第23回水理講演会論文集　1979年2月

治水計画規模の決定に関するゲーム論的研究

Game Theory on Decision Problem of the Project Scale for Flood Prevention Works.

㈱日本水道コンサルタント　正員○中　川　芳　一
国　土　庁　正員　飯　塚　敏　夫
建　設　省　正員　梅　本　良　平

1. はじめに

本稿では、種々の治水計画の目的達成手段のうち、河道での洪水防御計画を対象として、経済的妥当性という観点からの規模決定法について考察する。

洪水防御計画規模の決定は、基本的には計画主体の意志決定問題として把握される。このとき、洪水の外力としての水文現象の生起およびそれと災害との関連を明確にし、いかなる評価基準のもとで計画規模を決定するかが重要な問題となる。ところで、この水文現象すなわち降雨現象あるいは流出現象などは不確定な性状が強く、これらの現象の生起に係わる不確定性の取り扱いに関しては、確率統計的方法が有力である。しかし、洪水防御計画において問題となるのは生起頻度がきわめて小さな極大値近傍の領域の水文事象であり、洪水ピーク時の観測の困難さや統計データの集積の不十分なことなどにより、水文量の生起確率の推定結果の適用に当っては、その信頼度について十分な検討が必要とされよう。

このため、本稿では、このような確率の信頼度を考慮した洪水防御計画の規模決定モデルを、ゲーム論的概念を応用して定式化するとともに、そのモデルを実際河川へ適用した結果を述べる。

まず、2.では、計画規模決定問題を、不完全情報下における意志決定問題として取り扱い、ゲーム論的アプローチにより、経済評価による計画規模決定モデルを定式化する。ついで、3.では、2.で定式化した計画規模決定モデルをY川流域に適用し、基準地点における最適高水流量として計画規模の算定を種々の条件のもとで行ない、その結果を比較・検討する。

2. 計画規模決定モデル

2－1. 概　説

治水計画規模の評価基準としては、河川の重要度、既往洪水規模、経済効果など多くの基準が考えられる。ここでは、人命の保護と施設・物件の防護とは分離して取り扱い、施設・物件に対しては、治水事業を経済活動の一要素としてとらえ、経済的妥当規模を治水計画の目標とする立場にたつ。こうして決定された計画規模を越える洪水が発生した場合には、水防、避難などの間接防御方式により、人命に対する完全防御、無被害を目指すとした立場を根底としている。

また、計画の基本量としては、ここでの対象が河道での洪水防御計画であるから、洪水のピーク流量を採用することとする。このとき、1.で述べた理由で、ピーク流量の生起確率密度関数にひとつの理論分布をあてはめることが困難な場合も生じ、水文資料の信頼度を計画規模の決定においてどのように考慮するかは重大な問題となる。このため、ここでは、計画規模決定問題を、洪水のピーク流量の確率密度関数に関する情報が十分でないとした場合、すなわち不完全情報下における意志決定問題として取り扱うこととする。具体的には、ゲーム論的アプローチ[1)]により計画規模決定モデルを定式化する。

なお、ここでいう不完全情報とは、基準地点のピーク流量の期待値および偏差は既知であるが、分布形そのものは未知であるというように、ある確率変数の分布形（確率密度関数）を決定するための情報が十分でない場合を意味している。

2－2. モデルの定式化とアルゴリズム

いま、洪水による被害額が、洪水のピーク流量のみの関数として一義的に定まるとすれば、計画高水流量qを越える洪水による年平均被害額の期待値は、次式で表わされる。

$$E\{D(q)\}=r\cdot\int_q^\infty D(y)\cdot f(y)dy \tag{1}$$

ここに、E｛D(q)｝；高水流量が計画流量規模 q を越える場合の年平均被害額期待値、D(y)；高水流量が y の場合の想定被害額（以下、D－Q 曲線と呼ぶ）、f(y)；高水流量 y の生起確率密度関数、r；年平均洪水生起回数、である。

