

# 流量時系列のみによる降雨時系列、流域の流出特性および流出分離の推定について

A Hydrologic Inverse Problem; Analysis of Rainfall-Runoff characteristics  
and separation of run-off components from the discharge sequences

東京工業大学 正員 ○長谷部正彦

東京工業大学 正員 日野 幹雄

## 要 旨

流量時系列を高周波系列（表面流出成分）と低周波系列（地下水流出成分）とに数値フィルターにより分離する。分離した両時系列を白色雑音性の降雨により駆動される線型系と仮定し、各々の系列に自己回帰モデルを適用し、流域の流出特性を求める。この流出特性をもつ流量に流量時系列を模擬する降雨時系列を逆推定する。この推定降雨時系列と観測された降雨時系列とを比較すれば、降雨の流出分離則を推定できる。なおこの研究は、水文現象を逆問題（Inverse Problem）として扱って解析した。

## 1. 流量時系列の長短期成分への分離

### i) 自己回帰係数による分離

時系列  $Z_t$  で  $t$  を考えている時刻（単位は何でもよい）とする。後に述べる自己回帰モデルから判断されるように自己回帰係数は、時刻  $t$  以前の  $t-1, t-2, t-3, \dots, t-m$ 、すなわち  $m$  日以後の  $t$  日に影響を与える流量の重みと考えられる。ゆえに流量時系列の自己回帰係数により当日流量に影響する  $T_c = m$  が判断される。

### ii) コヒーレンスによる分離

降雨一流出系の資料がととのっている場合には、コヒーレンス (1) 式を用いて降雨一流出系の線型性および分離の周期が検証しうる。

$$C_0 \ h^2(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_{xx}(\omega) \cdot S_{yy}(\omega)} = \frac{K_{xy}^2(\omega) + Q_{xy}^2(\omega)}{S_{xx}(\omega) \cdot S_{yy}(\omega)} \dots\dots\dots (1)$$

$$\theta_{xy}(\omega) = \tan^{-1} (Q_{xy}(\omega) / K_{xy}(\omega))$$

$S_{xx}(\omega), S_{yy}(\omega)$ ; は系列  $x, y$  のスペクトルを表わし、 $K_{xy}(\omega), Q_{xy}(\omega)$ ; はコスペクトル、クオドラチャスペクトルであり、 $\theta_{xy}(\omega)$ ; は位相角である。

### iii) 高周波成分および低周波成分の数値フィルター

i) により  $T_c$  が決定されると high-cut-off-filter を用いて両成分に分解できる。時間間隔  $\Delta t$ 、周波数間隔  $\Delta f$  をナイキスト周波数  $f_N$  の  $1/m$  とし、 $t = r\Delta t, \Delta f = f_N/m, f_h = h/(2m\Delta t)$  とおけば、離散数値フィルター  $W_r$  は、(2) 式で表わされる。

$$W(r\Delta t) \cdot \Delta t = \frac{1}{\pi r} \left( \sin \frac{\pi h r}{m} \right) \dots\dots\dots (2)$$

$r \rightarrow 0$  の極限をとると、 $W(0) \Delta t = h/m$  となる。従って帯域濾波後の出力（低周波成分）は、(3) 式で示される。

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(t-\tau) \cdot y(\tau) d\tau \dots\dots\dots (3)$$

## 2. 自己回帰モデル (Auto-Regressive) による長短期流出特性の推定

### i) Deconvolution

我々の観測しているランダム時系列  $\{y_i\}$  を白色雑音  $\{x_i\}$  により駆動される線型系  $h(t)$  ( $H(\omega)$ ) からの出力とみなす。入出力のフーリエ変換を  $X(\omega)$ ,  $Y(\omega)$  とすれば, (4) 式となる。

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) \dots\dots\dots (4)$$

(4) 式を変形すると

$$X(\omega) = H^{-1}(\omega) \cdot Y(\omega) = G(\omega) \cdot Y(\omega)$$

となり, システム関数  $G(\omega)$  は, ランダム時系列  $\{y_i\}$  を再びもとの白色雑音に戻すシステム関数である。

図-1 に, これらの関係を示す。

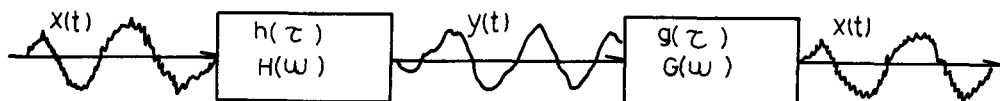


図-1 ノイズによる信号の発生とその deconvolution

### ii) ARモデル

物理系の性質を決定しているパラメーターが時間に対し変化しないならば, 定係数線形微分方程式になり, 不規則変動  $y$  が常微分方程式で表わされる。

$$k_m \frac{d^m y}{dt^m} + k_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots\dots\dots + k_1 \frac{dy}{dt} + k_0 y = x(t)$$

