

河床安定理論の立場からみた小規模河床波の発生について

FORMATION OF DUNES AND ANTIDUNES ON ALLUVIAL BEDS

中央大学理工学部 正会員 林 泰造

中央大学大学院 学生員 〇大西光陽

1. まえがき

本研究は河床安定理論を用いて、小規模河床波の発生条件および卓越波数を解析的に明らかにしようとしたものである。

安定理論の立場からKennedy¹⁾(1963), 林²⁾(1970)は水流に potential flow を用いて、掃流砂量式中に河床の不安定性の要因を導入し、河床波の発生機構を示した。本研究は、自由表面を有する移動床水路の2次元線型河床安定理論に、より実際の流れである turbulent shear flow model を用いて、Kennedy¹⁾および林²⁾等の不安定性の要因を明らかにすることを試みた。また、河床形態を区別する上で重要な、河床波と水面波の位相差を求めるとともに、河床波と河床に作用するせん断応力分布との間の位相差、河床波の発生条件および小規模河床波の卓越波数を解析的に求め、実験値との比較検討を行なった。

2. 水流に関する基本式と境界条件

(a) 基本式

河床波の移動速度は小さいので、河床波上を流れる水流は準定常とし粘性底層はないものとする、連続方程式と x ならびに y 方向の Reynolds 方程式はそれぞれ(1), (2), (3)式で示される。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = gI - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここに、 u, v : 流速の成分, p : 圧力, I : 河床勾配, である。

(b) 主流の流速分布

図-1に示すように主流の流速分布は放物線近似とし、Fredse³⁾(1974)らと同様に河床に slip を認めて、

$$\frac{U_s - U(y)}{U_*} = \frac{U_s - U_b}{U_*} \left(1 - \frac{y}{D_0} \right)^2 \quad \dots\dots\dots(4)$$

で表わされるものとする。ここに、 D_0 : 平均水深, U_s : 水表面における平均流速, U_b : 河床面における平均流速, U_* : 主流によるせん断速度, である。また渦動粘性係数 ε は断面平均値をとって次式で表わされるものとする。

$$\varepsilon = \alpha U_* D_0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここに α は定数である。

いま、

$$\beta = \frac{U_s - U_b}{U_*} \quad \dots\dots\dots(6)$$

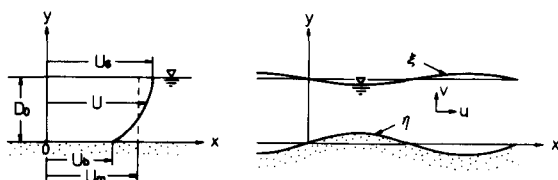


図-1. 主流の流速分布と各変動成分

とすると、(4)式の流速分布は

$$U(y) = U_s - U_* \beta \left(1 - \frac{y}{D_0}\right)^2 \quad \dots\dots\dots (7)$$

となり、平均流速、表面流速および河床における slip 流速はそれぞれ次のように表わされる。

断面平均流速 U_m

$$U_m = U_s - \frac{1}{3} \beta U_* \quad \dots\dots\dots (8)$$

表面流速

$$U_s = U_m + \frac{1}{3} \beta U_* \quad \dots\dots\dots (9)$$

slip 流速

$$U_b = U_m - \frac{2}{3} \beta U_* \quad \dots\dots\dots (10)$$

ところで、(5)式中の係数 α と(6)式で表わされる β の関係は、

$$\alpha = 1/2\beta \quad \dots\dots\dots (11)$$

となるから、渦動粘性係数として

$$\varepsilon = (\kappa/6) U_* D_0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

を用いると、 $\alpha = \kappa/6$ 、 $\beta = 3/\kappa$ となる。Engelund⁴⁾ (1964) は $\alpha = 0.077$ とし、Hama⁵⁾ (1954) は $\beta = 9.6$ として与えているが、本解析では $\kappa = 0.4$ とし、 $\alpha = 0.067$ 、 $\beta = 7.5$ の値を用いて解析を行なった。

(c) 境界条件

水表面および河床面における境界条件として次式を用いる。

$y = D_0 + \xi$ において：

$$p = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$u \frac{\partial \xi}{\partial x} = v \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\frac{1}{\rho} \tau_{xy} = \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

$y = \eta$ において：

$$u \frac{\partial \eta}{\partial x} = v \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$u_*^2 = \left(\frac{U_*}{U_b} \right)^2 u_b^2 \quad \dots\dots\dots (17)$$

ただし、(17)式は以下のように考えて導かれたものである。一般に河床に働くせん断力 τ_b は、

$$\tau_b = f \frac{1}{2} \rho u_b^2 \quad \dots\dots\dots (18)$$

で表わせる。ここに、 f ：摩擦抵抗係数、 u_b ：河床に微小擾乱を有するときの河床面上の流速である。

(18)式より f は、

$$f = 2 \left(\frac{u_*}{u_b} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここに、 $u_* = \sqrt{\tau_b / \rho}$ ：摩擦速度である。