この被害額の期待値は、この計画の達成結果に対して国民がやむを得ず支払わねばならない費用（対価）とみなすことができる。一方、この計画を達成するための事業費が q の関数で表わされれば、これら両者の和が、この流量規模 q の計画の結果国民の支払う総費用期待値ということができる。すなわち、

$$E\{C(q)\}=G(q)+K\cdot E\{D(q)\}=G(q)+K\cdot r\cdot\int_q^\infty D(y)\cdot f(y)dy \tag{2}$$

ここに、E｛C(q)｝；流量規模 q の計画の年平均総費用期待値、G(q)；流量規模 q の計画の年平均事業費（以下、G－Q 曲線と呼ぶ）、K；換算係数、である。(1)式で表わされる E｛D(q)｝は、直接被害 D(q)のみを対象とし、間接被害は含まれていない。そこで、この間接被害を総費用期待値の算定において勘案するために導入したのが換算係数 K であり、この K は間接被害をも含めた総被害額が直接被害額の何倍であるかを示す数値である。

ここで、上述のようにピーク流量 q の想定被害額 D(q)は q の関数として定まるので、洪水 j のピーク流量代表値 q_j（この q_j は、3.で述べるように、ピーク流量の実測値、または洪水調節後のピーク流量計算値を用いる）に対応して、洪水 j による想定被害額 D_j が一義的に定まる。この被害額の分布形および期待値、偏差を、それぞれ h(D)および m_D 、σ_D と記す。

一般にピーク流量の分布形 f(q)としては、グンベル分布、対数正規分布などが適合するといわれるが、2－1.で述べたように、ひとつの理論分布形を画一的にあてはめることが難しいことも多い。したがって、f(q)および D(q)より定まる被害額の分布形 h(D)に単一の理論分布形を想定することもまた無理が多い。そこで、2－1.で述べた不完全情報の場合、すなわち被害額の期待値 m_D と偏差 σ_D は既知であるが、その分布形 h(D)は未知であると考え、ゲーム論的アプローチにより最適な高水流量許模 q を決めることとする。この手順は、以下のようである。

i）上述の被害額の期待値 m_D 、偏差 σ_D を与える被害額の分布形は無数にあるが、それらの分布形のうち(2)式で与えられる総費用期待値 E｛C(q)｝を最大とする、換言すれば計画主体にとって最も不都合な分布形を考える。すなわち、

$$\max_h E\{C(q)\} \tag{3}$$

を与える分布形 h(D)を考えることになる。

ii）i)のように計画主体にとって最も不都合な分布形が出現したという状況下で、総費用期待値 E｛C(q)｝を最小とする高水流量 q の値を求める。すなわち、

$$\min_q \max_h E\{C(q)\} \tag{4}$$

を与える q を求め、この q を最適高水流量とよぶ。

こうして、総費用期待値最小という意味での最適高水流量を決定するモデルは、(4)式を満足する高水流量 q を決定する問題として定式化できた。なお、(4)式は、自然と計画主体の 2 人ゲームを構成する式ともいえる。以下では、この式の解法を明らかにする。

まず、想定被害額の期待値 m_D および σ_D は既知であるから、期待値 m_D より大きい被害額 D は、

$$D=m_D+k\cdot\sigma_D,\quad k>0 \tag{5}$$

と表わせる。この被害額 D を発生させる高水のピーク流量 q は、D－Q 曲線より求まり、これを、

$$q=Q(m_D+k\cdot\sigma_D) \tag{6}$$

のように表わす。(6)式は、q が k の関数として表わされることを示しており、この式を用いて(2)式を書き直すと、

$$E\{C(q)\}=G(Q(m_D+k\cdot\sigma_D))+K\cdot r\cdot\int_{Q(m_D+k\cdot\sigma_D)}^\infty D(y)\cdot f(y)dy \tag{7}$$

となる。ここで、D－Q曲線よりq＝Q(D)と、qはDの関数ともみなせるから、(7)式の右辺の積分は、

$$I=\int_{Q(m_D+k\cdot\sigma_D)}^{\infty} D(y)\cdot f(y)dy=\int_{m_D+k\cdot\sigma_D}^{\infty} D\cdot h(D)dD \tag{8}$$

