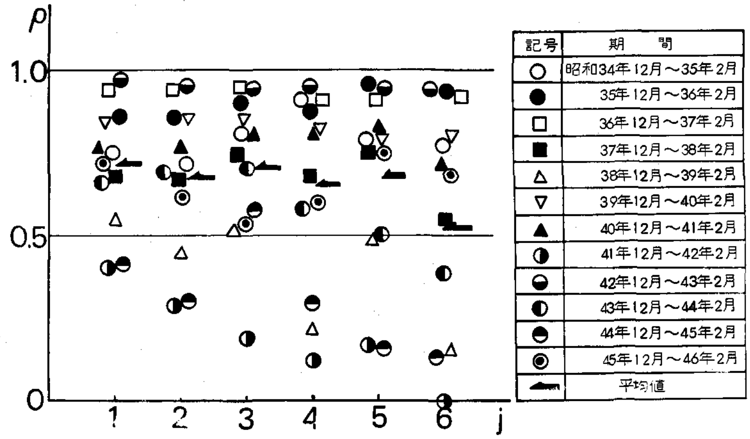
利水用貯水池の機能評価において、年間での流量時系列の把握、とくに渇水時流況の理解が重要な鍵となる。この問題は、その数式的表現に際して、以下の2点に関心が絞られよう。

a. 流量の持続性が強い、すなわち大きな正相関を有すること。

b. 流量の確率分布形において、量の少ない方が出現しやすい、すなわち正の歪を有すること。

さらに、計算の実用化を考えれば、時間ならびに量を離散化して処理することになるが、aは流量時系列をマルコフ連鎖、それもまずは単純マルコフ連鎖、として構成する際の自己相関の導入、またbは、非対称離散分布による定式化の問題といえる。

たとえば、aに関する例を図－1に示す。図は、天竜川美和ダム（集水域311km^2）の昭34～45年の各冬期（12～2月）の重複しないで採った期間総流量の自己相関係数とその平均値である。このうち、相関の最大の42年12月～の冬は、かなりの渇水年でダム地点総降水量は98mmに過ぎない。相関最小の41年12月～では、総降水量145mmと量・変動ともに多い。



図－1　美和ダム冬期のj日間総流量のコレログラム

こうした降水特性が流量コレログラムに反映されている。

もちろん、流量相関の大小は、流域や年によって相違するが、冬期で、継続期間があまり長くなければ上図のように無視できないことになる。この意味から、最近貯水池系の統計理論において、流量相関の導入に精力が注がれているわけである。

1.1 貯水池系の統計理論の研究動向

貯水池系の統計理論には種々あろうが、ここでは、有限容量をもつ貯水池での離散的取り扱いを主体とした研究に限定して記述する。

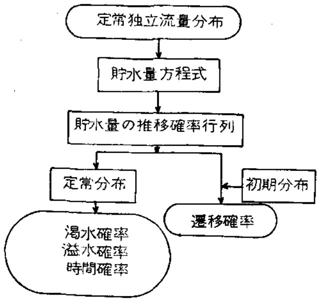
a. 独立流量系列による取り扱い

貯水池の統計理論は、P. A. P. Moran（1954）が創始者とみなされている。彼の業績は、定常な離散的独立流量の前提に始まり、Gani, Prabhu などにより体系化されてきた。詳細は文献[1)]に譲るが、この前提の有用な点は、貯水量方程式を介して、貯水量に関する推移確率行列が、流入量分布のみで定常的に表記できることである。

推移確率行列が判れば、ついで、初期状態に対する時間的遷移が簡単な行列演算で求められる。また長期間平均に相当した貯水量の定常分布も、多元連立1次方程式の解として導出され、これより貯水量が空や満水になる確率およびそれに至る時間確率などが計算できる。　この手順を図－2に流れ図で示す。

b．従属流量系列による取り扱い

前述のように、上記の独立仮定は、計算上の便宜はあっても現実味の乏しいものである。そこで、Moran 流の手法の適用にはかなりの工夫が要求されるので、この労を省き、現実に接近する意味から、最近、従属系列の取り扱いが種々試みられている。