いま、河床擾乱が微小振幅であるとするとき、 f は平坦河床のときと河床波を有するときとほぼ同じ値を取

るとして,

$$f = 2 \left(\frac{u_*}{u_b} \right)^2 \cong 2 \left(\frac{U_*}{U_b} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (20)$$

よって, $u_*^2 = (U_*/U_b)^2 u_b^2$ となる。

(d) 変動成分に関する基本式と境界条件の線型化

ここで,

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t) &= U(y) + u'(x, y, t), \quad v(x, y, t) = v'(x, y, t) \\ p(x, y, t) &= P(y) + p'(x, y, t) \\ \xi(x, t) &= \xi'(x, t), \quad \eta(x, t) = \eta'(x, t) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

とおき, $u' \ll U$, $v' \ll U$, $p' \ll P$ であるとして, プライムのついた量について線型化すると,

連続方程式

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

Reynolds 方程式

$$U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dU}{dy} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right) \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$U \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right) \quad \dots\dots\dots (24)$$

境界条件

$y = D_0$:

$$p' = \rho g \xi' \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$U_s \frac{\partial \xi'}{\partial x} = v' \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} = 2\beta \frac{U_*}{D_0^2} \xi' \quad \dots\dots\dots (27)$$

$y = 0$:

$$U_b \frac{\partial \eta'}{\partial x} = v' \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$2\beta U_* \frac{\eta'}{D_b} + u' = \frac{U_b}{2U_*^2} \varepsilon \left(-\frac{2U_*\beta}{D_0^2} \eta' + \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \quad \dots\dots\dots (29)$$

となる。

(e) 基本式の無次元化

(7)~(10)式および(22)~(29)式を次のように無次元化する。

$$\left. \begin{aligned} U(y)/U_m &\rightarrow U(y), \quad U_s/U_m \rightarrow U_s, \quad U_b/U_m \rightarrow U_b \\ u'/U_m &\rightarrow u', \quad v'/U_m \rightarrow v' \\ x/D_0 &\rightarrow x, \quad y/D_0 \rightarrow y \\ \eta'/D_0 &\rightarrow \eta', \quad \xi'/D_0 \rightarrow \xi' \\ P(y)/\rho g D_0 &\rightarrow P(y), \quad p'/\rho g D_0 \rightarrow p' \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

平均成分

$$U(y) = U_s - \frac{\beta}{\varphi_0} (1 - y)^2 \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$U_s = 1 + \frac{\beta}{3\varphi_0} \dots\dots\dots (32)$$

$$U_b = 1 - \frac{2\beta}{3\varphi_0} \dots\dots\dots (33)$$

$$P(y) = 1 - y \dots\dots\dots (34)$$

ここに, $\varphi_0 = U_m/U_*$: 流速係数を表わす。

変動成分

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (35)$$

$$F_r^2 \left(U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dU}{dy} \right) = - \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{F_r^2}{R_{e\varepsilon}} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (36)$$

$$F_r^2 U \frac{\partial v'}{\partial x} = - \frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{F_r^2}{R_{e\varepsilon}} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (37)$$

ここに, $F_r = U_m/\sqrt{gD_0}$, $R_{e\varepsilon} = U_m D_0/\varepsilon$ である。

境界条件

$y = 1$:

$$p' = \xi' \dots\dots\dots (38)$$

$$U_s \frac{\partial \xi'}{\partial x} = v' \dots\dots\dots (39)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{2\beta}{\varphi_0} \xi' \dots\dots\dots (40)$$

$y = 0$:

$$U_b \frac{\partial \eta'}{\partial x} = v' \dots\dots\dots (41)$$

$$\frac{2\beta}{\varphi_0} \eta' + u' = \frac{\varphi_0}{4\beta} U_b \left(- \frac{2\beta}{\varphi_0} \eta' + \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \dots\dots\dots (42)$$

3. y 方向の変数の分離

河床の微小擾乱 η' を

$$\eta'(x, t) = \eta_0 e^{ik(x-ct)} \dots\dots\dots (43)$$

として与えた際, それによって生ずるその他の変動成分を次式のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} u'(x, y, t) &= \hat{u}(y) e^{ik(x-ct)} \\ v'(x, y, t) &= \hat{v}(y) e^{ik(x-ct)} \\ p'(x, y, t) &= \hat{p}(y) e^{ik(x-ct)} \\ \xi'(x, t) &= \xi_0 e^{ik(x-ct) - i\theta w} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

ここに, η_0 , ξ_0 : $t = 0$ における河床波と水面波の振幅, $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{p}$: y のみの複素関数, $k = 2\pi D_0/L$: 無次元波数, L : 河床波の波長, $c = c_R + c_I$: 河床擾乱の無次元複素伝播速度, c_R : 河床擾乱の無次元移動速度, c_I : 河床擾乱の対数的増幅率, θw : 水面波の河床波に対する位相差, をそれぞれ表わす。