離散表示すれば, (5) 式となり  $m$  次の自己回帰式になる。

$$y_i = a_1 y_{i-1} + a_2 y_{i-2} + a_3 y_{i-3} + \dots\dots\dots + a_m y_{i-m} + x_i \dots\dots\dots (5)$$

ここで  $x_i$  はランダム入力,

係数  $[1, -a_1, -a_2, \dots\dots -a_m]$  が自己回帰係数である。この係数を求めたのは, 本例では MEM スペクトルの予測誤差フィルタ  $r_k$  から ( $r_k = -a_k$ ) である。

この回帰係数が求まると流域の流出特性 (モデル) が決定される。

## 3. 降雨系列の逆推定および流出分離則の推定

(5) 式を変形すると (6) 式

$$\begin{aligned} x_i &= y_i - a_1 y_{i-1} - a_2 y_{i-2} - a_3 y_{i-3} - \dots\dots - a_m y_{i-m} \\ &= y_i (1 - a_1 B - a_2 B^2 - a_3 B^3 - \dots\dots - a_m B^m) \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

となり, 与えられた流量時系列を発生させる降雨系列を逆推定できる。(6) 式により逆推定された降雨系列の結びつきを考えてみる。(6) 式で, 平均流出量  $\bar{y}$ , 平均推算降雨量  $\bar{x}'$  とすると, 次の関係が得られる。

$$\bar{x}' = (1 - a_1 - a_2 - \dots\dots - a_m) \cdot \bar{y}$$

故に

$$\bar{y} = \bar{x}' / (1 - a_1 - a_2 - \dots\dots - a_m)$$

ここで, 降雨が全て流出するものとして  $\bar{y} = A \bar{x}$  を仮定すると実測の降雨系列  $x$  と逆推定した降雨系列  $\bar{x}'$  との関係は (7) 式となる。 $A$  を流域面積,  $\bar{x}$  を降雨量の平均値とする。

$$x = \frac{x'}{A(1-a_1-a_2-\cdots-a_m)} = m_i x' \cdots \cdots (7)$$

ここで,

$$m_i = \frac{1}{A(1-a_1-a_2-\cdots-a_m)}$$

$m_i$ は、逆推定した降雨と実測の降雨との流出係数的な役割を示す。高周波成分、低周波成分について(7)式が適用される。各々の系列に求めると(8)式になる。

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= m_1 \cdot x_1' \\ x_2 &= m_2 \cdot x_2' \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (8)$$

今後、サフィクス1は、高周波成分、サフィクス2は、低周波成分についてである。また前の仮定で観測された雨量は、全て流出するものと考えたので、実測の降雨は、 $x \cdot f$ となる。 $x$ は観測された降水量、 $f$ は実測の流出率である。以上から次の関係が得られる。

$$x \cdot f = m_1 x_1' + m_2 x_2' \cdots \cdots (9)$$

実際に適用するには、 $x, x_1', x_2'$ について累加雨量を考えるので(9)式を変形して(10)式で適用する。

$$f \cdot \sum_{i=1}^k x_i = m_1 \sum_{i=1}^k x_{1,i}' + m_2 \sum_{i=1}^k x_{2,i}' \cdots \cdots (10)$$

ここで、 $k=1, 2, \cdots, N$   $N$ は、資料数である。

以上から、 $x_i \sim x_{1,i}', x_i \sim x_{2,i}'$ の関係を求めて、流出分離則が推定できる。

#### 4. 実データによる適用例

適用河川は、秋田県雄物川水系柳田橋流域( $A=477.3 \text{ km}^2$ )の夏季の3ヶ月間の日流量系列、日降水量系列としては、湯沢、院内、湯の袋、秋の宮の4観測所である。