と、被害額Dに関する積分となり、この積分は、さらに

$$\begin{aligned} I&=\sum_{i=0}^{\infty}\left\{\int_{m_D+(k+i)\sigma_D}^{m_D+(k+i+1)\cdot\sigma_D} D\cdot h(D)dD\right\}\leqq\sum_{i=0}^{\infty}(m_D+(k+i+1)\sigma_D)\cdot\int_{m_D+(k+i)\cdot\sigma_D}^{m_D+(k+i+1)\cdot\sigma_D} h(D)dD \\ &=(m_D+k\cdot\sigma_D)\int_{m_D+k\cdot\sigma_D}^{\infty} h(D)dD+\sigma_D\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\left\{\int_{m_D+(k+i)\cdot\sigma_D}^{\infty} h(D)dD\right\} \end{aligned} \tag{9}$$

と変形される。

ところで、 $$\int_{m_D+(k+i)\cdot\sigma_D}^{\infty} h(D)dD=P\{D\geqq m_D+(k+i)\cdot\sigma_D\} \tag{10}$$

であり、上式の右辺の確率にチェビシェフの不等式を適用すると、

$$\int_{m_D+(k+i)\cdot\sigma_D}^{\infty} h(D)dD\leqq 1/(k+i)^2 \tag{11}$$

が得られ、(9)式に代入すれば、

$$I\leqq(m_D+k\cdot\sigma_D)/k^2+\sigma_D\cdot\sum_{i=0}^{\infty}1/(k+i)^2 \tag{12}$$

となり、結局(7)式の右辺第2項の積分が(12)式で与えられる。したがって、(7)式の総費用期待値については、次式が成り立つ。

$$E\{C(q)\}\leqq G(Q(m_D+k\cdot\sigma_D))+K\cdot r\cdot\left\{(m_D+k\sigma_D)/k^2+\sigma_D\cdot\sum_{i=0}^{\infty}1/(k+i)^2\right\} \tag{13}$$

本モデルでは、h(D)の分布形が未知であると考えた。そこで、

$$\max_h E\{C(q)\}=G(Q(m_D+k\cdot\sigma_D))+K\cdot r\cdot\left\{(m_D+k\cdot\sigma_D)/k^2+\sigma_D\cdot\sum_{i=0}^{\infty}1/(k+i)^2\right\} \tag{14}$$

となり、 $\min_q \max_h E\{C(q)\}$ を与える最適高水流量 q^* は、(14)式がkに関して下に凸となることから、つぎのようにして求められる。すなわち、(14)式をkで微分して0とおき、これをみたすkを k^* とし、$m_D+k^*\cdot\sigma_D$ に対応する高水流量qを(6)式より求めれば良い。

なお、(14)式の右辺の級数をそのまま微分することは不可能であるから、つぎのような近似を行なう。すなわち、オイラー・マクローリン公式を $\sum_{i=0}^{\infty}1/(k+i)^2$ に適用すると、

$$\sum_{i=0}^{\infty}1/(k+i)^2=1/k^2+1/2k^2+1/6k^3+\cdots\cdots \tag{15}$$

となり、(14)式に上式の右辺第3項までの近似を採用すれば、

$$\max_h E\{C(q)\}\fallingdotseq G(Q(m_D+k\cdot\sigma_D))+K\cdot r\cdot\{m_D/k^2+\sigma_D\cdot(2/k+1/2k^2+1/6k^3)\} \tag{16}$$

となるので、具体的な算定が可能となる。

2－3. 複数個の基準地点を対象とした場合へのモデルの拡張

洪水防御計画の策定にあたって、同一水系内に複数個の基準地点のある場合、地点間で計画規模の整合性が計られる必要がある。ところで、2－2.で定式化したモデルは、単一の基準地点を対象としたものであった。そこで、ここでは、2－2.の単一基準地点でのモデルを複数個の基準地点を同時に対象とした場合へ拡張する。

ここでのモデルの基本的な考え方は、2－2.で述べた単一基準地点でのものと同様である。ただし、後述するように基準地点間の整合性の考慮を、各基準地点の高水流量間の制約条件として導入したため、本モデルはいわゆる条件付非線形計画モデルとして表現される。