図－2　独立系列の場合の理論展開

ⅰ）推移確率行列の修正・拡張

上記Moran の手法への相関性の導入という形で展開された研究で、Gani[2], Lloyd[3], Odoom[4], Khan[5]などがあるが、その代表はLloyd[6]であろう。これは、独立の場合に、貯水量の推移確率行列が流量分布のみで表わされたのに対して、この際には、さらに初期流量状態にも関係する。すなわち、推移確率行列が、貯水量と流量の対として表現され、このような次元の拡張によって、形式的な統一化を試みた。これによって、従属系列の場合にも独立の場合と同様な手法が流用できることは示唆されるが、実用的な計算は、次元の増加によって不可能ではないにしても極めて煩雑になると考えられる。

こうした難点を近似的にでも克服しようという努力が次のランダム・ウォーク理論の応用である。

ⅱ）ランダム・ウォーク理論

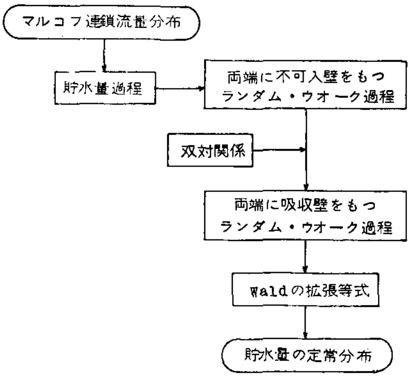
これは、逐次統計解析におけるWald の等式[7]を利用したPhatarfod[8], Mardia[9]らによる研究である。この理論では、貯水池貯水量の変化過程を1次元のランダム・ウォーク粒子の運動に模して数式化し、前述の貯水量の定常確率の計算を容易にしたものである。その際、以下のような手順に沿って解析を進める。

まず、有限容量の貯水池では、貯水量過程は、両端に不可入壁をもつランダム過程とみなせるが、この統計特性は双対関係によって吸収壁の問題に単純化される。さらに、これより、Wald の等式を通じて、貯水量の定常分布が求められる。この等式は、貯水量増分が独立系列の場合にも使用できるが、この場合には、マルコフ連鎖系列に拡張した等式（以下拡張等式という）が用いられる。貯水量の定常分布が導出された後は a と同様に利用される。その手順を図－3に示す。

とくに最近、Phatarfod は、マルコフ連鎖をなす離散分布についての貯水量の定常分布の導出を示したが、現実に厳密解が求められたのは、二項分布に従う流量系列で、流量の存在範囲が（0，1，2）の3状態、および単位目標放流量という簡単な場合に過ぎない。

1.2　本研究の概要

ここでは、前述のPhatarfod の手法を発展させて、二項分布で離散型分布を代表させながら、流量の存在範囲、目標放流量、および貯水池容量を任意に選んだ場合の貯水量分布が計算できることを示す。さらに、その結果として、具体的に、貯水量の定常確率（とくに目標放流量への供給不能となる渇水確率を主体として）への各種パラメータの理論的・実証的検討を行なう。なお、ここで関連するパラメータとは流量時系列に関するもの（自己相関係数、分布形状、流量上限）と貯水池に附随するもの（貯水容量、目標放流量）である。



図－3　従属系列の場合のランダム・ウォーク理論

もちろん、二項分布は、簡単な変換によって、負の二項分布、幾何分布、ポアソン分布と互換性がある[9]から、この結果はかなり一般性をもつものといえよう。

2. 相関を考慮した貯水量分布の導出への基礎理論

以下、1.1 b ⅱ）で記述したランダム・ウォーク理論を用いるので、その簡単な解説をしておく。ただし、その際、なるべく平易な記述を心掛けたために、厳密な証明などは省略されていることを御諒解願いたい。

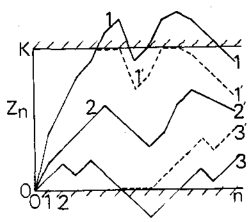
2.1 貯水量過程とランダム・ウォーク

貯水池の貯水量を適当な期間ごとの時点で考え、これを Z_n,（$n=0, 1, 2, \cdots$）と記す。つぎに、期間内の流入総量、目標放流量および貯水池容量をそれぞれ X_n, M および K とする。通常の利水目的では、放流は以下の操作規則に従うものと考えてよい。すなわち、$Y_n = X_n - M$（需要に対する流量の余裕分）とおいて、

$$Z_n = K \ (Z_{n-1}+Y_n \geqq K);\quad Z_{n-1}+Y_n \ (0<Z_{n-1}+Y_n<K);\quad 0 \ (Z_{n-1}+Y_n \leqq 0) \qquad (2.1-1)$$