図-2に適用する河川のハイドログラフを示す。

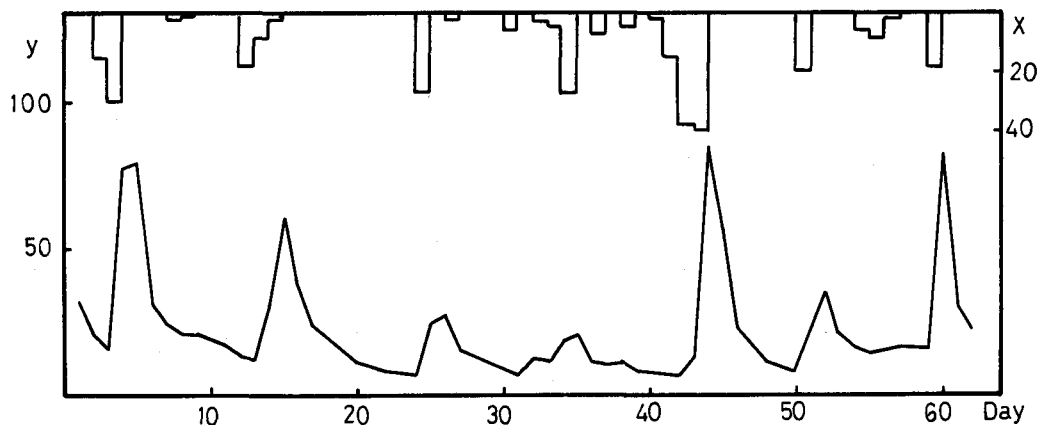


図-2 実測(柳田橋)のハイドログラフ

##### i) 流量時系列の高周波成分と低周波成分との分離

流量時系列を自己回帰モデルに適用して、自己回帰係数表-1から判断すると5~6次の次数で係数が小さくなっているので $T_c=5$ 日と推察できる。

次に参考のために、降雨系列と流量系列とのコヒーレンスを計算し

図-3に示す。図から理解できる様に高周波成分と低周波成分とは、

$T_c=5$ 日で分離できる。

| m | A R    | m | A R    |
|---|--------|---|--------|
| 1 | 0.621  | 4 | -0.062 |
| 2 | -0.254 | 5 | 0.003  |
| 3 | 0.168  | 6 | -0.010 |

表-1 A R 係数

以上、ある周波数により分離されたので、high-cut-off-filterを用いて流量時系列を高周波系列と低周波系列とに分離できる。

ここで、今後は実測の降雨を $x$ 、流域の流出特性を考慮して逆推定した降雨を $x'$ とし、高周波系列のそれを $x_1'$ 、低周波系列のそれを $x_2'$ とする。また流量を $y$ 、高周波系列の流量を $y_1$ 、低周波系列のそれを $y_2$ と定義する。

## ii) 両系列のARモデルの適用

$y_1$ 、 $y_2$ 系列に自己回帰モデルを適用して、統計的な性質をもつ流域の流出特性を決定する。低周波の $y_2$ 系列では、一般に自己回帰係数が大きくなっている。高周波の $y_1$ 系列については、AR係数は小さい。

$y_1$ 、 $y_2$ の両系列のAR係数は、両系列の定常条件を、満たしている。自己回帰モデルの次数は、 $\sum (y_i - \hat{y}_i)^2 \rightarrow \min$  時の次数をとる。 $\hat{y}_i$ は、ARモデルを適用し計算した系列。

$y_i$ と $\hat{y}_i$ を図-4、図-5に示す。(  $i=1, 2$  )

表-2に自己回帰係数を示す。

表-2に求めた自己回帰係数と(6)式とで降雨系列 $x_1'$ 、 $x_2'$ を逆推算する。図-4、5に推定した降雨系列と流量系列を示す。

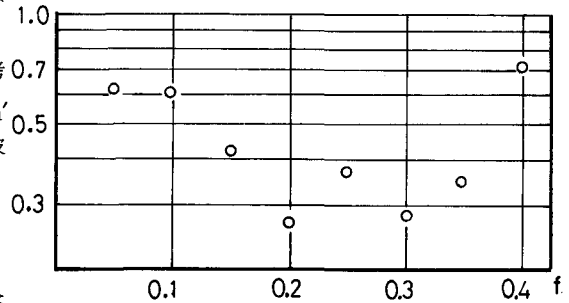


図-3 コヒーレンシー

| Order | $y_1$  | $y_2$  |
|-------|--------|--------|
| 1     | 0.483  | 1.516  |
| 2     | -0.225 | -0.792 |
| 3     |        | 0.228  |
| 4     |        | -0.135 |
| 5     |        | 0.054  |