いま、対象水系の本川にn個の基準地点があるとする。各基準地点での計画流量規模を q^1、q^2、…、q^n とすると、水系全体での年平均総費用期待値 $E\{C(q^1, q^2, \cdots, q^n)\}$ は、(2)式を多変数の場合へ拡張して、

$$E\{C(q^1,q^2,\cdots,q^n)\}=G(q^1,q^2,\cdots,q^n)+K\cdot r\cdot\int_{q^1}^{\infty}\int_{q^2}^{\infty}\cdots\int_{q^n}^{\infty}D(y^1,y^2,\cdots,y^n)\cdot f(y^1,y^2,\cdots,y^n)dy^1dy^2\cdots dy^n \tag{17}$$

となる。

つぎに、基準地点間の計画規模の整合性の問題について考察する。ここでは、この整合性を各基準点間での計画高水流量規模の整合性で代表させ、各基準地点の高水流量間の制約条件として以下のように定式化する。すなわち、各基準地点間の高水流量は独立ではあり得ないから、ある基準地点での高水流量を最近接上流基準地点での高水流量で表わすことを考え、それを用いて各基準地点の高水流量間の制約条件を、アルゴ

リズムの簡略化の便宜も考えて、次式の一次式とした。

$$\alpha_{i-1}^{2}\cdot q^{i-1}+\beta_{i-1}^{2}\leqq q^{i}\leqq \alpha_{i-1}^{1}\cdot q^{i-1}+\beta_{i-1}^{1}\quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{18}$$

ここに、α_{i}^{ℓ}, β_{i}^{ℓ} には河道での洪水の伝播、残流域流入および合流などの諸特性が集約されていると考えられ、これらは洪水追跡計算あるいは実測データの統計処理などにより推算できよう。

ここで、越過洪水による年平均被害額は基準地点ごとに独立に算定される、すなわち基準地点ごとに氾濫域が存在し各域が洪水氾濫現象に関して独立と仮定し、各氾濫域の想定被害額は対応する基準地点の高水流量 q^{i} のみの関数とする。以上の仮定のもとで、(17)式は次式のように書ける。

$$E\{C(q^1,q^2,\cdots,q^n)\}=G(q^1,q^2,\cdots,q^n)+r\cdot\sum_{i=1}^{n}K^i\cdot\int_{q^i}^{\infty}D^i(y)\cdot f^i(y)\,dy \tag{19}$$

ここに、$D^i(y)$；基準地点 i での高水流量が y の場合の想定被害額、$f^i(y)$；基準地点 i での高水流量 y の生起確率密度関数、K^i；換算係数、である。

地点 i での洪水のピーク流量が q の場合の想定被害額 $D^i(q^i)$ は q^i のみの関数としたから、洪水 j の地点 i でのピーク流量 q_j^i に対応して氾濫区域 i における被害額 D_j^i は一義的に定まり、その分布形および期待値、偏差を $h^i(D^i)$、m_D^i、σ_D^i （i＝1, 2,…、n）で表わす。

こうして、(19)式を評価式として、想定被額額の期待値 m_D^i と偏差 σ_D^i は既知であるが、その分布形 $h^i(D^i)$ は未知であるという不完全情報下において、各基準地点間の計画規模の整合性を考慮した最適高水流量の組み合せ（q^{1*}、q^{2*}、…、q^{n*}）を決定するモデルは、2－2.と同様の考えのもとで(18)式をみたす各基準地点の高水流量の変動領域の内で、

$$\min_{\{q^1,q^2,\cdots,q^n\}}\ \max_{\{h^1,h^2,\cdots,h^n\}} E\{C(q^1,q^2,\cdots,q^n)\} \tag{20}$$

を与える高水流量の組み合せ（q^1、q^2、…、q^n）を求める問題として定式化できる。

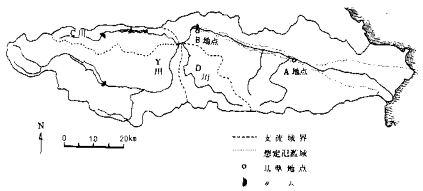
なお、このモデルの解法は、基本的には2－2.で述べたものと同じとなるので省略する。