で表現される。Y_n は貯水量の純増分（正・負の符号を含む）と解釈され、もし貯水池が満水ならば、その時点以後の $\{Y_n\}$ が初めて負号になるまで満水を続ける。他方、貯水池が空水なら、以後の $\{Y_n\}$ が正号になるまで空水を続ける。流量過程 $\{X_n\}$ がある確率過程に従うから、純増分過程 $\{Y_n\}$ もある種の確率過程としての特性をもつ。

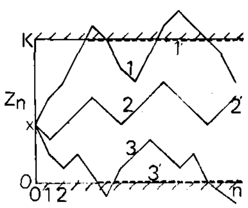
この貯水量過程 Z_n のような過程は、数学的には、0 と K に不可入壁（impenetrable barriers）をもち飛躍（jump）Y_n のランダム・ウォークと呼ばれる。この内容を、たとえば、図－4のように、$Z_n=0$ より出発したランダム・ウォーク粒子の軌跡で示す。0, K に不可入壁をもつ場合には、軌跡 1、3 は 1′、3′のように変るが、両壁に達しない 2 では変化はない。



図－4 不可入壁 0, K をもつランダム・ウォーク粒子の軌跡

2.2 双対関係

さて、われわれが知りたいのは、既知の確率過程 $\{Y_n\}$ の下での貯水量過程 $\{Z_n\}$ の統計特性であるが、これを不可入壁をもつランダム・ウォーク問題で数式化すると一般に複雑になる。そこで、これを吸収壁問題に置き直すと、かなり単純化される。吸収壁（absorbing barriers）とはそこに到達した粒子は以後もその位置に止っているもので、図－5のように示される。



図－5 吸収壁 0, K をもつランダム・ウォーク粒子の軌跡

ところで、この2種のランダム・ウォークの間には、以下の双対関係による関連づけが可能である。まず、$Z=0^-$, K^+（x^+, x^- は右方、左方からの極限）で不可入壁を仮定した場合、上壁（$Z=K$）から出発した粒子の位置の累積分布を、$F_n(x) = \Pr[Z_n \leqq x \mid Z_0 = K]$ と定義する。同様に、$Z=0$、K で吸収壁を仮定した場合、初期位置 $Z_0 = x$ から出発した粒子が、n 時点以前に下壁（$Z=0$）に吸収される確率を、$Q_n(x)$ と記すと、$Q_n(x)$ と $F_n(x)$ の関係が以下の双対関係（dual relation）である。

$$Q_n(x) = F_n(K-x), \quad (0<x<K) \qquad (2.2-1)$$

こうして、不可入壁をもつランダム・ウォークで数式化された貯水量過程において、定常的な貯水量確率が、吸収壁に対するものから求められる。たとえば、需要への対応が不能となる渇水確率（これは近似的に貯水量が零となる空水確率に等しい）が、双対関係より、吸収壁をもつランダム・ウォークでの空水確率（しかも始めて空になる確率）として得られることになる。

なお、双対関係の証明は、流量系列 X_n が独立の場合は、たとえば Cox & Miller の書[10]に、また、従属の場合のかなり一般的な状態として、Phatarfod ら[11]が、（$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$）の結合分布と（$X_n$,

X_{n-1}，…，X_1）のそれとが同じという条件（これには{Xn}が可逆マルコフ連鎖を構成するという重要な場合が含まれる）について示している。

2.3 Waldの拡張等式

利水用貯水池では、ある初期貯水量から出発して、貯水量が零になる確率が利水機能の判定に本質的な役割を果すが、それは吸収壁をもつランダム・ウォークに対するWaldの基本等式（Wald's fundamental identity）から導出される。ところで、Waldの等式は、独立な流量系列{Xn}に対するものであるが、これがマルコフ連鎖系列をなす場合にも拡張できる。ここでは、後者をとくに拡張等式と呼んで区別している。

この厳密な誘導は、文献[12]をみられたいが、以後の記述と関連した要点は次のようである。

まず、{Xi}，（i＝0，1，2，…）を離散的な状態空間におけるマルコフ連鎖、また$Y_i=h(X_i)$を{Xi}で定義される実関数とする。いまの場合　$Y_i=X_i-M$　である。さらに、nを開区間（b，c）（$b<0<c$）の内部に　和　$S_n=\sum_{i=1}^{n} Y_i$　がない最小の正整数とする。