この(43)および(44)式を変動成分に関する基本式(22)~(24)式および境界条件(38)~(42)式に代入し整理するとそれぞれ

れ、

変動成分に関する基本式

$$ik\hat{u} + \frac{d\hat{v}}{dy} = 0 \quad \dots\dots\dots (45)$$

$$F_r^2 (ikU\hat{u} + \hat{v} \frac{dU}{dy}) = -ik\hat{p} + \frac{F_r^2}{R_{e\varepsilon}} (-k^2\hat{u} + \frac{d^2\hat{u}}{dy^2}) \quad \dots\dots\dots (46)$$

$$F_r^2 (ikU\hat{v}) = -\frac{d\hat{p}}{dy} + \frac{F_r^2}{R_{e\varepsilon}} (-k^2\hat{v} + \frac{d^2\hat{v}}{dy^2}) \quad \dots\dots\dots (47)$$

境界条件

$y = 1$:

$$\hat{p} = \xi_0 e^{-i\theta w} \quad \dots\dots\dots (48)$$

$$\hat{v} = ikU_s \xi_0 e^{-i\theta w} \quad \dots\dots\dots (49)$$

$$\frac{d\hat{u}}{dy} + ik\hat{v} = \frac{2\beta}{\varphi_0} \xi_0 e^{-i\theta w} \quad \dots\dots\dots (50)$$

$y = 0$:

$$\hat{v} = ikU_b \eta_0 \quad \dots\dots\dots (51)$$

$$\frac{d\hat{u}}{dy} + ik\hat{v} = \frac{2\beta}{\varphi_0} (\frac{1}{U_b} \frac{4\beta}{\varphi_0} + 1) \eta_0 + \frac{1}{U_b} \frac{4\beta}{\varphi_0} \hat{u} \quad \dots\dots\dots (52)$$

となる。

(48), (49)および(47)式より $\hat{u}$ と $\hat{p}$ を消去すると $\hat{v}$ に関する次式が得られる。

$$U \frac{d^2\hat{v}}{dy^2} - \hat{v} \frac{d^2U}{dy^2} - k^2 U \hat{v} = \frac{1}{ikR_{e\varepsilon}} (\frac{d^4\hat{v}}{dy^4} - 2k^2 \frac{d^2\hat{v}}{dy^2} + k^4 \hat{v}) \quad \dots\dots\dots (53)$$

この(53)式はOrr-Sommerfeld方程式で水流の擾乱の複素伝播速度が0の場合にあたる。

いま、(53)式より $d^2U/dy^2 = -(2\beta)^2/R_{e\varepsilon}$ であるから(53)式は次式のようになる。

$$U \frac{d^2\hat{v}}{dy^2} + \frac{4\beta^2}{R_{e\varepsilon}} \hat{v} - k^2 U \hat{v} = \frac{1}{ikR_{e\varepsilon}} (\frac{d^4\hat{v}}{dy^4} - 2k^2 \frac{d^2\hat{v}}{dy^2} + k^4 \hat{v}) \quad \dots\dots\dots (54)$$

$U \cong 1$ として(54)式を書き直すと

$$\frac{d^4\hat{v}}{dy^4} - A_1 \frac{d^2\hat{v}}{dy^2} + A_2 \hat{v} = 0 \quad \dots\dots\dots (55)$$

ここに、 $A_1 = 2k^2 + i2\beta\varphi_0 k$, $A_2 = k^4 - i4\beta^2 k + i2\beta\varphi_0 k^3$ 。

(55)式は定数係数線型微分方程式となり、結局(54)式の近似解として次式が得られる。

$$\hat{v}(y) = C_1 e^{\lambda_1 y} + C_2 e^{\lambda_2 y} + C_3 e^{\lambda_3 y} + C_4 e^{\lambda_4 y} \quad \dots\dots\dots (56)$$

ここに、 $\lambda_1 = \left[\frac{1}{2} \{ A_1 + (A_1^2 - 4A_2)^{\frac{1}{2}} \} \right]^{\frac{1}{2}}$, $\lambda_2 = \left[\frac{1}{2} \{ A_1 - (A_1^2 - 4A_2)^{\frac{1}{2}} \} \right]^{\frac{1}{2}}$, $c_1 \sim c_4$ は積分定数である。