3. 計画規模決定モデルの適用例

3－1. 演算ケースおよび入力データ

ここでは、2.で定式化した計画規模決定モデルを、Y川流域に適用した結果を述べる。図－1にその流域概要を示す。

図－1 Y川流域の概要



洪水防御計画は、通常河道改修計画と洪水調節計画により構成される。そこで、ここでは、6ケースの洪水調節計画を考え、洪水調節を考えない場合と合わせて、合計7ケースの演算を行なった。

このとき、洪水調節を考えた場合の年事業費 $G(q)$（または、$G(q^1、q^2、\cdots、q^n)$）は、河道改修に要する事業費 $G_1(q)$（または、$G_1(q^1、q^2、\cdots、q^n)$）と洪水調節に要する事業費 G_2 との和としている。なお、G_2 は基準地点の流量規模 q には係わらず定数となるが、洪水調節ケースごとには異なる。

表－1. 演算ケースおよび G_2、$\triangle q$

ケース	洪水調節計画年事業費 G_2（億円/年）	洪水調節効果 q～△q A地点	洪水調節効果 q～△q B地点
1	洪水調節無	——	——
2	9	$\triangle q=\frac{30}{230}q$	$\triangle q=\frac{23}{177}q$
3	22	$\triangle q=\frac{35}{230}q$	$\triangle q=\frac{26}{177}q$
4	37	$\triangle q=\frac{45}{230}q$	$\triangle q=\frac{34}{177}q$
5	44	$\triangle q=\frac{50}{230}q$	$\triangle q=\frac{38}{177}q$
6	59	$\triangle q=\frac{60}{230}q$	$\triangle q=\frac{45}{177}q$
7	76	$\triangle q=\frac{65}{230}q$	$\triangle q=\frac{49}{177}q$

また、洪水調節後のピーク流量 q_j' は、洪水調節効果△q により、洪水調節を考えない場合のピーク流量を q_j として、

$$q'_j=q_j-\Delta q \tag{21}$$

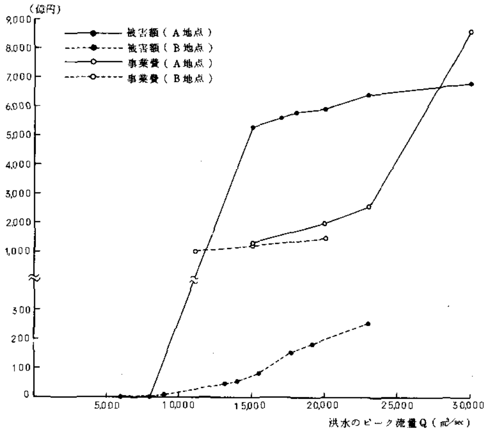
と表わされるものと仮定し、さらに△q は、q_j の線形関数と仮定している。

各演算ケースでの洪水調節計画年事業費 G_2 および洪水調節効果△q を表－1に示す。

Y川流域には、図－1に示したように、基準地点が2ケ所設定されている。そこで、まず、2－2.で定式化した単一基準地点での計画規模決定モデルを適用して、A、B各基準地点での最適高水流量をそれぞれ独立に算定する。ついで、2－3.で定式化した複数個の基準地点を対象とした計画規模決定モデルを適用して、基準地点A、Bの最適高水流量を同時に算定する。なお、これらの最適高水流量の算定は、各々表－1に示した7演算ケースについて行なう。

A、B両地点でのD－Q曲線およびG－Q曲線（河道改修事業費）を図－2に示す。なお、想定被害額の期待値 m_D、偏差 σ_D の算定は、各地点における昭和29～51年の年最大ピーク流量実測値および洪水調節後のピーク流量計算値（23個）を標本として行なった。