ここで、Snの積率母関数　$M_n(t)\equiv \underset{S_n}{E}[\exp(tS_n)]$ が、大きなNに対して以下のように書けたとする。

$$M_n(t)\sim D(t)\cdot\{\lambda(t)\}^n \quad (\sim：漸近的近似) \qquad (2.3-1)$$

ただし、$\lambda(t)$は{Xi}の確率推移行列の最大固有値である。そのとき、次式が成り立つ。

$$E[\exp(tS_n)\cdot\{\lambda(t)\}^{-n}\cdot d(t|X_n)]=D(t) \qquad (2.3-2)$$

上式がマルコフ連鎖に対するWaldの拡張等式である。

ただし、$d(t|X_n)$，$D(t)$は以下の関係

$$E[\exp(tS_n|X_0)]\sim d(t|X_0)\cdot\{\lambda(t)\}^n,\quad D(t)=E[d(t|X_0)] \qquad (2.3-3)$$

を満すものである。ただし、$\lambda(t)$については、$\lambda(t)=1$を満す唯一で実の非零解 $t=t_0$が存在するという条件が要るが、後述の場合にこの条件は満足される。

3. 二項分布流量に対する理論

3.1 流量モデル

まず、理論の基礎を、以下の流量分布族におく。その際、流量系列は単純マルコフ連鎖を構成し、かつ定常分布に従うとする。その継続した流量X_t，X_{t+1} の確率母関数（p.g.f.）は次の形式を仮定する。

$$G_{X_t\,X_{t+1}}(z_1,z_2)=[A+B(z_1+z_2)+Cz_1z_2]^r \qquad (3.1-1)$$

ただし、A、B、Cとrは定数で、A＋2B＋C＝1である。

上式は、Edwards & Gurland[13]が提案した式で、定数A、B、C、rにある種の値を代入すれば、Xtの定常分布は、標準離散分布の1つである二項分布、負の二項分布、幾何分布、ポアソン分布の各形式となる。彼らはこのうち、ポアソン分布で、またPhatarfod ら[9]は主として負の二項分布で特性を例示したが、以下では、二項分布を代表として使用する。

式（3.1－1）から、二項分布に対して、結合分布　$p_{ij}=Pr[X_{t+1}=j|X_t=i]$，および定常分布$P(i)=Pr[X=i]$は次式で求められる。（i，j＝0，1，2，……，r）

$$\left.\begin{aligned} P_{ij}&=\sum_{s=0}^{\min(i,j)}\binom{i}{s}\binom{-i+r}{j-s}\{a(1-\rho)+\rho\}^s\{1-a(1-\rho)\}^{s+r-i-j}\quad a^{j-s}(1-a)^{i-s}(1-\rho)^{i+j-2s}\\ P(i)&=\binom{r}{i}(1-a)^{r-i}\,a^i\end{aligned}\right\}\qquad(3.1-2)$$

また、平均、分散、相関係数、歪係数は

$$E(X)=ra,\quad V(X)=ra(1-a),\quad Corr(X_t,X_{t+1})=\rho,\quad C_s=(1-2a)/\sqrt{ra(1-a)} \qquad (3.1-3)$$

である。

3.2 Waldの拡張等式

Waldの拡張等式の基礎になる諸式を記述する。まず、式(2.3－2)中の最大固有値 $\lambda(t)$ は、二項分布の場合、次式となる。

$$\lambda(t)=\{\mu_1(t)\}^r\cdot e^{-Mt} \qquad (3.2-1)$$

ただし、Mは2.1の目標放流量を単位操作期間の末に設定したもので、このとき、N期間の総貯水量増分

$$S_N=\sum_{i=1}^{N}Yi=\sum_{i=1}^{N}Xi-NM\equiv T_N-NM$$

のm.g.f.が漸近的に $C(t)\{\mu_1(t)\}^{Nr}\exp(-MNt)$ になることが知られている。[9] 具体的な $\mu_1(t)$ は、T_N のm.g.f.から導かれる斉次線形2次差分方程式の大きい方の解で、これをもう一つの解 $\mu_2(t)$ と併記する。

$$\mu_1(t),\mu_2(t)=\frac{1}{2}\left[1-a(1-\rho)+\{a(1-\rho)+\rho\}e^t\pm\sqrt{\left[1-a(1-\rho)+\{a(1-\rho)+\rho\}e^t\right]^2-4\rho e^t}\right] \qquad (3.2-2)$$