定数 $c_1 \sim c_4$ は上で導いた境界条件(48)~(52)式より求められ、 $c_1 \sim c_4$ を求める式を整理すると次式となる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1/\eta_0 \\ c_2/\eta_0 \\ c_3/\eta_0 \\ c_4/\eta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (57)$$

$$\begin{aligned}
 \text{ここ、} \quad & a_{11} = (D_1 - E B_1) e^{\lambda_1}, \quad a_{12} = (D_1 + E B_1) e^{-\lambda_1} \\
 & a_{13} = (D_2 - E B_2) e^{\lambda_2}, \quad a_{14} = (D_2 + E B_2) e^{-\lambda_2} \\
 & a_{21} = (1 - F B_1) e^{\lambda_1}, \quad a_{22} = (1 + F B_1) e^{-\lambda_1} \\
 & a_{23} = (1 - F B_2) e^{\lambda_2}, \quad a_{24} = (1 + F B_2) e^{-\lambda_2} \\
 & a_{31} = G (\lambda_1^2 + k^2) - \lambda_1, \quad a_{32} = G (\lambda_1^2 + k^2) + \lambda_1 \\
 & a_{33} = G (\lambda_2^2 + k^2) - \lambda_2, \quad a_{34} = G (\lambda_2^2 + k^2) + \lambda_2 \\
 & a_{41} = a_{42} = a_{43} = a_{44} = 1
 \end{aligned}$$

$$b_1 = b_2 = 0, \quad b_3 = -ik \left(\frac{U_b}{2} + E \right), \quad b_4 = ik U_b$$

$$B_1 = F_r^2 \lambda_1 \left\{ \frac{1}{2\beta\varphi_0} \left(\frac{\lambda_1^2}{k^2} - 1 \right) - \frac{i}{k} U_s \right\}$$

$$B_2 = F_r^2 \lambda_2 \left\{ \frac{1}{2\beta\varphi_0} \left(\frac{\lambda_2^2}{k^2} - 1 \right) - \frac{i}{k} U_s \right\}$$

$$D_1 = ik \left(\frac{\lambda_1^2}{k^2} + 1 \right), \quad D_2 = ik \left(\frac{\lambda_2^2}{k^2} + 1 \right)$$

$$E = \frac{2\beta}{\varphi_0}, \quad F = ik U_s, \quad G = \frac{U_b}{4\beta} \varphi_0$$

57)式より定数 $c_1/\eta_0 \sim c_4/\eta_0$ が求まる。

以上で河床に微小擾乱 η' を与えた際、これに伴って生ずる水流のその他の変動成分が全て求まったことになる。

4. 変動量間に存在する位相差

(a) 水面波の河床波に対する位相差 θ_w

水面波の河床波に対する位相差 θ_w は43式より、

$$e^{-i\theta_w} = \frac{1}{\xi_0} \hat{p}(y=1) = \frac{\eta_0}{\xi_0} \left(\frac{\hat{p}}{\eta_0} \right)_{y=1}$$

よって θ_w は、

$$\theta_w = -Im \left[\ln \left(\frac{\hat{p}}{\eta_0} \right)_{y=1} \right] \quad (59)$$

ここ、

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\hat{p}}{\eta_0} \right)_{y=1} = & -i F_r^2 \left[\frac{\lambda_1}{k} \left(\frac{c_1}{\eta_0} e^{\lambda_1} - \frac{c_2}{\eta_0} e^{-\lambda_1} \right) \{ U_s - i \frac{k}{2\beta\varphi_0} (1 - \frac{\lambda_1^2}{k^2}) \} \right. \\
 & \left. + \frac{\lambda_2}{k} \left(\frac{c_3}{\eta_0} e^{\lambda_2} - \frac{c_4}{\eta_0} e^{-\lambda_2} \right) \{ U_s - i \frac{k}{2\beta\varphi_0} (1 - \frac{\lambda_2^2}{k^2}) \} \right]
 \end{aligned}$$

図-3 に $\varphi_0 = 20$ の場合の各フルード数 F_r に対する θ_w を示した。図-3 で、 θ_w が正の部分には水面波が河床波よりも下流側に位相差 θ_w だけずれていて、負の部分は水面波が河床波よりも上流側に θ_w だけずれていることを表わしている。河床形態はこの位相差 θ_w によって決まり、 θ_w がほぼ $\pm\pi$ の位相差にある波数の河床波は dunes であり、 θ_w がほぼ 0 の位相差の河床波は antidunes である。

$$\dots\dots\dots (58)$$

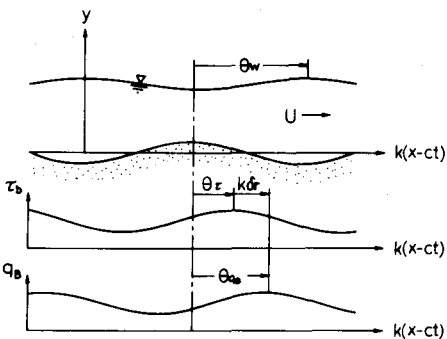


図-2. 河床波に対する変動量の位相差

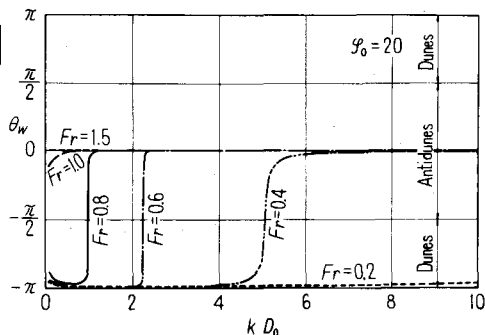


図-3. 水面波の河床波に対する位相差 θ_w

(b) 河床に働くせん断力分布の河床波に対する位相差 θ_τ

河床に作用するせん断応力の変動成分 τ'_b は、 η' を微小量として(47)式を $y=0$ のまわりにテイラー展開し、線型化ならびに無次元化すれば次式が得られる。