図－2　D－Q曲線およびG－Q曲線（河川改修事業費）



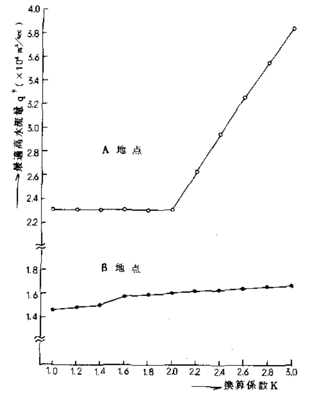
3－2.　演算結果とその考察

1)まず、2－2.で定式化した単一基準地点での計画規模決定モデルにより、A、B各基準地点での最適高水流量をそれぞれ独立に算定した結果について述べる。このとき、換算係数Kは、1.0から3.0まで変動させ、各Kごとに最適高水流量の算定を行なった。

図－3に換算係数Kの各値に対する最適高水流量 q^* をケース1について示す。

A地点の最適高水流量 q^* は23,100～38,500m³/sec と、B地点の14,600～16,800m³/secに比べて大きい。これは、図－2のD－Q曲線、G－Q曲線にみられるように、同一流量に対する事業費Gには大差はないが、A地点の被害額DがB地点のそれに比べてはるかに大きいためである。また、このため超過洪水による被害額期待値E｛D(q)｝は、A地点での値はB地点での値の200倍以上に達し、総費用期待値E{C(q)}も、A地点で1784～4894億円／年と、B地点の72～81億円／年の25～60倍となる。

図－3　K～q^*（単一基準地点、ケース1）



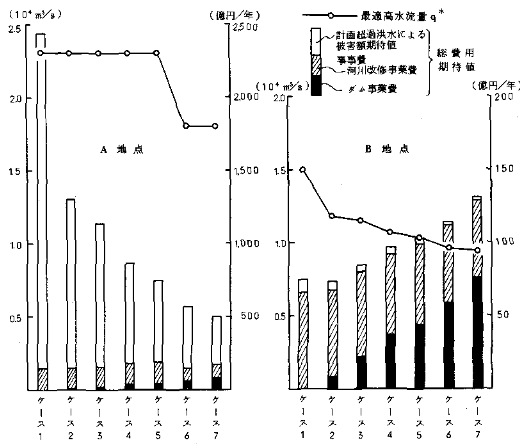
つぎに、Kの変化による q^* の応答について検討する。A地点での q^* は、K＝1.0～2.0で約23,000m³/secと変化がなく、K＝2.0以上ではほぼ線形的な増加傾向を示す。また、B地点においては、Kの増加に伴い q^* も増加するが、K＝1.4～1.6間の増加は、他の区間に比べて大きい。このようなKによる q^* の変化に不連続点が生じる原因は、主として図－2のG－Q曲線の形状（勾配の急変点の存在）にあると考えられる。

このように、A地点においては、Kを2.0まで増大させても、すなわち間接被害を直接被害と同程度まで勘案しても q^* は変化しないが、B地点においては、Kが1.4を越すと、すなわち間接被害を直接被害の4割以上見込むと q^* が急激に増加するという結果となった。

以上の検討結果および（他流域ではあるが）間接被害の推算例を参考にして、以下では、K＝1.4の場合を例示的にとりあげて考察することとする。

表－1の各演算ケースでの最適高水流量算定結果を図－4に示す。

図－4　各ケースの最適高水流量、総費用期待値および事業費（単一基準地点、K＝1.4）



A地点では、総費用期待値はケース1～7の順に小さくなっており、総費用期待値の最小化という基準のもとでは洪水調節を考えた方が良く、その内でも洪水調節効の大きいケース7の総費用期待値はケース1の約¼となっている。また、q^* はケース1～5では約2,300m³/sec、ケース6、7では18,000m³/secとな

る。一方、B地点では、総費用期待値はケース1～7の順に大きくなっており、総費用期待値の最小化という基準のもとでは洪水調節を考えない方が良いといえる。なお、q^*はケース1～7の順に小さくなっている。