また、$d(t|Xn)$，$D(t)$ は次式で与えられる。

$$d(t|Xn)=\left\{\frac{\mu_1(1-\mu_2)}{\mu_1-\mu_2}\right\}^r\left\{\frac{\mu_1+a(1-\rho)-1}{a(1-\rho)e^t}\right\}^{Xn},\quad D(t)=\left\{\frac{\mu_1(1-\mu_2)(e^t-\mu_2)}{(1-\rho)(\mu_1-\mu_2)e^t}\right\}^r \qquad (3.2-3)$$

3.3 貯水量の定常確率、渇水確率

いま、$u=Zo$ $(0<u<K)$ を初期貯水量とする。uから出発して溢水せずに空になる確率 Pu をえるには、3.2のように目標放流量Mを期末に設定すると、$Z=0$ と $K-M+1$ に吸収壁をもつランダム・ウォークの問題として貯水量過程を考えることになる。

Waldの拡張等式(2.3－2)で、$t=to$ とおくと、

$$Pu\cdot E_1\left[xo^{Sn}\cdot\{\lambda(to)\}^{-n}\cdot d(to|Xn)\right]+(1-Pu)\cdot E_2\left[xo^{Sn}\cdot\{\lambda(to)\}^{-n}\cdot d(to|Xn)\right]=D(to)$$

したがって、$\lambda(to)=1$ より、

$$Pu=\frac{E_2\left[d(to|Xn)\cdot xo^{Sn}\right]-D(to)}{E_2\left[d(to|Xn)\cdot xo^{Sn}\right]-E_1\left[d(to|Xn)\cdot xo^{Sn}\right]} \qquad (3.3-1)$$

ただし、$xo\equiv e^{to}$，また $E_{1,2}$ はそれぞれ $Zn=0$，$K-M+1$ でのランダム・ウォーク過程の吸収壁に関する条件付期待値を示す。

さて、Phatarfodらは上式より $r=2$，$M=1$ のみの解析的表現をえたが、ここでは任意のr，Mについての表現を試みる。説明を E_1，E_2 および to の算出という順に分けて行なう。

a. E_1 の算定

E_1 は、$Sn\leqq -u$（貯水量が空）になるという条件の下での期待値である。この演算を、流量分布 $P(i)=Pr[Xn=i]$ が既知として表わしてみる。理解しやすくするために、まず $r=2$，$M=1$，2，……の手順で解説し、最後に任意数rとMとして記述する。

i) $r=2$，$M=1$ の場合　　初期貯水量をuとしたから、E_1 に関するSnの条件は $Sn\leqq -u$ ($Zn\leqq 0$) である。よって、下壁 $b=-u$，上壁 $c=K-u$，また $M=1$ より下壁以下に到達するのは $Z_{n-1}=1$ および $Xn=0$ の1ケースのみである。そこで次式が成り立つ。

$$E_1\left[d(to|Xn)xo^{Sn}\right]=P(0)\cdot d(to|0)\cdot xo^{-u}/P(0)=d(to|0)\cdot xo^{-u}$$

ii) $r=2$，$M=2$ の場合　　下壁以下に到達するのは次の3ケースであるから、次式となる。

$$Sn=-u\ (Zn=0)\quad \begin{cases} Z_{n-1}=2\ \&\ Xn=0\\ Z_{n-1}=1\ \&\ Xn=1\end{cases}$$

$$Sn=-u-1\ (Zn=-1)\quad Z_{n-1}=1\ \&\ Xn=0$$

$$E_1〔d(t_o|X_n)\,x_o^{S_n}〕=\{P(0)\cdot d(t_o|o)\cdot x_o^{-u}+P(1)\cdot d(t_o|1)\cdot x_o^{-u}+P(0)\cdot d(t_o|0)\cdot x_o^{-u-1}\}/\{P(0)+P(1)\}$$

ⅲ）r，Mが任意の場合　　このような手順を重ね、また二項分布では流量の生起上限 r に注意すれば、任意の r，Mについて、E_1 を以下のように表現することができる。

$$E_1〔d(t_o|X_n)\,x_o^{S_n}〕=\left\{\sum_{i=0}^{\min(r,M-1)}P(i)\cdot d(t_o|i)\cdot\sum_{j=0}^{M-i-1}x_0^{-j}\right\}x_o^{-u}\Big/\left\{\sum_{\ell=0}^{\min(r,M-1)}P(\ell)\right\} \qquad (3.3-2)$$