$$\tau'_b = \frac{4\beta}{U_b \eta_0} \eta' + \frac{2}{U_b} u'(y=0) \quad \dots\dots\dots (60)$$

ここに、 $\tau'_b = (\tau_b - \tau_{b0})/\tau_{b0}$ 、 $\tau_{b0} = \rho(1/\varphi_0)^2$ である。(43)および(44)式を(60)式に代入すると

$$\tau'_b = \left[\frac{4\beta}{U_b \varphi_0} \eta_0 + i \frac{2}{k U_b} \{ \lambda_1 (c_1 - c_2) + \lambda_2 (c_3 - c_4) \} \right] e^{ik(x-ct)} \quad \dots\dots\dots (61)$$

よって、 η' と τ'_b の位相差 θ_τ は次式で得られる。

$$\theta_\tau = \tan^{-1} \left[- \frac{Im(\tau'_b/\eta')}{Re(\tau'_b/\eta')} \right] \quad \dots\dots\dots (62)$$

ここに、

$$\frac{\tau'_b}{\eta'} = \frac{4\beta}{U_b \varphi_0} + i \frac{2}{k U_b} \{ \lambda_1 (\frac{c_1}{\eta_0} - \frac{c_2}{\eta_0}) + \lambda_2 (\frac{c_3}{\eta_0} - \frac{c_4}{\eta_0}) \}$$

である。図-4に $\varphi_0=20$ の場合の θ_τ を示した。この場合にも θ_w と同様に、せん断力分布が河床波に対して下流側にずれる場合を正、上流側にずれる場合を負としてある。この河床擾乱を有するときの河床せん断応力と河床波の位相差 θ_τ は、後述の安定解析のところでわかるように、 θ_τ の大部分の値が $0 > \theta_\tau > -\pi$ であり、河床波の不安定性に最も寄与していることがわかる。これは林²⁾(1970)が導いた inclination factor α の機構と同じ役割を果たしている。

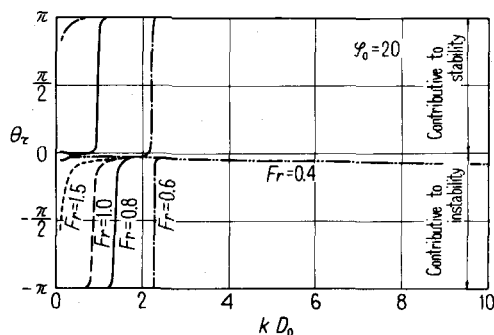


図-4. 河床せん断応力分布の河床波に対する位相差 θ_τ

5. 河床波の安定解析

掃流砂量の連続方程式は次式とする。

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + \frac{\partial q_B}{\partial x} = 0 \quad at \quad y = \eta' \quad \dots\dots\dots (63)$$

ここに、 q_B : 単位幅あたりの掃流砂量を表わす。

掃流砂量式には Brown の修正式を用いるとし、無次元掃流砂量 ϕ は

$$\phi = \frac{q_B}{w_f d} \cong 40 [\tau_* (x - \delta_r)]^3 \quad \dots\dots\dots (64)$$

で与えられるとする。ここに、 w_f : Rubey の砂粒沈降速度、 d : 砂粒の粒径、 $\tau_* = u_*^2/(s-1)gd$: 無次元掃流力、 δ_r : 掃流力とそれに対する掃流砂量との遅れ距離、を表わす。なお δ_r については後に述べる。

(63)式で時間および空間座標を、 w_f 、 d および D_0 で無次元化すると、

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + \left(\frac{d}{D_0}\right)^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad at \quad y = \eta' \quad \dots\dots\dots (65)$$

(65)式に(64)式を代入すると

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + a \frac{\partial [\tau_* (x - \delta_r)]^3}{\partial x} = 0 \quad at \quad y = \eta' \quad \dots\dots\dots (66)$$

となる。ここに、 $a = 40 (d/D_0)^2$ である。

次に、 η' を微小量として(66)式を $y=0$ のまわりに展開し線型化すると次式を得る。

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + \phi_* \left\{ \frac{12\beta}{U_b \phi_0} \frac{\partial \eta'(x - \delta_r)}{\partial x} + \frac{6}{U_b} \frac{\partial u'(x - \delta_r)}{\partial x} \right\} = 0 \quad \text{at } y=0 \quad \dots\dots\dots (67)$$