このように、A地点においては、洪水調節を考えたケース2～7が、洪水調節を考えないケース1に比べて総費用期待値が小さくなり、B地点においては、逆にケース1がケース2～7より小さくなっている。この理由としては、A地点における$E\{D(q)\}$がケース1で約1,600億円／年とG_2の約10～60億円／年に比べてはるかに大きく、洪水調節によって$E\{D(q)\}$を減少させる方が有利なのに対して、B地点ではケース1の$E\{D(q)\}$が約6億円／年とG_2よりもかなり小さいため、巨費を要する洪水調節を考えない方が有利となることによると考えられる。なお、Kが1.4以外の場合も同様の結果となった。

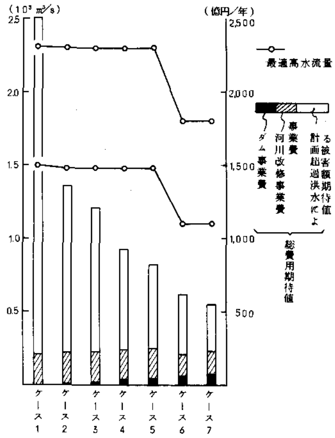
2) つぎに、2－3.で定式化した複数個の基準地点を対象とした計画規模決定モデルにより、A、B両基準地点での最適高水流量を同時に算定した結果について述べる。図－1に示したように、Y川流域では、A、B両基準地点ごとに氾濫域が存在し、この2つの氾濫域は重複しないとみてよいから、2－3.で述べた計画超過洪水による被害額が基準地点ごとに独立に計量できるという仮定は許容される。また、基準地点の流量規模の整合性に関する制約式は、A、B地点間の流量相関より、

$$0.757 \cdot q^1 - 2630.0 \leqq q^2 \leqq 0.757 \cdot q^1 + 2757.0 \qquad (22)$$

とした。ここに、q^1、q^2はそれぞれA、B地点の高水流量規模である。

図－5に、$K^1 = K^2 = 1.4$の場合の各ケースでの最適高水流量算定結果を示す。

図－5　各ケースの最適高水流量、総費用期待値および事業費（水系全体、$K_1 = K_2 = 1.4$）



ケース1のq^*は、A、B両地点とも1)で述べた単一基準地点の場合と全く同一である。これに対し、ケース2～7のq^*は、A地点では単一基準地点の場合と同じであるが、B地点では(22)式の制約により単一基準地点の場合より大きくなっている。

総費用期待値は、ケース1～7の順に小さくなっており、総費用期待値の最小化という基準のもとでは洪水調節を考えた方が良く、その内でもケース7が最良といえる。ケース7では、ケース1に比べ総費用期待値は約80％減、q^*はA地点で約5,000 m³/sec、B地点で約4,000 m³/sec減となっている。

なお、K^1、K^2が1.4以外の場合にも同様の結果となった。

4. おわりに

洪水防御計画において検討の対象となるのは生起確率のきわめて小さな極大値近傍の領域での水文諸量であり、洪水ピーク時の観測が困難なこと、統計データの集積が不十分なことなどにより水文量の生起確率の推定精度に疑問が残る場合も多い。このため、本稿では、ゲーム論的概念を応用して、このような確率の信頼度を考慮した計画規模決定法を提示した。すなわち、不完全情報下におけるゲーム論的アプローチにより、最適高水流量を経済評価により決定する計画規模決定モデルの定式化を行ない、そのアルゴリズムを示した。

ついで、このモデルをY川流域に適用し、基準地点における最適高水流量として計画規模の算定を種々のケースについて行ない、その結果を比較・検討した。

こうして、洪水防御計画の規模決定の過程で洪水規模の確率密度関数に関する情報が不十分な場合にも、ゲーム理論を適用することによって、計画規模決定問題をひとつの意志決定問題として解決しうることを明らかにした。

最後に、本稿の作成にあたり御指導を賜わった京都大学教授岩佐義朗先生、名古屋工業大学教授長尾正志先生に感謝いたします。また、熱心な討議を頂いた㈱日本水道コンサルタントの萩原良巳、辻本善博の両氏に謝意を表します。

〔参考文献〕 1) 松田正一他；ORのための基礎数学5、丸善、1964