さらに具体的に、$Pr〔X_n〕$，$d(t_o|X_n)$ に（3.1－2），（3.2－3）式を使った表現ができるが、煩雑になるので省略しておく。

b．E_2 の算定

E_2 は $S_n \geqq K-u$（貯水量が満水）という条件付期待値である。一般に、これには上壁にちょうど達する場合と越す場合があるが、水不足が憂慮されるような際には、後者の確率は無視できると考えてよいだろう。すなわち、ここでは、次式で E_2 を近似しておく。

$$E_2〔d(t_o|X_n)\cdot x_o^{S_n}〕\fallingdotseq E_2〔d(t_o|X_n)〕x_o^{k-u}$$

この近似の精度はMが大きくなるほど良くなるはずである。

さて、前出の式（3.3－2）の導出でみられたように、貯水量の増減に関して r，Mの相対比較が1つの判別材料であった。ここでも同様な観点での分類を考える。

ⅰ）$r \geqq M+1$ の場合　　このとき、流量 X_n が目標放流量Mより大きくなることがある。すなわち、貯水量が以後増加する可能性がある。そこで E_2 は次式のように書ける。

$$E_2〔d(t_o|X_n)〕=\left\{\sum_{i=M+1}^{r}P(i)\cdot d(t_o|i)\right\}\Big/\sum_{\ell=M+1}^{r}P(\ell) \qquad (3.3-3)$$

ⅱ）$r < M+1$ の場合　　このとき、流量が目標放流量より大きくなることはなく、貯水量は現状維持あるいは減少であるから、次式が成り立つ。

$$E_2〔d(t_o|X_n)〕=0 \qquad (3.3-4)$$

c．t_o あるいは x_o の算定

原理的には、式（3.2－1）で $\lambda(t_o)=1$ を満す t_o を求めればよいが、もう少し整理して示そう。なお、$M=r$ では、$x_o=e^{t_o}$ が常に1になるから、普通の状態として、$r \geqq M+1$ を想定した結果を記す。

式（3.2－1），（3.2－2）より、若干の演算を経て次式がえられる。

$$\rho x_o - x_o^{M/r}〔1-a(1-\rho)+\{a(1-\rho)+\rho\}x_o〕+x_o^{2M/r}=0$$

ここで、$x_o^{1/r}=R$ とおき、$x_o \fallingdotseq 1$ より（R－1）で割って整理すると次式となる。

$$a(1-\rho)(R^{r-1}+R^{r-2}+\cdots\cdots+R+1)+(\rho R^{r-M}-1)(R^{M-1}+R^{M-2}+\cdots\cdots+R+1)=0 \qquad (3.3-5)$$

結局、二項分布では、上式より求めたRから、$x_o=R^r$，$t_o=\log x_o$ で x_o，t_o が求められる。なお、この解が唯一つしかないことも証明できる。

d．貯水量の定常確率と渇水確率

以上によって、初期貯水量 u から出発して空水に至る確率 P_u が求められたとして、つぎに貯水量の定常確率や渇水確率を求めよう。

まず、貯水量の定常分布 $V_i=Pr〔Z=i〕$ は、双対関係から、次式で求められる。

$$V_o=P_{K-M}\quad V_i=P_{K-M-i}\quad P_{K-M-i+1}\quad,(i=1,2,\cdots,K-M-1),\ V_{K-M}=1-P_1 \qquad (3.3-6)$$

このうち、渇水問題で最も重要なのは V_o で、これは放流量が当初の目標値に対応できなくなる確率にほぼ相当し、従前より渇水確率と呼んでいるものである。

さらに、注意すべき点は、$M=ra=E(X)$，すなわち目標放流量と流量平均が等しい場合には、（3.3－1）式の右辺の分母，分子が0になって P_u が求められないことである。しかし、その場合でも、L' Hospitalの定理により、

$$Pu = \lim_{a \to M/r} \frac{\text{分子の a による微分}}{\text{分母の a による微分}} \qquad (3.3-7)$$