ここに,

$$\phi_* = \phi_0 (d/D_0)^2, \quad \phi_0 = 40 \tau_{*0}^3, \quad \tau_{*0} = U_*^2 / (s-1) g d \quad \dots\dots\dots (67a)$$

である。また、(43)および(44)式を(67)式に代入し整理すると、

$$\frac{c}{\phi_*} = \left\{ \frac{12\beta}{U_b \phi_0} + \frac{6}{U_b} \frac{\hat{u}(y=0)}{\eta_0} \right\} e^{-ik\delta_r} \quad \dots\dots\dots (68)$$

ここに,

$$\frac{\hat{u}(y=0)}{\eta_0} = i \left\{ \frac{\lambda_1}{k} \left(\frac{c_1}{\eta_0} - \frac{c_2}{\eta_0} \right) + \frac{\lambda_2}{k} \left(\frac{c_3}{\eta_0} - \frac{c_4}{\eta_0} \right) \right\}$$

となる。

河床擾乱の複素伝播速度 c は $c = c_R + c_I$ であり、河床波の安定・不安定は c_I の符号によって決まり $c_I > 0$ のときが不安定、 $c_I < 0$ のときが安定である。また、河床波の移動方向は、 $c_R > 0$ のとき下流に移動し、 $c_R < 0$ のときは上流に遡上する。従って、河床波の安定・不安定ならびに移動方向は(68)式の $R_e[c/\phi_*]$ ならびに $I_m[c/\phi_*]$ の符号の正負によって求まる。

図-5, 6に流速係数 $\phi_0 = 10$ ならびに $\phi_0 = 20$ の場合の安定限界ならびに河床波の移動方向を示した。なお、図中の dunes および antidunes の区別は前述の θ_w により判別し、遅れ距離 δ_r については後述の林・尾崎⁶⁾の式を用いて計算した。

6. 河床波の安定限界と位相差の関係

河床波の安定限界と位相差の関係を明らかにするために、掃流砂量と河床波との間の位相差 θ_{qB} を考える(図-2)。

掃流砂量が無次元掃流力 τ_* の n 乗に比例すると考えると、掃流砂量の連続方程式(63)は

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + a_1 \frac{\partial \tau_*^n(x - \delta_r)}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (69)$$

ここに、 a_1 : 比例定数、 $\tau_*(x - \delta_r) = \tau_b(x - \delta_r) / \rho(s-1)gd$ で、これを平均成分 τ_{*0} と変動成分 $\tau'_*(x - \delta_r)$ とにわける

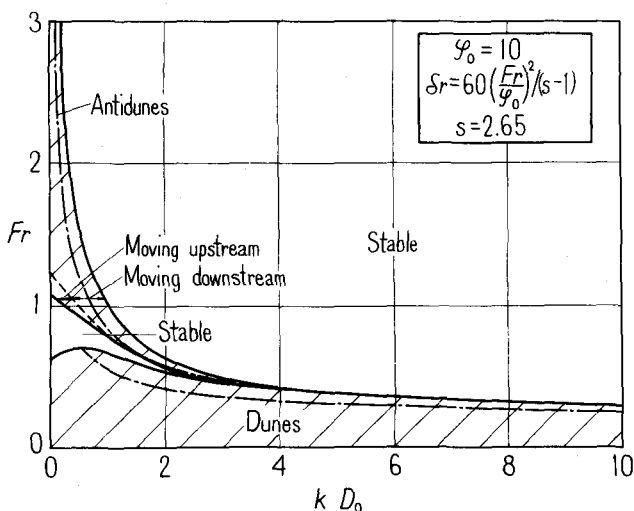


図-5. 河床波の安定限界 ($\phi_0 = 10$ の場合)

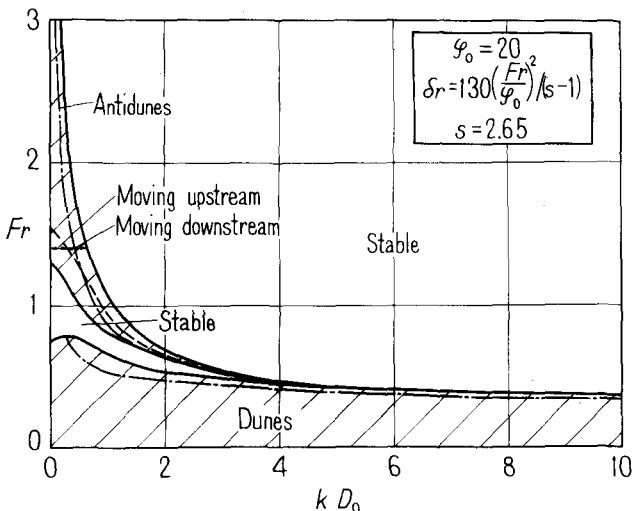


図-6. 河床波の安定限界 ($\phi_0 = 20$ の場合)