表-2  $y_1, y_2$ の自己回帰係数

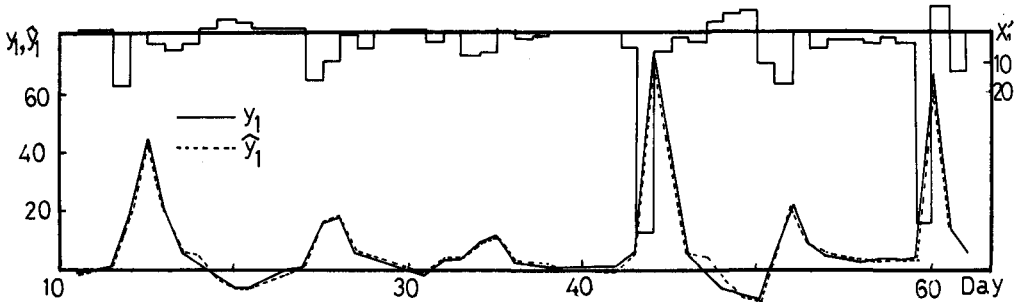


図-4  $y_1$ と $\hat{y}_1$ のハイドログラフ

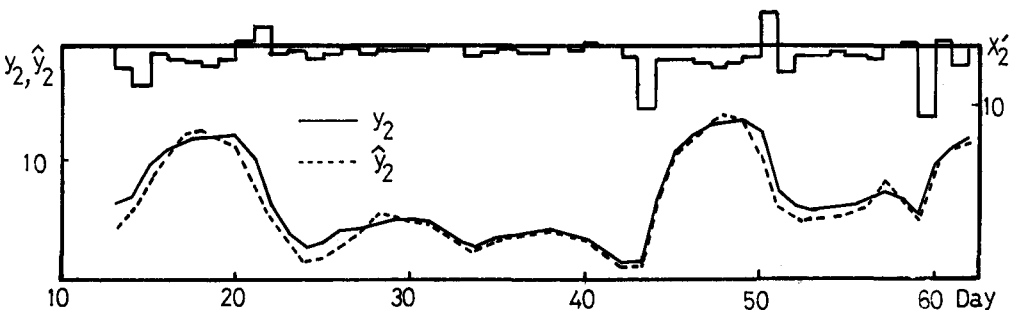


図-5  $y_2$ と $\hat{y}_2$ のハイドログラフ

### iii) $x_1', x_2'$ と $x$ の関係

$x_1', x_2'$  を発生したので(10)式で、実測の降雨系列と推定した降雨系列の比較する。実測の流出率  $f$  は、実測の高水毎に  $f$  を計算して与えた。

$m_1 x_1', m_2 x_2'$  と  $m_1 x_1' + m_2 x_2'$  との関係を図-6に示す。また累加降雨系列について  $\Sigma x \cdot f$  と  $\Sigma (m_1 x_1' + m_2 x_2')$  との関係を図-7に示し、 $x \cdot f \sim m_1 x_1' + m_2 x_2'$  との関係を図-8に示す。

地下水流出成分に寄与する降雨は、このモデルでは、50%位であり、流域の流出特性を考慮したモデルで推定した降雨時系列は、実測の降雨時系列とは、かなり類似であると推察された。また河川に溶出しているイオンを用いた例ではあるが、地下水流出成分と全流出成分との比は、40～50位という報告もある。

著者らも地球化学的なデータからの流出分離も検討中である。

## 5. 結 論

本研究では、降雨一流出系を逆問題 (Inverse-Problem) の立場から検討を試みた。すなわち、流量時系列のみから長短期流出特性の推定、降雨時系列の逆推算、表面流出成分と地下水流出成分の分離する一般的手法を提出し、実河川への適用を試みた。

この河川における結果は、比較的、妥当であったと思われる。

今後の課題としては、他に多くの河川に適用し、本モデルでは、日単位で(降雨系列の白色雑音を仮定)適用したが、単位(時間)によって、どう異なるかを検討する必要があると思われる。地下水流出成分、表面流出成分の各々の系列についての統計的性質(応答関数等)、物理的性質(モデルによる流出特性)を検討して、出来れば、降水の予測をも試みたい。