で、解をえることができる。この意味から条件　M＝E〔X〕は、利水用貯水池の機能評価上の重要な分岐点を与えることが理解される。

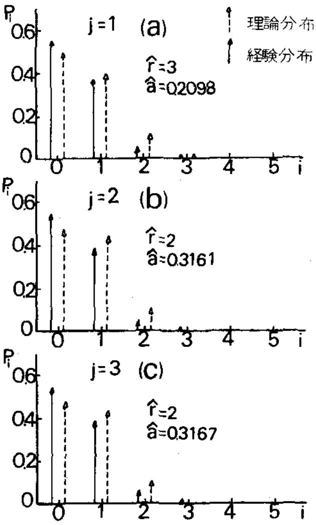
3.4　適用計算例

以下、上述の理論を実例へ適用した計算を示そう。対象を既出の美和ダム流域に採っている。

a．流量分布モデルの検討

すでに流量系列のパラメータのうちの自己相関係数については先述したので、ここでは二項分布としての離散分布形への適合をみよう。その際、冬期でも常時維持される分は除外して議論している。

図－6は、12年間の冬期j日間総流量（j＝1，2，3）への二項分布の適合例である。なお、横軸1単位は4㎥/sで、3㎥/s以下は常時確保としている。また、$\hat{r}$，$\hat{a}$ は、式（3.1－3）の平均、分散より積率解で r'，a' を求め、r'の小数点以下の四捨五入による整数を $\hat{r}$，さらに $\hat{a}=E(X)/\hat{r}$ で計算した。経験分布は理論分布でほぼ適合できそうである。他の流域についても検討したが、一般にいって、正・負いずれかの二項分布を使えば、ほぼ渇水期流量の離散分布表現は可能であるといえよう。



図－6　冬期j日間総流量への二項分布の適合

b．各種パラメータの貯水量確率への影響

パラメータを流量時系列に関するものと貯水池に関するものに分けて議論する。

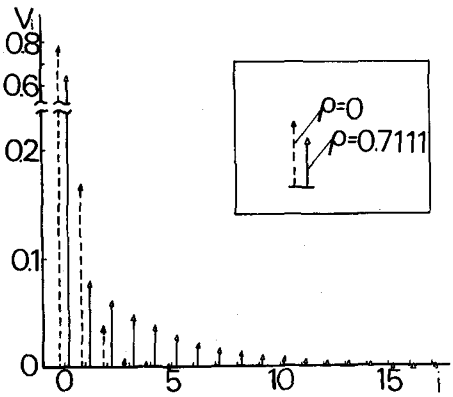
i）流量パラメータの影響

イ．自己相関係数ρ　図－7は自己相関係数を考慮した場合と無視した場合の貯水量の定常分布を示す。このように結果はかなり相違する。図－8はρの影響を試算してみたもので、ρが0より少し増すと一度、小さい貯水量iに対する定常確率V_iは減少し、次第に一様化の傾向を示すが、ρが1に近づくにつれて、両極端の渇水確率V_0、溢水確率V_{K-M}が急激に増加し、中間的な貯水量確率は微小になる。一方、貯水量の期待値はρの増加とともに増すが、ρが1に近い流況は利水上非常に扱い難いものといえる。

ロ．流量上限r　　二項分布の変量上限rの貯水量分布V_iへの影響を、ra，M，ρ，Kをそれぞれ一定として、図－9に示す。rが増せば、流量分布は当然平滑化されるから、貯水量期待値が増し、V_0の減少、V_{K-M}の若干の増加をみるが、極端な渇水は出現し難くなる。

ii）貯水池に関するパラメータ

イ．貯水池容量K　　貯水池容量Kの変化と貯水量分布V_iの対応を図－10に示す。Kが増すと無効放流が減じ、分布は偏平化する。とくに渇水、溢水確率



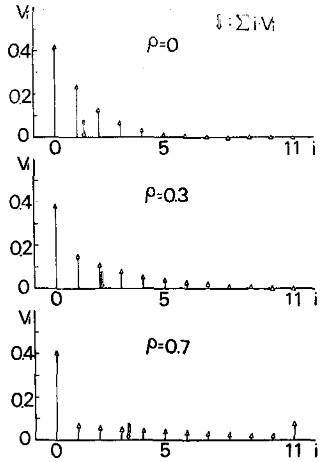
図－7　自己相関係数の考慮の有無と貯水量分布（r＝2，M＝1，a＝0.3167，K＝24）