と

$$\tau_*(x - \delta_r) = \tau_{*0} + \tau'_*(x - \delta_r) \quad \dots\dots\dots (70)$$

である。河床波 η' と無次元掃流力 τ_* との間の位相差は(62)式で求めた θ_τ であるから、

$$\tau'_* = \|\tau'_*\| e^{ik(x-ct) - i\theta_\tau} \quad \dots\dots\dots (71)$$

と表わされる。ここに、 $\|\tau'_*\|$: τ'_* の振幅の最大値、を表わす。よって、

$$\tau'_*(x - \delta_r) = \|\tau'_*\| e^{ik(x-ct) - i(\theta_\tau + k\delta_r)} \quad \dots\dots\dots (72)$$

ここで、 $\theta_\tau + k\delta_r$ は掃流砂量の河床波に対する位相差を表わしている。いま、

$$\theta_{q_B} = \theta_\tau + k\delta_r \quad \dots\dots\dots (73)$$

とすると、(72)式は

$$\tau'_*(x - \delta_r) = \|\tau'_*\| e^{ik(x-ct) - i\theta_{q_B}}$$

となり、掃流砂量 ϕ は次式によって表わされる。

$$\begin{aligned} \phi &= a_1 \tau'^n_*(x - \delta_r) = a_1 \tau'^n_{*0} \left[1 + n \frac{\tau'_*(x - \delta_r)}{\tau_{*0}} \right] \\ &= a_1 \tau'^n_{*0} \left[1 + n T e^{ik(x-ct) - i\theta_{q_B}} \right] \quad \dots\dots\dots (74) \end{aligned}$$

ここに、 $T = \|\tau'_*\| / \tau_{*0}$ である。(73)および(74)式を(69)式に代入し整理すると、

$$c = \frac{\eta_0}{A_1} e^{-i\theta_{q_B}}$$

よって、

$$c_R + ic_I = \frac{\eta_0}{A_1} (\cos \theta_{q_B} - i \sin \theta_{q_B}) \quad \dots\dots\dots (75)$$

ここに、 $A_1 = a_1 n \tau'^n_{*0} T > 0$ 、 $\eta_0 / A_1 > 0$ である。

以上をまとめると、河床波の安定限界は河床波と掃流砂量との位相差 θ_{q_B} のみによって定まり表-1のようになる。

表-1 からわかるように、河床波が不安定となるのは θ_{q_B} が河床波の上流側にずれたときであり、 θ_{q_B} が下流側にずれたときは安定である。また、河床波の移動方向は $-\frac{\pi}{2} < \theta_{q_B} < \frac{\pi}{2}$ では下流に移動し、それ以外は上流側に遡上する。

図-7 には $\eta_0 = 20$ の場合の θ_{q_B} を示した。図-4と図-7を見比べると、河床波とせん断応力分布の位相差 θ_τ は河床波の不安定性に関与し、掃流力と掃流砂量との遅れ距離 δ_r は河床の安定性に関与していることがわかる。また図-7で θ_{q_B} が0の線と交差している点の波数の河床波は発達も減衰もしない中立の状態にある河床波である。

図-8は本解析より求めた $\eta_0 = 20$ の場合の安定限界とKennedy¹⁾によって集録された実験値との比較を

表-1. 安定限界と位相差 θ_{q_B} の関係				
位 相 差	河 床 波	移動方向	c_I	c_R
$-\pi < \theta_{q_B} < -\frac{\pi}{2}$	発 達	上 流	正	負
$-\frac{\pi}{2} < \theta_{q_B} < 0$	発 達	下 流	正	正
$0 < \theta_{q_B} < \frac{\pi}{2}$	減 衰	下 流	負	正
$\frac{\pi}{2} < \theta_{q_B} < \pi$	減 衰	上 流	負	負

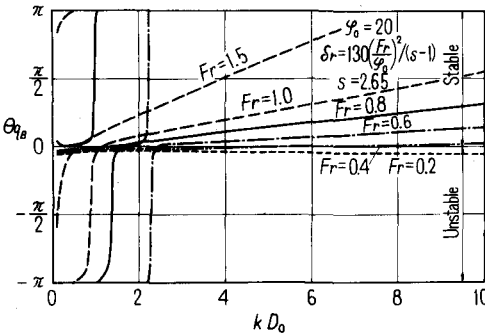


図-7. 掃流砂量の河床波に対する位相差 θ_{q_B}

なお、本解析に用いた掃流力と掃流砂量との遅れ距離 δ_r は、林・尾崎⁶⁾(1979)が椿・斉藤⁷⁾(1967)の非平衡流砂量式より導いた、砂粒の飛跳移動距離 δ_s の(7)式を用いた。