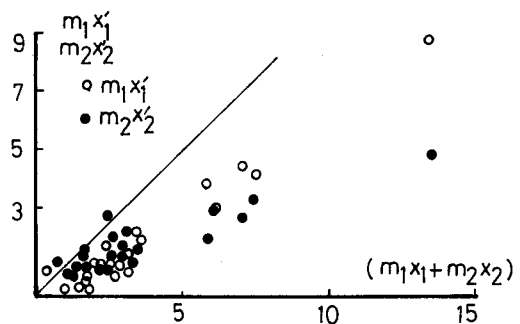


図-6  $m_1 x_1', m_2 x_2'$  と  $(m_1 x_1' + m_2 x_2')$  の関係

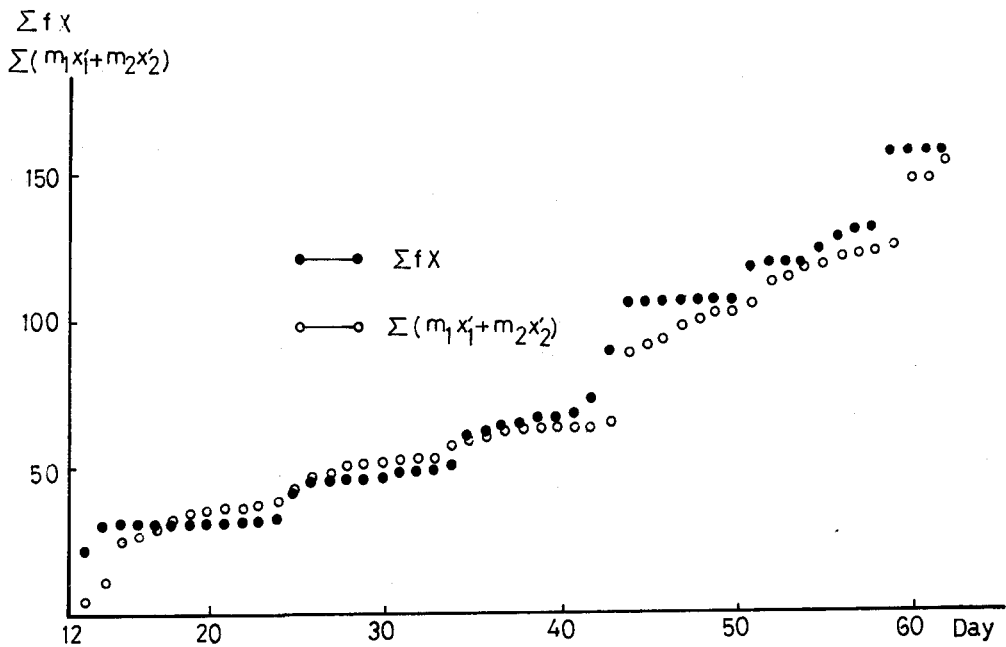


図-7  $\Sigma x \cdot f$  と  $\Sigma (m_1 x_1' + m_2 x_2')$  との関係

# 参 考 文 献

- (1) 日野幹雄；スペクトル解析，朝倉書店
- (2) 日野幹雄；非線形流出解析および適応流出解予測，水工学シリーズ75-A-8
- (3) 赤池弘次，中川東一郎；統計的解析と制御，サイエンス社
- (4) Raman K, Mehra, Dimitri, G, Lainiotris ; System Identification ; Advances and Case Mathematics in science and Engineering Volume 126
- (5) 長谷部正彦，Transfer -Function- Noise Models による流出解析，第22回水構論文集
- (6) G.F. Pinder, John F. Jones ; Determination of the Ground-water component of Peak Discharge from the chemistry of Total Run - off, Water, Resources Reserch, Vol. No.9, 1969
- (7) 日野幹雄，長谷部正彦；Geochemical-hydrologic data による流出成分分離則の推定について（未発表）

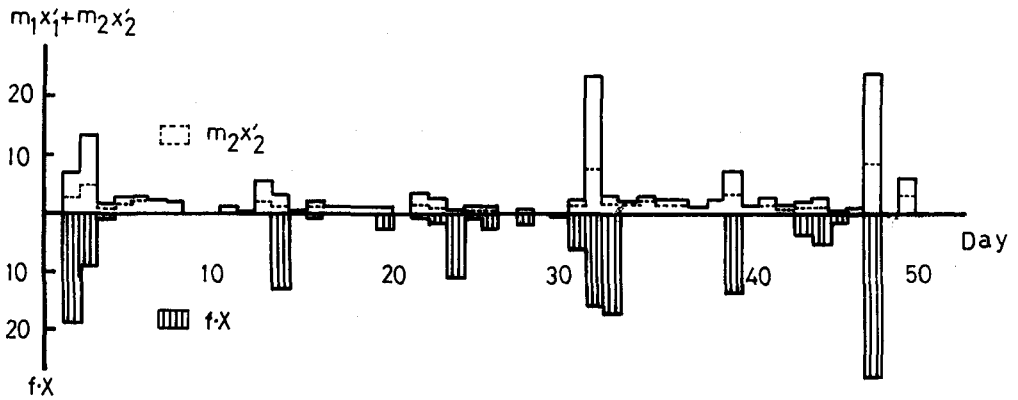


図-8  $x \cdot f$  と  $(m_1 x_1' + m_2 x_2')$  との比較図