V_0, V_{K-M} が減少するとともに貯水量期待値が増加する。

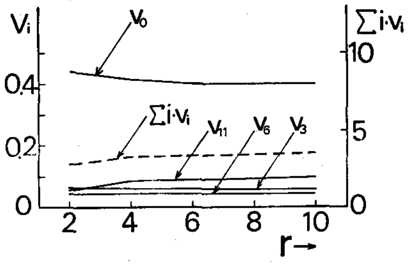
ロ．目標放流量M　　目標放流量Mの影響を渇水確率 V_0 との関係で図－11 に示す。図の横軸は分布パラメータ a で、a が一定の条件では、Mが増すにつれて V_0 が急激に増加することが分る。また、a がある程度減ずれば V_0 が 1 に近く（渇水が頻発する）、逆に a がかなり大きければ V_0 は 0 に近く（渇水はほとんど起らない）なることなどが読みとれる。

さらに、縦の 1 点鎖線の位置は 3.3 の d で説明したように $M=E(X)=ra$，すなわち目標放流量と流量平均が一致し、式（3.3－1）の右辺が 0/0 の特異点となり、式（3.3－7）で求めたものである。この一致点間の比較では、$M=E(X)$ が増すにつれて V_0 は減少してくることが分る。

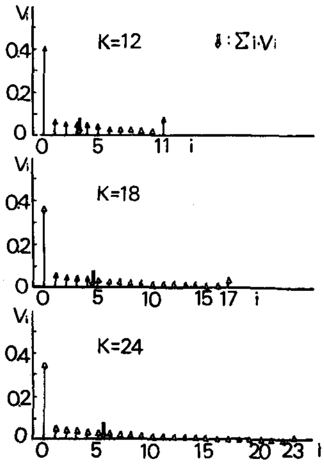
最後に、本研究は昭和53年度文部省科学研究費一般研究（C）の援助を受けたことを記しておく。



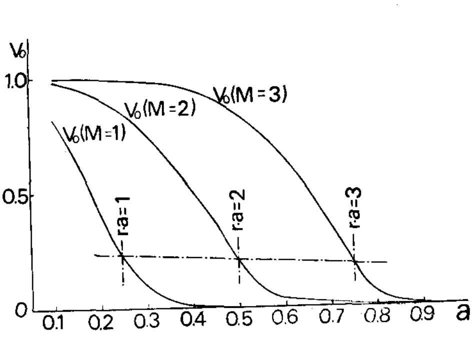
図－8　自己相関係数の変化と貯水量分布（$r=4$，$M=1$，$a=0.2$，$K=12$）



図－9　流量上限 r の変化と貯水量分布（$ra=0.8$，$M=1$，$\rho=0.7$，$K=12$）



図－10　貯水池容量Kの変化と貯水量分布（$r=4$，$a=0.2$，$M=1$，$\rho=0.7$）



図－11 目標放流量Mと渇水確率 V_0 の関係（$r=4$，$\rho=0.7$，$K=12$）

参考文献

1) 長尾正志：利水用貯水池の取水機能の信頼性評価に関するマルコフ連鎖理論の応用、第21回水理講演会論文集、 1977, pp.133 ～ 141.

2) J. Gani : A note on the first emptiness of dams with Markovian inputs, J. Anal. Appl., vol. 26, 1969, pp. 270～274.

3) E. H. Lloyd : Reservoirs with serially correlated inputs, Technometics, vol. 5, 1963, pp. 85～93.

4) E. H. Lloyd & S. Odoom : A note on the solution of dam equations, J. R. Statist. Soc., B26, 1964, pp. 338～344.

5) M. S. Ali Khan : Finite dams with inputs forming a Markov chain, J. Appl. Prob., vol.7, pp.291 ～303.

6) E. H. Lloyd : Reservoirs with serially correlated inputs, Technometrics, vol.5, 1963, pp.85～93.

7) A. Wald : Sequential analysis, Wiley, 1947.

8) R. M. Phatarfod : Application of methods in sequential analysis to dam theory, Ann. Math. Statist., vol. 34, 1963, pp.1588～1592.

9) R. M. Phatarfod & K. V. Mardia : Some results for dams with Markovian inputs, J. Appl. Prob., vol. 10, 1973, pp.166～180.

10) D. R. Cox & H. D. Miller : The theory of Stochastic processes, Chapman & Hall, 1965, pp.65～68,

11) R. M. Phatarfod, T. P. Speed et al. : A note on random walks, J. Appl. Prob., vol. 8, 1971, pp. 198～201.

12) R. M. Phatarfod : Sequential analysis of dependent observation. I, Biometrika, vol. 52, 1965, pp. 157～165.

13) C. B. Edwards & J. Gurland : A class of distributions applicable to accidents, J. Amer. Statist. Ass., vol. 56, 1961, pp. 503～517.

以上