ここに、 A ：限界掃流力によって変化するとされる定数、 τ_{*0} ：平衡状態での無次元掃流力である。 δ_g を平均水深 D_0 で無次元化すると次式となる。

定数 A は流速係数 $\varphi_0 = 8 \sim 25$ で $50 \sim 170$ 程度の値となると思われる。本解析には $\varphi_0 = 10$ で $A = 60$, $\varphi_0 = 20$ で $A = 130$ として計算した。その δ_r の値を表 - 2 に示す。

(43) 式より

河床波の振幅の増幅率は $e^{kc_1 t}$ であり，発達初期の卓越波数は

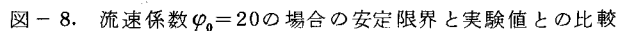
より、 k_{c1} を極大とする波数が卓越波数である。図-5, 6, 8の一点鎖線が与えられたフルード数 F_r に対する卓越波数を表わしている。これによって dunes ならびに antidunes の卓越波数が解析的に求まったことになる。

本研究で導かれた結論はつぎのようになる。

(1) Potential flow model では shear が存在しないために河床に作用するせん断力と河床波との間の位相差が生じない。よって、数式的に林²⁾の inclination factor の導入等が必要であった。本解析のように水流がせん断流の場合、日野・宮永⁸⁾(1977)が波状管路の解析で示したように、河床擾乱とせん断応力の間に位相差 θ_r が存在し、この θ_r が河床波の不安定性に最も関与していることが明らかになった。

(2) 線型河床安定理論の場合には、掃流力と掃流砂量との間の遅れ距離 δ_r は、林・尾崎⁶⁾の粒砂の飛跳移動距離で十分に説明づけられる。また、この δ_r は河床波の安定性に関与することが明らかになった。

(3) 河床波の安定限界は河床波と掃流砂量との間の位相差 θ_{q_R} のみによって定まり、 θ_{q_R}/k がKennedy¹⁾

表-2. 遅れ距離 δ_r の値

$(s = 2.65)$		
F_r	δ_r	
	$\varphi_0 = 10$ $A = 60$	$\varphi_0 = 20$ $A = 130$
0	0	0
0.2	0.015	0.008
0.4	0.058	0.032
0.6	0.131	0.071
0.8	0.233	0.126
1.0	0.364	0.197
1.5	0.818	0.443
2.0	1.455	0.788

の遅れ距離に対応し、 θ_r/k および δ_r が林²⁾が導入した inclination factor α および遅れ距離にあたる。

(4) Kennedy¹⁾および林²⁾の potential flow model を用いた研究では、河床の安定限界はフルード数と無次元波数 kD_0 のみで表わされて粒径の効果等は表わしていなかった。しかし、本研究では turbulent shear flow model を用いたために、もう一つのパラメータである流速係数 φ_0 が導入できた。この φ_0 は河床せん断力と流砂量との間の遅れ距離 δ_r に関係し、 δ_r は限界掃流力および流砂の粒径等に関係している。従って、これにより河床波の発生に対する限界掃流力および粒径の影響がとり入れられたことになり、小規模河床波の発生を研究する上で重要な役割を果たしていると考えられる。

なお本研究をすすめるにあたり、電力中央研究所、尾崎幸男氏から非常に有意義な意見をいただいたことをここに記す。

参考文献

- 1) J.F. Kennedy: The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels, Jour. Fluid Mech., vol. 16, pp. 521-544, 1963.
- 2) T. Hayashi: Formation of dunes and antidunes in open channels, Proc. ASCE, vol. 96, Hy2, pp. 357-366, 1970.
- 3) J. Fredsøe: On the development of dunes in erodible channels, Jour. Fluid Mech., vol. 64, pp. 1-16, 1974.
- 4) F. Engelund: Instability of erodible beds, Jour. Fluid Mech., vol. 42, pp. 225-244, 1970.
- 5) J.O. Hinze: Turbulence, second edition, McGraw-Hill, pp. 631, 1975. より引用
- 6) 林 泰造・尾崎幸男: 掃流砂量に関する基礎的研究, 第23回水理講演会, 1979.
- 7) 椿東一郎・斉藤 隆: 流れによる Sand Wave の発生限界, 九州大学工学集報, 40 巻 5 号, pp. 741-748, 1967.
- 8) 日野幹雄・宮永洋一: 波状境界をもつ二次元管路流の解析, 土木学会論文報告集, 第264号, pp. 63-75, 1977.
- 9) 林 泰造・尾崎幸男・大西光陽: 河床波発生の理論解析モデルと局所流砂量について, 第5回関東支部年次研究講演概要集, pp. 83-84, 1978.
- 10) T. Hayashi・S. Ozaki: Formation of alternating bars and braids. Proc. of U.S.-Japan Binational Seminar on Erosion and Sedimentation, 1978.